

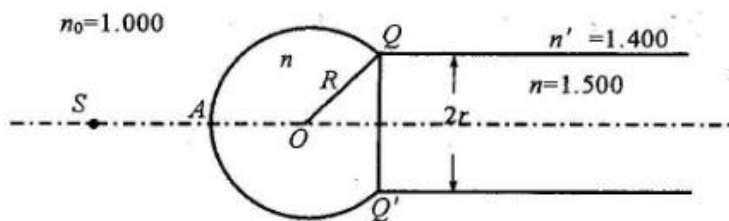
第 21 届全国中学生物理竞赛决赛试题

一、(20 分)

有一光导纤维, 光芯折射率 $n=1.500$ 的透明度极好的介质, 其截面半径为 r ; 光芯外面包层的折射率 $n'=1.400$ 。有一半导体激光器 S , 位于光纤轴线的延长上, 发出半角宽为 30° 的光束。为便于使此光束全部进入光纤, 在光纤端面处烧结了一个其材料与光芯相同的、半径为 R 的球冠 QAQ' , 端面附近的结构如图所示 (包层未画出), S 可看作点光源, 光纤放在空气中, 空气的折射率 n_0 按 1.000 计算。

1. 若要半导体激光器发出的光能够全部射到球冠上, 则光源 S 离 A 的距离 x 应满足什么条件?
2. 如果 $R=1.8r$, 光源 S 与 A 的距离为 R , 入射与轴的夹角用 α 表示, 则 α 角分别为 $\alpha_1=30^\circ$ 、 $\alpha_2=25^\circ$ 和 $\alpha_3=20^\circ$ 的三根光线能否经过全反射在光纤中传播?

一、有一光导纤维, 光芯为折射率 $n = 1.500$ 的透明度极好的介质, 其截面半径为 r ; 光芯外面包层的折射率 $n' = 1.400$ 。有一半导体激光器 S , 位于光纤轴线的延长线上, 发出半角宽为 30° 的光束。为便于使此光束全部进入光纤, 在光纤端面处烧结了一个其材料与光芯相同、半径为 R 的球冠 QAQ' , 端面附近的结构如图所示 (包层未画出)。 S 可看作点光源, 光纤放在空气中, 空气的折射率 n_0 按 1.000 计算。



1. 若要半导体激光器发出的光能够全部射到球冠上, 则光源 S 离 A 的距离 x 应满足什么条件?

2. 如果 $R = 1.8r$, 光源 S 与 A 点的距离为 R , 入射线与轴的夹角用 α 表示, 则 α 角分别为 $\alpha_1 = 30^\circ$ 、 $\alpha_2 = 25^\circ$ 和 $\alpha_3 = 20^\circ$ 的三根光线能否经过全反射在光纤中传播?

二、(20 分)

试从相对论能量和动量的角度分析论证:

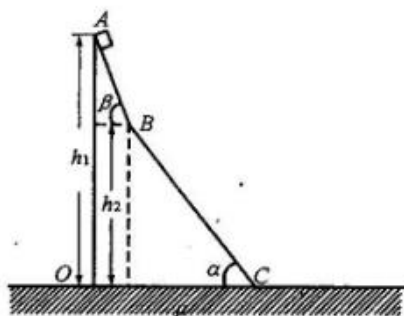
1. 一个光子与真空中处于静止状态的自由电子碰撞时, 光子的能量不可能完全被电子吸收。
2. 光子射到金属表面时, 其能量有可能完全被吸收被使电子逸出金属表面, 产生光电效应。

三、(25 分)

如图所示, 一质量 $M=30.0\text{kg}$ 的楔形木块 $OABC$ 静止在水平地面上, 其斜面段 AB 的倾角 $\beta=60^\circ$, BC 段的倾角 $\alpha=45^\circ$, AB 段与 BC 段连接处 (B 处) 为一非常短的光滑圆弧, 现将一质量的 $m=4.00\text{kg}$ 小物块 (可视为质点), 放在斜面上离地面高 $h_1=2.80\text{m}$ 的 A 处, 然后放手, 令小物块从静止开始斜面下滑。已知小物块与斜面之间无摩擦, 木块与地面间的最大静摩擦系数和滑动摩擦系数为 $\mu=6.00\times 10^{-2}$, B 处离桌面的高度 $h_2=2.00\text{m}$, 如果不计小物块经过处 B 时小物块及木块速度大小的改变, 求小物块从斜面上 A 处滑动到斜面底部 C 处整个过程中小物块对木块所做的功 (取重力加速度 $g=10.0\text{m/s}^2$)

三、如图所示,一质量 $M = 30.0 \text{ kg}$ 的楔形木块 $OABC$ 静止

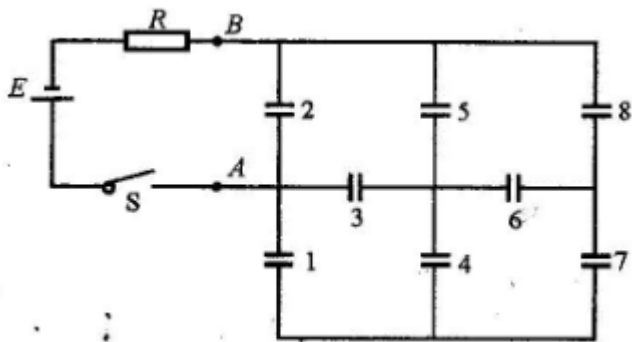
在水平地面上,其斜面 AB 段的倾角 $\beta = 60^\circ$, BC 段的倾角 $\alpha = 45^\circ$, AB 段与 BC 段连接处 (B 处) 为一非常短的光滑圆弧. 现将一质量为 $m = 4.00 \text{ kg}$ 的小物块(可视为质点),放在斜面上离地面



高为 $h_1 = 2.80 \text{ m}$ 的 A 处,然后放手,令小物块从静止开始沿斜面下滑. 已知小物块与斜面之间无摩擦,木块与地面间最大静摩擦因数和滑动摩擦因数皆为 $\mu = 6.00 \times 10^{-2}$, B 处离桌面高度 $h_2 = 2.00 \text{ m}$. 如果不计小物块经过 B 处时小物块及木块速度大小的改变,求小物块从斜面上 A 处滑动到斜面底部 C 处整个过程中小物块对木块所做的功.(取重力加速度 $g = 10.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)

