



香港資優教育學苑
The Hong Kong Academy for Gifted Education

International Mathematical Olympiad
Preliminary Selection Contest — Hong Kong 2025

國際數學奧林匹克 — 香港選拔賽初賽 2025

17 May 2025 (Saturday)
2025 年 5 月 17 日 (星期六)

Question Book
問題簿

Instructions to Contestants:

考生須知：

1. The contest comprises a 3-hour written test.
比賽以筆試形式進行，限時三小時。
2. Questions are bilingual. Answer all questions.
題目中英對照。全卷題目均須作答。
3. Put your answers on the answer sheet.
請將答案寫在答題紙上。
4. The use of calculators and protractors is NOT allowed.
不可使用計算機和量角器。
5. Rulers and compasses can be used.
可使用直尺和圓規。

Co-organised by The Hong Kong Academy for Gifted Education,
the Gifted Education Section of the Education Bureau and
International Mathematical Olympiad Hong Kong Committee

香港資優教育學苑、教育局資優教育組及國際數學奧林匹克香港委員會合辦

Questions 1 to 10 carries 1 mark each.

第 1 至第 10 題，每題 1 分。

1. Let n be a nine-digit positive integer whose product of digits is equal to $10!$. Find the greatest possible value of n .

設 n 為九位正整數，其數字之積等於 $10!$ 。求 n 的最大可能值。

2. Find the smallest positive integer n such that the first four digits of n^2 (from left to right) are 2, 0, 2, 5 while the fifth digit of n^2 is non-zero.

求最小的正整數 n ，使得 n^2 的首四位數字（從左至右）為 2、0、2、5，且 n^2 的第五位數字非零。

3. Let m and n be positive integers where $m > n$. If $m = (m - n)^2$ and n is equal to 25 times the H.C.F. of m and n , find the L.C.M. of m and n .

設 m 和 n 為正整數，其中 $m > n$ 。若 $m = (m - n)^2$ ，且 n 等於 m 和 n 的最大公因數的 25 倍，求 m 和 n 的最小公倍數。

4. Find a negative number x such that $(x^2 - 2\sqrt{3}x)(x^2 - 3) = 2016$.

求一個負數 x ，使得 $(x^2 - 2\sqrt{3}x)(x^2 - 3) = 2016$ 。

5. In $\triangle ABC$, $BC = 1$ and $\angle ACB = 90^\circ$. If the median of the triangle through A , the internal angle bisector of $\angle ABC$ and the altitude of the triangle from C are concurrent, find AC .

在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 1$ ，且 $\angle ACB = 90^\circ$ 。若三角形過 A 的中線、 $\angle ABC$ 的內角平分線和三角形過 C 的高共點，求 AC 。

6. How many triples (a, b, c) of positive integers are there such that a is a factor of both b and c , and that $a + b + c = 300$?

有多少組正整數 (a, b, c) 可使得 a 同時是 b 和 c 的因數，且 $a + b + c = 300$ ？

7. In $\triangle ABC$, $AB = AC$. M is the mid-point of BC and D is a point on segment AM such that $AD = 10$ and $DM = 1$. If $\angle BDM = 3\angle BAM$, find the perimeter of $\triangle ABC$.

在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ 。 M 是 BC 的中點，且 D 是線段 AM 上的一點，使得 $AD = 10$ 和 $DM = 1$ 。若 $\angle BDM = 3\angle BAM$ ，求 $\triangle ABC$ 的周界。

8. In $\triangle ABC$, $\angle BAC = 12^\circ$ and $\angle ACB = 18^\circ$. D is a point on segment AC such that $\angle ADB = 96^\circ$, while E is a point on the extension of BD such that $AC = BE$. Find $\angle DEC$.

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 12^\circ$ ，且 $\angle ACB = 18^\circ$ 。 D 是線段 AC 上的一點，使得 $\angle ADB = 96^\circ$ ，而 E 則是 BD 延線上的一點，使得 $AC = BE$ 。求 $\angle DEC$ 。

9. In a game, m red balls and n blue balls are put into a bag, where $m + n \leq 2025$. Sam and Devin each draws a ball from the bag at the same time. Sam wins if the two balls drawn are of the same colour; Devin wins if the two balls drawn are of different colours. If Sam and Devin have equal chance to win, find the greatest possible value of m .