四、(25 分)

由如图所示的电路,其中 E 为内阻可以忽略的电源的电动势, R 为电阻的阻值; S 为开关; A 、 B 右边是如图所示的 8 个完全相同的容量均为 C 的理想电容器组成的电路. 问从合上 S 到各电容器充电完毕,电阻 R 上发热消耗的能量是多少? (在解题时,要求在图上标出你所设定的各个电容器极板上电荷的正负)

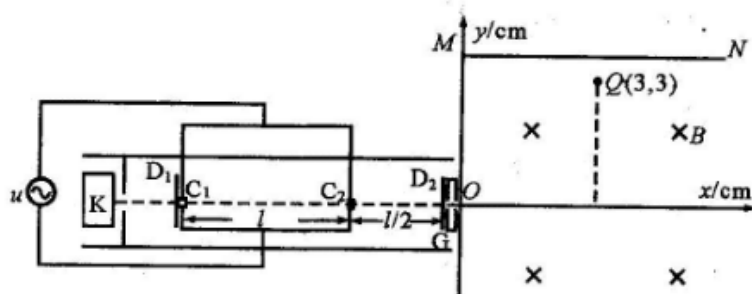


五、(25 分)

如图所示, K 为一带电粒子发生器, 从中可以不断地射出各种不同速率的带电粒子, 它们都带正电, 电量为 q , 质量为 m , 速度的方向都沿图中的虚线, D_1 、 D_2 为两块挡板, 可定时开启和关闭。 C_1 、 C_2 为两扇“门”, C_1 紧靠 D_1 , 两门之间的距离为 l , 两个门上都加上交变电压 $u = U_0 \sin(\frac{2\pi}{T} t)$, T 为交变电压的周期。

已知只有当上电压的值为零附近的无限短的时间内, 粒子才能通过该门。 G 为能量增减器, 它紧靠挡板 D_2 , 到门 C_2 的距离为 $l/2$ 。当带电粒子在 t 时刻通过 G 时, 粒子获得一定的能量 $\Delta E_t = E_0 \sin(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{4})$, 但速度的方向不变, 式中 $E_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times m \frac{p^2}{T^2}$ 。通过 G 的粒子从 O 点进入 G 右侧的匀强磁场区域, 磁场的磁感应强度大小为 B , 方向垂直面向里 (整个装置都放在真空中)。在磁场区建立以 O 作为原点的如图所示的直角坐标系 Oxy , MN 为磁场区域的边界, 它平行于 x 轴。现在 $t=0$ 时刻, 同时打开 D_1 与 D_2 , 让粒子进入 C_1 , 在 $t=3T/4$ 时刻, 关闭挡板 D_1 , 使粒子无法进入 C_1 , 在 $t=10T/4$ 时刻, 再关闭挡板 D_2 , 使粒子无法进入 G 。已知从 O 进入磁场中速度最大的粒子经过坐标为 $(3\text{cm}, 3\text{cm})$ 的 Q 点。问: 假如要使从 O 进入磁场中速度最小的粒子能经过 Q 点, 则应将磁场边界 MN 在平面内 Oxy 平移到什么位置。

五、如图所示, K 为一带电粒子发生器, 从中可以不断地射出各种不同速率的带电粒子, 它们都带正电, 电量为 q , 质量为 m , 速度的方向都沿图中的虚线。 D_1 、 D_2 为两块挡板, 可定时开启和关闭。 C_1 、 C_2 为两扇“门”, C_1 紧靠 D_1 , 两门之间的距离为 l , 两个门上都加上交变电压 $u = U_0 \sin(\frac{2\pi}{T} t)$, T 为交变电压的周期。已知只有当门上电压的值为零附近的无限短的时间内, 粒子才能通过该门。 G 为能量增减器, 它紧靠挡板 D_2 , 到门 C_2 的距离为 $l/2$ 。当带电粒子在 t 时刻通过 G 时, 粒子可获得一定的能量 $\Delta E_t = E_0 \sin(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{4})$, 但速度的方向不变, 式中 $E_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times m \frac{p^2}{T^2}$ 。通过 G 的粒子从 O 点进入 G 右侧的匀强磁场区域, 磁场的磁感应强度大小为 B , 方向垂直面向里 (整个装置都放在真空中)。在磁场区建立以 O 作为原点的如图所示的直角坐标系 Oxy , MN 为磁场区域的边界, 它平行于 x 轴。现在 $t=0$ 时刻, 同时打开 D_1 与 D_2 , 让粒子进入 C_1 , 在 $t=3T/4$ 时刻, 关闭挡板 D_1 , 使粒子无法进入 C_1 , 在 $t=10T/4$ 时刻, 再关闭挡板 D_2 , 使粒子无法进入 G 。已知从 O 进入磁场中速度最大的粒子经过坐标为 $(3\text{cm}, 3\text{cm})$ 的 Q 点。问: 假如要使从 O 进入磁场中速度最小的粒子能经过 Q 点, 则应将磁场边界 MN 在平面内 Oxy 平移到什么位置。



m , 速度的方向都沿图中的虚线。 D_1 、 D_2 为两块挡板, 可定时开启和关闭。 C_1 、 C_2 为两扇“门”, C_1 紧靠 D_1 , 两门之间的距离为 l , 两个门上都加上交变电压 $u = U_0 \sin(\frac{2\pi}{T} t)$, T 为交变电压的周期。已知只有当门上电压的值为零附近的无限短的时间内, 粒子才能通过该门。 G 为能量增减器, 它紧靠挡板 D_2 , 到门 C_2 的距离为 $l/2$ 。当带电粒子在 t 时刻通过 G 时, 粒子可获得一定的能量 $\Delta E_t = E_0 \sin(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{4})$, 但速度的方向不变, 式中 $E_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times$

$m \frac{l^2}{T^2}$. 通过 G 的粒子从 O 点进入 G 右侧的匀强磁场区域, 磁场的磁感应强度大小为 B , 方向垂直纸面向里 (整个装置都放在真空中). 在磁场区建立以 O 作为原点的如图所示的直角坐标系 Oxy , MN 为磁场区域的边界, 它平行于 x 轴. 现在 $t = 0$ 的时刻, 同时打开 D_1 与 D_2 , 让粒子进入 C_1 , 在 $t = 3T/4$ 时刻, 关闭挡板 D_1 , 使粒子无法进入 C_1 ; 在 $t = 10T/4$ 时刻, 再关闭挡板 D_2 , 使粒子无法进入 G. 已知从 O 进入磁场中速度最大的粒子经过坐标为 $(3 \text{ cm}, 3 \text{ cm})$ 的 Q 点. 问: 假如要使从 O 进入磁场中速度最小的粒子能经过 Q 点, 则应将磁场边界 MN 在 Oxy 平面内平移到什么位置.

六、如图, a、b、c、d 是位于光滑水平桌面上的四个小物块, 它



们的质量均为 m . a、b 间有一自然长度为 l , 劲度系数为 k_1 的弹簧联结; c、d 之间有一自然长度为 l , 劲度系数为 k_2 的弹簧联结. 四个物块的中心在同一直线上. 如果 b、c 发生碰撞, 碰撞是完全弹性的, 且碰撞时间极短. 开始时, 两个弹簧都处在自然长度状态, 物块 c、d 静止, 物块 a、b 以相同的速度 v_0 向右运动, 试定量论述

1. 若 $k_1 = k_2$, 四个物块相对于桌面怎样运动?
2. 若 $k_1 = 4k_2$, 四个物块相对于桌面怎样运动?

六、(25 分)

如图, a、b、c、d 是位于光滑水平桌面上的四个小物块, 它们的质量均为 m . a、b 间有一自然长度为 l , 劲度系数为 k_1 的弹簧联结; c、d 之间有一自然长度为 l , 劲度系数为 k_2 的弹簧联结. 四个物块的中心在同一直线上. 如果 b、c 发生碰撞, 碰撞是完全弹性的, 且碰撞时间极短. 开始时, 两个弹簧都处在自然长度状态, 物块 c、d 静止, 物块 a、b 以相同的速度 v_0 向右运动, 试定量论述

- (1) 若 $k_1 = k_2$, 四个物块相对于桌面怎样运动?
- (2) 若 $k_1 = 4k_2$, 四个物块相对于桌面怎样运动?

· 参考解答 ·

一、

1. 当发射光束刚好都能射到球面上时, 光束的边缘光线应与球面相切, 如图 1 所示, T 为切点, 由几何关系可知

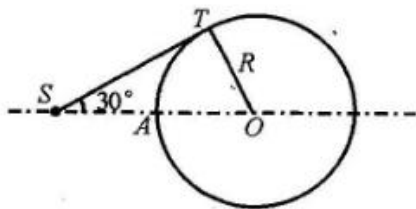


图 1

$$\sin 30^\circ = \frac{R}{SO}$$

由此求得

$$\overline{SA} = R$$

若光源与 A 的距离大于 R , 则有部分光线不能到达球面. 全

部光束能射到球冠上的条件是光源与 A 点的距离

$$x \leq R \quad (1)$$

2. $x = R$ 时与轴成 α 角的人射光线的光路图如图 2 所示, 图中 B 点位于轴上, 用虚线画出的 QBQ' 与 QAQ' 构成一个球面. θ 和 θ' 分别表示入射角和折射角. 设折射线与球面交于 P' 点, 用 β 表示 OP' 与轴之间的夹角, 用 α' 表示折射线与轴之间的夹角.

对 $\triangle OPS$, 由正弦定理可得

$$\frac{2R}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin \alpha} \quad (2)$$

由折射定律得

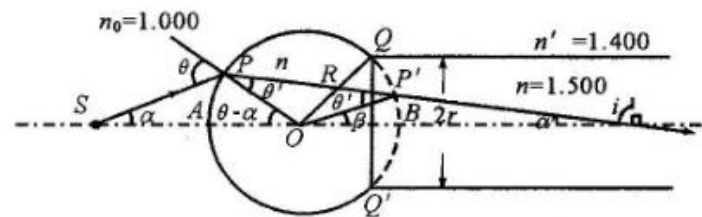


图 2

$$\sin \theta = 1.5 \sin \theta' \quad (3)$$

由几何关系得

$$\beta = 2\theta' - \theta + \alpha \quad (4)$$

$$\alpha' = \theta - \alpha - \theta' \quad (5)$$

如果折射线反向延长线与轴相交, 光路图如图 3 所示. 若对 α' 的正负号作出如下的规定: 折射线向靠近轴的方向偏折

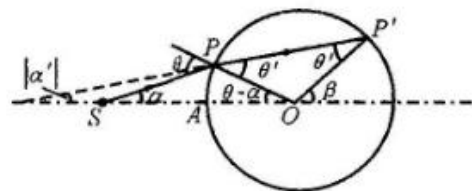


图 3

时, α' 取正值; 折射线向远离轴的方向偏折时 (即折射线反向延长线与轴的交点在 A 点的左侧), α' 取负值, 则 (5) 式仍成立.

此外, 由几何关系可知, 折射线能进入光纤的条件是

$$|\beta| \leq \angle QOB \quad (6)$$

β 可能为负值, 这表示 P' 在轴线以下.

而

$$\angle QOB = \arcsin \frac{r}{R}$$

代入数据,可知折射线能进入光纤的充要条件是

$$|\beta| \leq 33.75^\circ$$

下面分别讨论三条光线的情况.

(i) $\alpha_1 = 30^\circ$ 时

a. 此入射光线的折射线能否进入光纤?

由(2)式得 $\sin\theta_1 = 2\sin\alpha_1 = 1$, 得

$$\theta_1 = 90^\circ$$

代入(3)式得

$$\theta_1' = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) = 41.81^\circ$$

代入(4)式得

$$\beta_1 = 2\theta_1' - \theta_1 + \alpha_1 = 23.62^\circ \quad (7)$$

因为

$$\beta_1 < \angle QOB \quad (8)$$

故此折射线能进入光纤.

b. 此折射线能否在光芯包层的界面上发生全反射?