在一個遊戲中， m 個紅球和 n 個藍球被放進袋子中，其中 $m + n \leq 2025$ 。小彤和小懿同時從袋中抽出一個球。若抽出來的兩個球顏色相同，則小彤勝出遊戲；若抽出來的兩個球顏色相異，則小懿勝出遊戲。若兩人勝出的機會均等，求 m 的最大可能值。

10. Let a, b, c be pairwise distinct two-digit positive integers, and $x = a + b, y = b + c, z = c + a$. Percy computed the sum of digits of each of a, b, c , and denotes the smallest sum by P . Queenie computed the sum of digits of each of x, y, z , and denotes the largest sum by Q . Find the greatest possible value of $\frac{P}{Q}$.

設 a, b, c 為互不相同的兩位正整數，且 $x = a + b, y = b + c, z = c + a$ 。小萍計算了 a, b, c 各自的數字之和，並把當中最小的一個記為 P 。小翹計算了 x, y, z 各自的數字之和，並把當中最大的一個記為 Q 。求 $\frac{P}{Q}$ 的最大可能值。

Questions 11 to 20 carries 2 marks each.

第 11 至第 20 題，每題 2 分。

11. In $\triangle ABC$, $\angle ACB = 103^\circ$. X and Y are points on segment AB (with X between A and Y) so that the perimeter of $\triangle CXY$ is equal to the length of AB . If the circumcentre of $\triangle ACY$ lies on the circumcircle of $\triangle XCY$, find $\angle XCY$.

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 103^\circ$ 。 X 和 Y 是線段 AB 上的點（其中 X 位於 A 和 Y 之間），使得 $\triangle CXY$ 的周界等於 AB 的長度。若 $\triangle ACY$ 的外心位於 $\triangle XCY$ 的外接圓上，求 $\angle XCY$ 。

12. Let $P(1, 3)$ and $Q(5, 11)$ be two points on the coordinate plane. In a game, a frog is initially at $(-7, 1)$. There are four buttons, pressing which will cause the frog to jump to other positions. If the current position of the frog is X ,

- pressing button $\mathcal{A}$ causes it to jump to Y such that X is the mid-point of PY ;
- pressing button $\mathcal{B}$ causes it to jump to Y such that Y is the mid-point of PX ;
- pressing button $\mathcal{C}$ causes it to jump to Y such that X is the mid-point of QY ;
- pressing button $\mathcal{D}$ causes it to jump to Y such that Y is the mid-point of QX .

After pressing a series of buttons, the player found that button $\mathcal{A}$ has been pressed by the same number of times as button $\mathcal{B}$, and that button $\mathcal{C}$ has been pressed by the same number of times as button $\mathcal{D}$. If the final position of the frog is at a distance of s from the origin, find the smallest possible value of s .

設 $P(1, 3)$ 和 $Q(5, 11)$ 為坐標平面上的兩點。在一個遊戲中，一隻青蛙最初位於 $(-7, 1)$ 。現有四個按鈕，按下它們會使青蛙跳到其他位置。如果青蛙當前位置為 X ，則

- 按下按鈕 $\mathcal{A}$ 會使牠跳到 Y ，使得 X 是 PY 的中點；
- 按下按鈕 $\mathcal{B}$ 會使牠跳到 Y ，使得 Y 是 PX 的中點；
- 按下按鈕 $\mathcal{C}$ 會使牠跳到 Y ，使得 X 是 QY 的中點；
- 按下按鈕 $\mathcal{D}$ 會使牠跳到 Y ，使得 Y 是 QX 的中點。

在按下一系列按鈕後，玩家發現他按下按鈕 $\mathcal{A}$ 和按鈕 $\mathcal{B}$ 的次數相同，按下按鈕 $\mathcal{C}$ 和按鈕 $\mathcal{D}$ 的次數亦相同。如果青蛙的最終位置與原點的距離為 s ，求 s 的最小可能值。

13. The sequence 4, 13, 22, 31, ... lists the positive integers with sum of digits 4 in ascending order. What is the 200th term of the sequence?