设光纤内光线射至光芯与包层界面时发生全反射的临界角为 i_c , 则

$$i_c = \arcsin\left(\frac{1.400}{1.500}\right) = 68.96^\circ \quad (9)$$

因为 $i = 90^\circ - \alpha'$, 所以当 α' 满足下面条件时折射线即能被全反射:

$$\alpha' \leq 90^\circ - 68.96^\circ = 21.04^\circ \quad (10)$$

现在 $\alpha_1' = \theta_1 - \alpha_1 - \theta_1' = 18.19^\circ$, 满足(10)式的要求. 故该光线能经过全反射在光纤中传播.

(ii) $\alpha_2 = 25^\circ$ 时

由(2)式得 $\sin\theta_2 = 2\sin\alpha_2 = 2\sin 25^\circ$ $\theta_2 = 57.70^\circ$

$$\sin\theta_2' = \frac{1}{1.5}\sin\theta_2 \quad \theta_2' = 34.30^\circ$$

$$\beta_2 = 2\theta_2' - \theta_2 + \alpha_2 = 35.90^\circ \quad (11)$$

由(6)式可知, 该折射线不能进入 QQ' 右面的光纤.

(iii) $\alpha_3 = 20^\circ$ 时

由(2)式得 $\sin\theta_3 = 2\sin\alpha_3 = 2\sin 20^\circ$ $\theta_3 = 43.16^\circ$

$$\sin\theta_3' = \frac{1}{1.5}\sin\theta_3 \quad \theta_3' = 27.13^\circ$$

$$\beta_3 = 2\theta_3' - \theta_3 + \alpha_3 = 31.10^\circ \quad (12)$$

由(6)式可知, 此折射线能进入 QQ' 右面的光纤.

此时

$$\alpha_3' = \theta_3 - \alpha_3 + \theta_3' = -3.97^\circ \quad (13)$$

负号表示折射线的延长线与轴相交于 A 点的左方, 它射至光纤的上半部的界面下, 如图4所示, $|\alpha_3'| < 21.04^\circ$, 所以此光线可以经过全反射在光纤中传播.

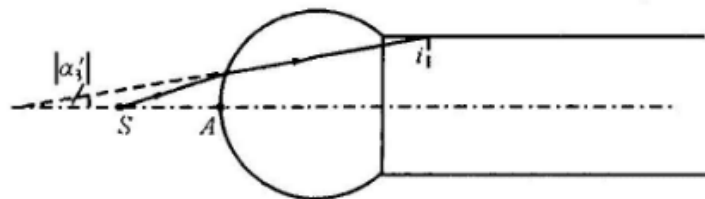


图4

二、

1. 设电子处于静止状态时的质量为 m_0 , 光子的频率为 ν , 假定电子能完全吸收光子的能量, 吸收光子后, 电子以速度 v 运动, 则这一过程应遵循动量守恒定律, 有

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (1)$$

碰撞后系统的总能量为

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (2)$$

由(1)、(2)式消去 v , 得

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 \nu^2} \quad (3)$$

碰撞前电子与光子的总能量为

$$E_0 = h\nu + m_0 c^2 \quad (4)$$

由(3)、(4)式

$$\begin{aligned} E^2 - E_0^2 &= (m_0^2 c^4 + h^2 \nu^2) - (h\nu + m_0 c^2)^2 = \\ &= -2h\nu m_0 c^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

这表明, 所假设的过程不符合能量守恒定律, 因此这一过程实际上不可能发生。

2. 束缚在金属中的电子和射入金属的光子二者构成的系统在发生光电效应的过程中动量不守恒, 只需考虑能量转换问题。

设电子摆脱金属的束缚而逸出, 需要对它做功至少为 W (逸出功), 逸出金属表面后电子的速度为 v , 入射光子的能量为 $h\nu$, 电

子的静止质量为 m_0 , 若能产生光电效应, 则有

$$h\nu \geq \left[\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - m_0 c^2 \right] + W \quad (6)$$

逸出电子的速度 v 一般都比光速小很多, 故有

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \quad (7)$$

忽略高阶小量, 只取(7)式中的前两项, 代入(6)式, 可得到

$$h\nu \geq \frac{1}{2} m_0 v^2 + W \quad (8)$$

可见, 只要 $h\nu \geq W$, (8)式就能成立, 光电效应就能产生。

三、为方便起见, 我们先考虑

小物块在斜面 BC 段上的运动,

取 Oxy 坐标如图所示, 令 a_x 、 a_y

分别表示小物块沿 x 方向和 y 方

向加速度的大小, N 和 R 分别表

示小物块与木块之间和木块与桌

面之间的正压力的大小, a_M 表示

木块的加速度的大小, 小物块的运动方程为

$$ma_x = N \sin \alpha \quad (1)$$

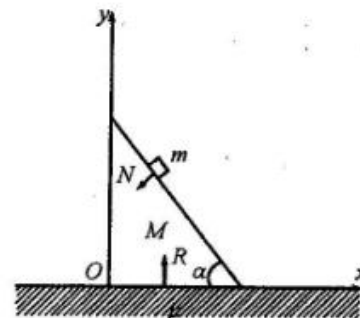
$$ma_y = mg - N \cos \alpha \quad (2)$$

木块的运动方程

$$Ma_M = N \sin \alpha - \mu R \quad (3)$$

$$R = N \cos \alpha + Mg \quad (4)$$

小物块约束在斜面上运动, 有方程



$$\frac{a_x + a_M}{a_y} = \cot \alpha \quad (5)$$

由以上各式解得

$$N = \frac{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) mg}{1 + (m/M) \sin^2 \alpha - \mu (m/M) \sin \alpha \cos \alpha} \quad (6)$$

此式对 AB 段同样成立, 只需将 α 换成 β 即可. 现在我们必须来判别木块能否运动, 判别的根据是方程(3). 若木块运动, 则由(3)式和(4)式应有

$$a_M = \frac{1}{M} (N \sin \alpha - \mu N \cos \alpha - \mu Mg) > 0 \quad (7)$$

否则木块不动, 小物块只做在静止的木块上的下滑运动.

当小物块在 BC 段上运动时, $\alpha = 45^\circ$, 由(6)、(7)两式, 代入有关数据得

$$N = 28.2 \text{ N} \quad (8)$$

$$a_M = 2.50 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} > 0 \quad (9)$$

当小物块在 AB 段上运动时, 上面(6)、(7)两式应用 $\beta = 60^\circ$ 代替 $\alpha = 45^\circ$, 用 N' 代替 N , 用 a_M' 代替 a_M , 由(6)、(7)两式, 代入有关数据得

$$N' = 20.1 \text{ N} \quad (8')$$

$$a_M' = -3.90 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} < 0 \quad (9')$$

以上结果说明, 小物块从 A 到 B 的过程中, 木块没有移动; 从 B 到 C 的过程中, 木块是运动的. 所以, 小物块对木块做的功为

$$W = N \sin \alpha \cdot s \quad (10)$$

s 为木块移动的距离,

$$s = \frac{1}{2} a_M t^2 \quad (11)$$

t 可以从小物块自 B 点到 C 点沿竖直方向的运动过程中求得, 由(2)式及(8)式

$$a_y = g - \frac{N}{m} \cos \alpha = 5.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

由运动学公式

$$h_2 = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \quad (12)$$

v_{0y} 为小物块在刚过 B 点时的速度 v_0 沿竖直方向的分量, v_0 可从能量守恒求得, 即

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mg(h_1 - h_2) \quad (13)$$

$$\text{所以 } v_0 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{0y} = v_0 \cos \alpha \quad (14)$$

将(14)式代入(12)式, 解得

$$t = \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2a_y h_2}}{a_y}$$

取正号, 并代入数据, 得

$$t = 0.492 \text{ s}$$

代入(11)式, 并注意到(9)式得

$$s = \frac{1}{2} a_M t^2 = 3.01 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (15)$$

代入(10)式, 得

$$W = N \cdot \sin \alpha \cdot s = 6.00 \times 10^{-2} \text{ J} \quad (16)$$

四、

A、B 右边 8 个电容器组成的电路(图 1) 可视为一个等效电容 C_{AB} , 整个电路可简化为图 2. 下面首先计算等效电容 C_{AB} .

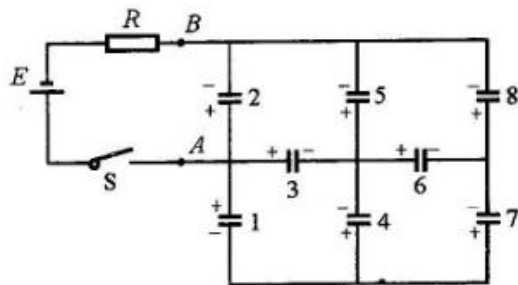


图 1

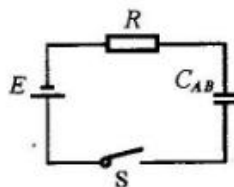


图 2

设合上 S 到充电完毕的过程中, 从 A、B 两点充入 A、B 右边电路的电量为 Q , A 正 B 负. 设第 i 个电容器所充的电量为 q_i , 各电容器极板上电荷的正负如图 1 所示.

根据各节点的电荷守恒可列出下列 4 个独立方程:

$$q_1 + q_2 + q_3 = Q \quad (1)$$

$$-q_1 + q_4 + q_7 = 0 \quad (2)$$

$$-q_3 - q_4 + q_5 + q_6 = 0 \quad (3)$$

$$-q_6 - q_7 + q_8 = 0 \quad (4)$$

下面再列出回路电压方程, 例如 $\frac{q_1}{C} + \frac{q_4}{C} - \frac{q_3}{C} = 0$ 等等, 得

$$q_1 + q_4 - q_3 = 0 \quad (5)$$

$$q_4 + q_6 - q_7 = 0 \quad (6)$$

$$q_2 - q_3 - q_5 = 0 \quad (7)$$

$$q_5 - q_6 - q_8 = 0 \quad (8)$$

因电容 2 两端的电压与等效电容 C_{AB} 两端的电压都等于 E , 故有

$$E = \frac{q_2}{C} \quad (9)$$

$$E = \frac{Q}{C_{AB}} \quad (10)$$

由方程(1) ~ (8), 可解得

$$q_2 = \frac{8}{15}Q \quad (11)$$

由(9)、(10)、(11) 式, 得

$$C_{AB} = \frac{15}{8}C \quad (12)$$

因在图 2 的电路中, 在整个充电的过程中通过电路的电量为 Q , 故电源对外所做的功为

$$W_0 = EQ \quad (13)$$

等效电容器中的贮能

$$W_1 = \frac{1}{2}QE \quad (14)$$

根据能量守恒定律, 电阻发热消耗的能量

$$W_2 = W_0 - W_1 \quad (15)$$

由以上有关各式,得

$$W_2 = \frac{15}{16} E^2 C \quad (16)$$

五、

1. 讨论进入磁场区域的粒子的速度

在 $t = 0$ 的时刻打开 D_1 , 由 $u = U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ 可知, 此时 C_1 的电压 $u = 0$, 各种不同速率的粒子都能通过 C_1 . 如果通过 C_1 的粒子到达 C_2 的时刻为 $t = T/2$ 或 $T/2$ 的整数倍, 则此时 C_2 的电压恰好为零, 这些粒子又能通过 C_2 , 故通过 C_1 的粒子若能通过 C_2 ,

其速度 v_n 应满足条件

$$\frac{l}{v_n} = n \frac{T}{2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