數列 4, 13, 22, 31, ... 把數字之和為 4 的正整數從小至大列出。求該數列的第 200 項。

14. A convex polyhedron $\mathcal{P}$ has 32 faces, each of which is either a triangle or a pentagon. Let x and y be constants such that every vertex of $\mathcal{P}$ is the intersection of exactly x triangular and y pentagonal faces. Find the number of vertices of $\mathcal{P}$.

凸多面體 $\mathcal{P}$ 有 32 個面，當中每個都是三角形或五邊形。設 x 、 y 為常數，使得 $\mathcal{P}$ 的每個頂點均為剛好 x 個三角形面及 y 個五邊形面的交點。求 $\mathcal{P}$ 的頂點數目。

15. Find the smallest positive integer n such that the first two digits after the decimal point in the decimal representation of $\sqrt{n}$ are 25 (i.e. the tenth digit is 2 and the hundredth digit is 5).

求最小的正整數 n ，使得 $\sqrt{n}$ 的小數表示中，小數點後的首兩位數字為 25（即十分位為 2，百分位為 5）。

16. A teacher wants to set some questions for a test on addition. He prompts a generative AI engine to produce questions which involve adding m and n , where m, n are five-digit positive integers, such that the answer is a six-digit number. Furthermore, it is required that every digit of m is a prime number and every digit of n is a composite number (0 and 1 are neither prime nor composite). What is the maximum number of different questions that can be generated?

老師準備為一次加法測驗擬題。他指令人工智能系統生成題目，當中每題必定是把兩個五位正整數 m 和 n 相加，而答案須為六位數。再者， m 的每位數字必定是質數，而 n 的每位數字必定是合成數（0 和 1 既非質數亦非合成數）。那麼，最多可以生成多少道不同的問題？

17. In a game, a positive integer n not exceeding 2025 is written on the board at the beginning. Each *operation* involves erasing an integer k on the board which is greater than 1, and then replacing it by three integers with sum k and pairwise difference at most 1 (e.g. one may erase the integer 10 and replace it by 3, 3, 4). Suppose Amy and Betty play this game; starting with Amy they take turns to carry out an operation until someone fails to do so according to the rules, in which case the other player wins the game. If both players play perfectly and Amy eventually wins, how many possible values of n are there?

在一個遊戲中，開始時黑板上寫上了一個不超過 2025 的正整數 n 。每次「操作」涉及擦掉黑板上一個大於 1 的整數 k ，然後把它換成三個和為 k 且兩兩之差最多為 1 的整數（例如，可以擦掉整數 10，並換上 3, 3, 4）。假設老大和老二玩這個遊戲，從老大開始二人輪流進行操作，直至某人無法按規定進行操作時，另一位玩家便獲勝。假設兩人均以最佳方式玩遊戲，而最終老大勝出，則 n 有多少個可能值？

18. The equality $1^9 + 2^9 + \cdots + n^9 = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \cdots + a_{10}n^{10}$, where $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ are constants, holds for all positive integers n . Find the value of $5a_5 + 9a_6 + 14a_7 + 14a_8$.

等式 $1^9 + 2^9 + \cdots + n^9 = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \cdots + a_{10}n^{10}$ （其中 $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ 為常數）對任意正整數 n 皆成立。求 $5a_5 + 9a_6 + 14a_7 + 14a_8$ 的值。

19. The sides of $\triangle ABC$ have lengths $\sqrt{2}$, $3 + \sqrt{3}$ and $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$. Let $\mathcal{P}$ be the smallest regular polygon containing A, B, C as its (not necessarily consecutive) vertices. Find the area of $\mathcal{P}$.

$\triangle ABC$ 各邊的長度分別為 $\sqrt{2}$ 、 $3 + \sqrt{3}$ 和 $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ 。設 $\mathcal{P}$ 是包含 A 、 B 、 C 作其（不一定連續）頂點的最小正多邊形。求 $\mathcal{P}$ 的面積。

20. Let $f(x) = x^{15} - 9x^{10} + 26x^5 - 24$. Find the smallest positive integer n such that $f(n)f(n+1)f(n+2)$ is divisible by 2187.

設 $f(x) = x^{15} - 9x^{10} + 26x^5 - 24$ 。求最小的正整數 n ，使得 $f(n)f(n+1)f(n+2)$ 可被 2187 整除。