由此可得在 $t = 0$ 时刻通过 C_1 后又能通过 C_2 的这些粒子的速度

$$v_n = \frac{2l}{nT} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

速度为 v_n 的粒子由 C_1 到 C_2 经历时间

$$\Delta t_{n1} = \frac{1}{2} nT \quad (3)$$

由 C_2 到 G 经历的时间

$$\Delta t_{n2} = \frac{l}{2v_n} \quad (4)$$

由此可得粒子到 G 的时刻

$$t_n = \Delta t_{n1} + \Delta t_{n2} = \frac{3}{4} nT \quad (5)$$

因为当 $t = 10T/4$ 时, D_2 关闭, 故只有当

$$t_n \leq \frac{10}{4} T \quad (6)$$

粒子才能通过 G 并进入磁场区域, 根据(5)、(6)式, 注意到 n 为整数, 可知 n 的最大值为

$$n_{\max} = 3 \quad (7)$$

这些粒子进入磁场时的能量为

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 + E_0 \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(\frac{3n}{4}T\right) + \frac{\pi}{4}\right] \quad (8)$$

$$n = 1, 2, 3$$

这些粒子的能量分别为

$$E_1 = \frac{7}{4} \frac{ml^2}{T^2} \quad E_2 = \frac{1}{4} \frac{ml^2}{T^2} \quad E_3 = \frac{17}{36} \frac{ml^2}{T^2} \quad (9)$$

在 $t = T/2$ 时刻 C_1 的电压 $u = 0$, 各种不同速率的粒子又能通过 C_1 . 对速率 v_n' 满足条件

$$\frac{l}{v_n'} = \frac{n}{2} T \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

的粒子又能通过 C_2 . 这些粒子的速率为

$$v_n' = \frac{2l}{nT} \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

由 C_1 到 C_2 经历的时间和由 C_2 到 G 经历的时间分别为

$$\Delta t_{n1}' = \frac{n}{2} T \quad \Delta t_{n2}' = \frac{n}{4} T \quad (12)$$

到达 G 的时刻

$$t_n' = \frac{T}{2} + \Delta t_{n1}' + \Delta t_{n2}' = \frac{3n+2}{4} T \quad (13)$$

因为在 $t = 10T/4$ 时 D_2 关闭, 故有

$$t_n' \leq \frac{10}{4} T \quad (14)$$

由 (13) 和 (14) 式, 注意到 n 为整数, 得

$$n_{\max} = 2 \quad (15)$$

这些粒子进入磁场时具有的能量为

$$E_n' = \frac{1}{2} m v_2'^2 + E_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T} \frac{3n+2}{4} \right) T + \frac{\pi}{4} \right] \quad n = 1, 2 \quad (16)$$

进入磁场的粒子的能量分别为

$$E_1' = \frac{9}{4} \frac{ml^2}{T^2} \quad E_2' = \frac{3}{4} \frac{ml^2}{T^2} \quad (17)$$

由于在 $t = 3T/4$ 时 D_1 已关闭, 以后无粒子再能进入 C_1 . 由 (9)、(17) 式可知, 进入磁场的粒子的能量的最大值为 E_1' , 对应的速度 V_1' 最大, 由 $E_1' = \frac{1}{2} M V_1'^2$, 得

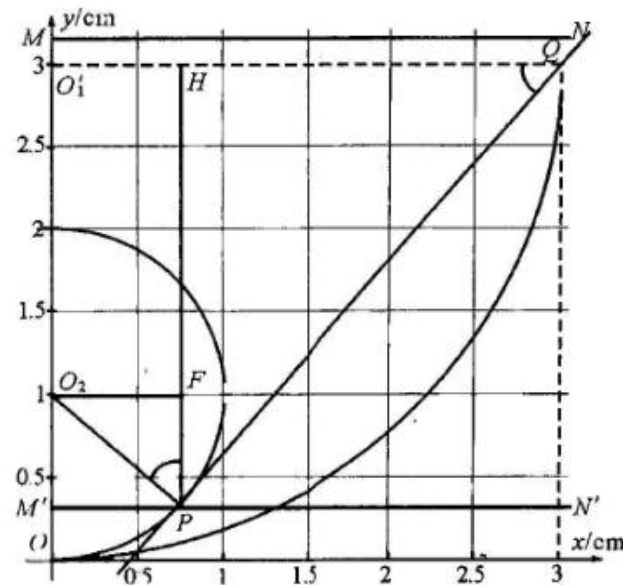
$$V_1' = \sqrt{\frac{9}{2}} \frac{l}{T} \quad (18)$$

进入磁场的粒子的能量的最小值为 E_2 , 对应的速度 V_2 最小, 同理得

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{l}{T} \quad (19)$$

2. 确定磁场边界

如图所示, 在磁场区建立的直角坐标系中, 已知从 O 进入



磁场速度最大的粒子经过坐标为(3 cm, 3 cm)的 Q 点, 由(18)、(19)式知: 进入磁场的粒子最大的速度 V_1' 是最小的速度 V_2 的3倍, 此两粒子进入磁场后它们的圆轨迹半径 R_1' 和 R_2 , 有关系

$$R_1' = 3R_2$$

因速度为 V_1' 的粒子的圆轨道过坐标原点 O , 且与 x 轴相切, 又过 Q 点, 由此可求得

$$R_1' = 3 \text{ cm}$$

其圆心 O_1' 的坐标为(0 cm, 3 cm), 故知速度最小粒子的圆轨道半径

$$R_2 = 1 \text{ cm}$$

O_2 应在坐标为(0 cm, 1 cm)处, 其轨道圆方程为

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad (20)$$

过 Q 点作此圆的切线, 设切点 P 的坐标为 (x_P, y_P) , 若此粒子在 P 点以速度 V_2 进入无磁场区域, 则它将沿直线 PQ 到达 Q 点. P 点一定在磁场区域的边界上.

现在求 P 点的坐标. 因 O_2P 垂直于 PQ , 由 P 点作 $O_1'Q$ 的垂线交于 H 点, 由 O_2 点作 PH 的垂线交于 F 点. $\triangle O_2PF$ 与 $\triangle PQH$ 相似, 因而有

$$\frac{\overline{O_2F}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{HQ}} \quad (21)$$

即

$$\frac{x_P}{(1 - y_P)} = \frac{(3 - y_P)}{(3 - x_P)} \quad (22)$$

得

$$x_P^2 + y_P^2 - 4y_P = 3x_P - 3$$

经配方得

$$x_P^2 + (y_P - 1)^2 - 2y_P - 1 = 3x_P - 3$$

因 P 点坐标 (x_P, y_P) 是满足(20)式, 故得

$$-2y_P = 3x_P - 3$$

$$y_P = \frac{3}{2}(1 - x_P) \quad (23)$$

代入(20)式, 可求得 P 点的 y 坐标为

$$y_P = 0.354 \text{ cm} \quad (24)$$

因此, 只要将磁场的区域边界 MN 平行下移到过 P 点, 即图中的 $M'N'$, 速度 V_2 的粒子在 P 点穿出磁场, 它将沿轨迹圆的切线方向到达 Q 点.

六、

在 a 、 b 两物块向右运动的过程中, b 与 c 第一次相遇并发生碰撞, 在碰撞的极短时间内, 两根弹簧的长度都来不及发生变化, 处在原长度状态, 故 a 、 d 的运动未变化. 由于 b 、 c 质量相等, 碰撞是完全弹性的, 故刚碰撞后, b 的速度为零, c 的速度为 v_0 , 方向向右. 碰撞刚碰完时, a 的速度为 v_0 , 方向向右, b 的速度为零. a 与 b 构成的系统的质心 M_1 (位于弹簧的中点处) 的速度为 $v_0/2$, 方向向右; c 的速度为 v_0 , 方向向右, d 的速度为零. c 与 d 构成的系统的质心 M_2 (位于弹簧的中点处) 的速度为 $v_0/2$, 方向亦向右.

以 M_1 为坐标原点, 建立跟随质心一起以 $v_0/2$ 的速度向右运动的坐标系, 其 X' 轴与四物块中心的连线相重合 (称此坐标系为质心坐标系), 以 b 与 c 发生第一次碰撞的时刻作为时间的

起点($t = 0$), 则在此质心坐标系中, 连结 a、b 的弹簧的中点是固定不动的, a、b 构成的系统可以看作是两个“弹簧一端固定, 弹簧的自然长度为 $l/2$, 劲度系数为 $2k_1$ 的弹簧振子”, 同样, c、d 构成的系统亦可看成两个弹簧振子, 弹簧的自然长度均为 $l/2$, 劲度系数均为 $2k_2$.

若以 x_a' 、 x_b' 、 x_c' 、 x_d' 分别代表 a、b、c、d 各物块离开各自平衡位置的位移, 则有

$$x_a' = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_b' = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_2)$$

式中 $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k_1}{m}}$

A_1 、 φ_1 、 φ_2 为待定常量.

$$x_c' = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_3)$$

$$x_d' = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_4)$$

式中 $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_2}{m}}$

A_2 、 φ_3 、 φ_4 为待定常量.

在 $t = 0$ 时刻, 相对质心坐标系有

$$x_{a0}' = 0 \quad v_{a0}' = \frac{v_0}{2}$$

$$x_{b0}' = 0 \quad v_{b0}' = -\frac{v_0}{2}$$

$$x_{c0}' = 0 \quad v_{c0}' = \frac{v_0}{2}$$

$$x_{d0}' = 0 \quad v_{d0}' = -\frac{v_0}{2}$$

此为初始条件.

利用参考圆方法, 可求得四个小物块相对质心坐标系的速度分别为

$$v_a' = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$v_b' = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_2)$$

$$v_c' = -A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_3)$$

$$v_d' = -A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_4)$$

由位移、速度的表示式和初始条件可求得

$$A_1 = \frac{v_0}{2\omega_1} \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$A_2 = \frac{v_0}{2\omega_2} \quad \varphi_3 = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi_4 = \frac{\pi}{2}$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned} x_a' &= \frac{v_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \\ x_b' &= -\frac{v_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \\ x_c' &= \frac{v_0}{2\omega_2} \sin \omega_2 t \\ x_d' &= -\frac{v_0}{2\omega_2} \sin \omega_2 t \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} v_a' &= \frac{v_0}{2} \cos \omega_1 t \\ v_b' &= -\frac{v_0}{2} \cos \omega_1 t \\ v_c' &= \frac{v_0}{2} \cos \omega_2 t \\ v_d' &= -\frac{v_0}{2} \cos \omega_2 t \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

四物块在质心坐标系中的坐标分别为

$$\left. \begin{aligned} X_a' &= -\frac{l}{2} + \frac{v_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \\ X_b' &= \frac{l}{2} - \frac{v_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \\ X_c' &= \frac{l}{2} + \frac{v_0}{2\omega_2} \sin \omega_2 t \\ X_d' &= \frac{3l}{2} - \frac{v_0}{2\omega_2} \sin \omega_2 t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

建立相对桌面静止的坐标系,其原点与第一次碰撞刚碰完时 ab 系统的质心 M_1 重合, X 轴与 X' 轴重合,则相对桌面坐标系,四物块的坐标分别为

$$\left. \begin{aligned} X_a &= \frac{1}{2} v_0 t + \frac{v_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t - \frac{l}{2} \\ X_b &= \frac{1}{2} v_0 t - \frac{v_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{l}{2} \\ X_c &= \frac{1}{2} v_0 t + \frac{v_0}{2\omega_2} \sin \omega_2 t + \frac{l}{2} \\ X_d &= \frac{1}{2} v_0 t - \frac{v_0}{2\omega_2} \sin \omega_2 t + \frac{3l}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

相对桌面坐标系,各物块的速度

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} \cos \omega_1 t \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} \cos \omega_1 t \\ v_c &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} \cos \omega_2 t \\ v_d &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} \cos \omega_2 t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

1. $k_1 = k_2$ 时

设两个弹簧的劲度系数都是 k ,则有

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \omega_0 \quad (6)$$

第一次碰撞后 a, b, c, d 相对桌面坐标系的位置和速度可由(4)式与(5)式求得

$$\left. \begin{aligned} X_a &= \frac{1}{2} v_0 t + \frac{v_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{l}{2} \\ X_b &= \frac{1}{2} v_0 t - \frac{v_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{l}{2} \\ X_c &= \frac{1}{2} v_0 t + \frac{v_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{l}{2} \\ X_d &= \frac{1}{2} v_0 t - \frac{v_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{3l}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} \cos \omega_0 t \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} \cos \omega_0 t \\ v_c &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} \cos \omega_0 t \\ v_d &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} \cos \omega_0 t \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

如果在以后的运动中, b、c 又可能相遇, 即第二次相遇, 则应有

$$X_b = X_c$$

由(7)式, 得

$$\sin \omega_0 t = 0 \quad (9)$$

t 不等于零的最小正数解满足

$$\omega_0 t = \pi \quad (10)$$

b、c 相遇时相对质心系的速度由(2)式、(9)式得

$$v_b'(\text{遇}) = \frac{v_0}{2}$$

$$v_c'(\text{遇}) = -\frac{v_0}{2}$$

b、c 相遇时, b 的速度向右, c 的速度向左, b、c 发生第二次碰撞, 刚碰后速度交换, 有

$$v_b'(\text{后}) = -\frac{v_0}{2}$$

$$v_c'(\text{后}) = \frac{v_0}{2}$$

b、c 第二次相遇时, a、b、c、d 四物块离开各自平衡位置的位移可由(10)式及(1)式求出, 即

$$x_a' = 0$$

$$x_b' = 0$$

$$x_c' = 0$$

$$x_d' = 0$$

表示弹簧都处于自然状态, 无形变.

第二次碰撞刚碰完时, a、b、c、d 相对桌面坐标系的速度

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = 0 \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = 0 \\ v_c &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} = v_0 \\ v_d &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} = v_0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

即第二次碰撞刚碰完时, a、b 速度为零, 弹簧处在自然状态, 故以后 a、b 静止在各自的平衡位置; c、d 亦处在各自的平衡位置, 并以相同的速度 v_0 向右运动, 以后一直匀速运动下去, 不再振动, 也不会再发生碰撞.

2. $k_1 = 4k_2$ 时

因 $k_1 = 4k_2$, 故有

$$\omega_1 = 2\omega_2 = \sqrt{\frac{2k_1}{m}} = \sqrt{\frac{8k_2}{m}} \quad (12)$$

第一次碰撞后, a、b、c、d 相对桌面坐标系的位置和速度由(4)式和(5)式可求得

$$\left. \begin{aligned} X_a &= \frac{1}{2}v_0t + \frac{v_0}{2\omega_1}\sin\omega_1t - \frac{l}{2} \\ X_b &= \frac{1}{2}v_0t - \frac{v_0}{2\omega_1}\sin\omega_1t + \frac{l}{2} \\ X_c &= \frac{1}{2}v_0t + \frac{v_0}{\omega_1}\sin\frac{\omega_1t}{2} + \frac{l}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} X_d &= \frac{1}{2}v_0t - \frac{v_0}{\omega_1}\sin\frac{\omega_1t}{2} + \frac{3l}{2} \\ v_a &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2}\cos\omega_1t \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2}\cos\omega_1t \\ v_c &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2}\cos\frac{\omega_1t}{2} \\ v_d &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2}\cos\frac{\omega_1t}{2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

如果在以后的运动过程中 b 与 c 会相遇, 则有

$$X_b = X_c$$

由(13)式有

$$-\frac{1}{2}\sin\omega_1t = \sin\left(\frac{\omega_1t}{2}\right)$$

因 $\omega_1 = 2\omega_2$, 得

$$\sin\omega_2t(\cos\omega_2t + 1) = 0 \quad (15)$$

其解为

$$\omega_2t = n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16)$$

其中使 t 为异于零的最小正数解满足

$$\omega_2t = \pi \quad (17)$$

及

$$\omega_1t = 2\pi \quad (18)$$

b、c 相遇时相对质心系的速度由(2)式及(16)式得

$$v_b'(\text{遇}) = -\frac{v_0}{2}$$

$$v_c'(\text{遇}) = -\frac{v_0}{2}$$

因 b、c 相遇时,速度的大小相等,方向都向左,表明 b、c 相遇而不发生碰撞,即无第二次碰撞.由(17)、(18)式及(1)式可求得 b、c 第二次相遇时,四物块相对各自平衡位置的位移

$$x_a' = 0$$

$$x_b' = 0$$

$$x_c' = 0$$

$$x_d' = 0$$

即两个弹簧都处在自然长度.这时四个物块相对于桌面参考系的速度分别为

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} = v_0 \\ v_b &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = 0 \\ v_c &= \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{2} = 0 \\ v_d &= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2} = v_0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由于在此时 a 向右运动,而 b 静止,故弹簧将被压缩, b 加速, a 减速;由于 c 静止, d 运动,故弹簧将被拉长, c 加速, d 减速;弹簧振子又开始振动.

由(16)式,当

$$\omega_2 t = 2\pi$$

$$\omega_1 t = 4\pi$$

b、c 两木块又相遇,由(2)式可求得相遇时, b、c 相对质心坐标系的速度为

$$v_b'(\text{遇}) = -\frac{v_0}{2}$$

$$v_c'(\text{遇}) = \frac{v_0}{2}$$

因相遇时, b 向左运动, c 向右运动,速度大小相等,故 b、c 相遇而不发生碰撞.此时四物块相对于桌面坐标系的速度为

$$\left. \begin{aligned} v_a &= v_0 \\ v_b &= 0 \\ v_c &= v_0 \\ v_d &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

在随后的时间里, a、b 构成的系统的质心 M_1 以速度 $\frac{1}{2}v_0$ 向右做匀速直线运动, a、b 相对于 M_1 做简谐振动,振动的圆频率 ω_1 . c、d 构成的系统的质心 M_2 亦以速度 $\frac{1}{2}v_0$ 向右做匀速直线运动, c、d 相对于 M_2 做简谐振动,振动的圆频率 ω_2 . b、c 两物块每隔 $\frac{\pi}{\omega_2}$ 的一段时间相遇一次,但都是上述两种情况之一,只相遇而不碰撞.

