

QUESTÃO 1

ALTERNATIVA B

O comprimento da parte da corda que fica entre as polias fixas diminuirá $15 + 25 = 40$ metros depois que os homens puxarem a corda. A polia móvel imediatamente acima do plano distribui ao meio esses 40 metros; assim, o plano subirá $40 \div 2 = 20$ metros.

QUESTÃO 2

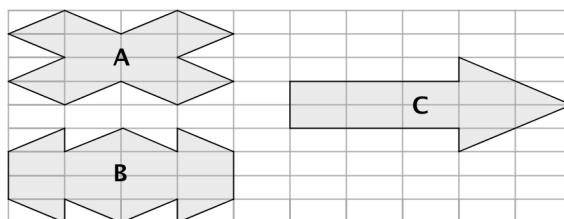
ALTERNATIVA B

Sejam b , h e d , respectivamente, os comprimentos da base, altura e diagonal dos retângulos da malha. O perímetro da figura A é igual a $12d$,

donde concluímos que $d = \frac{156}{12} = 13$.

O perímetro da figura B é igual a $8h + 8d$, donde concluímos que $144 = 8h + 8d$ e $h = \frac{144 - 8d}{8} = 5$. O teorema de Pitágoras diz que

$d^2 = b^2 + h^2$ e segue que $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$. Finalmente o perímetro da figura C é igual a $6b + 4h + 4d$, ou seja, $6 \times 12 + 4 \times 5 + 4 \times 13 = 144$ cm.

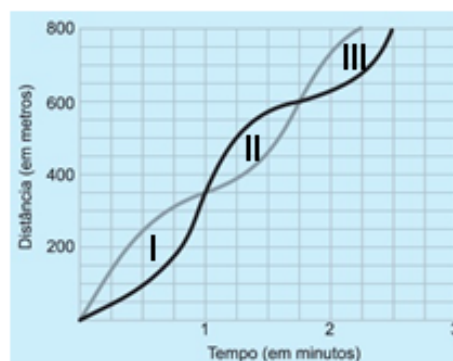


QUESTÃO 3

ALTERNATIVA D

O gráfico mais claro atinge a horizontal correspondente a 800 m antes do gráfico mais escuro. Logo o gráfico mais claro é o gráfico do vencedor da corrida, o coelho, e o gráfico mais escuro é o gráfico da tartaruga.

- O coelho terminou a corrida em 2min15s; logo a alternativa C é falsa.
- Quando o coelho termina a corrida, a tartaruga está entre 650m e 700m; logo a alternativa E é falsa.
- Entre o início da corrida e 1min, o gráfico do coelho está acima do gráfico da tartaruga (trecho marcado com I na figura), indicando que o coelho está na frente; logo a alternativa A é falsa.
- A tartaruga ficou atrás do coelho entre 0min e 1min e entre 1min45s e 2min30s (trecho marcado com III na figura), num total de 1min45s; logo a alternativa B é falsa.



- Por fim, a tartaruga ficou à frente do coelho entre 1min e 1min45s (trecho marcado com II na figura), num total de 45s; logo a alternativa D é verdadeira.

QUESTÃO 4 **ALTERNATIVA D**

Cada time jogou três vezes. Com 5 pontos, o Cruzínthians só pode ter vencido uma partida e empatado duas, pois se tivesse vencido duas partidas, teria pelo menos 6 pontos e se não tivesse vencido nenhuma, teria no máximo 3 pontos. O Greminese não venceu nenhuma partida, pois obteve apenas 2 pontos; logo empatou duas partidas e perdeu uma. O Flameiras, em segundo lugar com 3 pontos, não venceu nenhuma partida, pois se isso tivesse acontecido ele teria que ter perdido duas; como o Greminese não ganhou nenhuma e o Cruzínthians apenas uma, ele teria perdido para o Nauritiba. Por outro lado, o mesmo raciocínio mostra que então o Nauritiba deveria ter perdido para Flameiras, o que não é possível; logo, o Flameiras e o Nauritiba empataram suas três partidas. Segue que o número de empates foi $3+3-1=5$; o -1 aparece nessa expressão pois o empate entre Flameiras e Nauritiba deve ser contado apenas uma vez.

	Cruzínthians	Flameiras	Nauritiba	Greminese
Cruzínthians		1	1	3
Flameiras	1		1	1
Nauritiba	1	1		1
Greminese	0	1	1	

Outra solução é notar que em cada jogo disputado são distribuídos 2 pontos, no caso de empate ou 3 pontos, caso não ocorra empate. Como cada um dos quatro times jogou uma única vez com seus três adversários, foram disputados ao todo seis jogos, nos quais foram distribuídos $5+3+3+2=13$ pontos. A única maneira de parcelar 13 em seis parcelas de 2 ou 3 é $13=3+2+2+2+2+2$; logo, cinco dos seis jogos terminaram empatados.

Uma outra solução a seguinte. Observa-se, como acima, que o Cruzínthians venceu uma partida e empatou duas. Se ele tivesse vencido o Flameiras, a tabela poderia ser parcialmente preenchida como segue.

	Cruzínthians	Flameiras	Nauritiba	Greminese
Cruzínthians		3	1	1
Flameiras	0			
Nauritiba	1			
Greminese	1			

Segue que o Flameiras deve ter perdido mais uma partida e vencido a terceira para totalizar 3 pontos. Nesse caso, como o Greminese empatou

duas partidas, ele empatou uma com o Nauritiba e a tabela pode ser refinada para

	Cruzínthians	Flameiras	Nauritiba	Greminese
Cruzínthians		3	1	1
Flameiras	0			
Nauritiba	1			1
Greminese	1		1	

Logo, para que o Nauritiba totalizasse 3 pontos, ele deveria ter empatado com o Flameiras, o que não pode acontecer. De modo análogo vemos que o Cruzínthinas não pode ter empatado com o Nauritiba; logo a tabela parcialmente preenchida deve ser

	Cruzínthians	Flameiras	Nauritiba	Greminese
Cruzínthians		1	1	3
Flameiras	1			
Nauritiba	1			
Greminese	0			

A partir daí é imediato completar a tabela.

QUESTÃO 5 **ALTERNATIVA E**

O número 0 deve aparecer nos dois dados, para que seja possível formar as datas de 01 a 09, 10, 20 e 30. Os números 1 e 2 também devem aparecer nos dois dados, para formar as datas 11 e 22. Desse modo no dado da direita aparecem os números 0, 1, 2, 3, 5, 6 (que também é 9) e no dado da esquerda aparecem os números 0, 1, 2, 4, 7 e 8. A soma das faces não visíveis do dado da esquerda é então $1 + 4 + 7 + 8 = 20$.

Outra solução é a seguinte. Como acima, os números 0, 1 e 2 devem aparecer nos dois dados; os números 4, 7 e 8 também devem aparecer. Assim, a soma dos números nos dois dados deve ser $2 \times (0 + 1 + 2) + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 39$. Os números que aparecem no dado da direita são 0, 1, 2 (ocultos) e 3, 5, 6 (visíveis); os números 0 e 2 estão visíveis no cubo da esquerda. Logo a soma dos números não visíveis no cubo da esquerda é $39 - (0 + 2 + 0 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6) = 39 - 19 = 20$.

QUESTÃO 6

ALTERNATIVA C

Seja x a largura, em centímetros, das faixas cortadas por Márcia. As dimensões do pedaço retangular que sobra após o corte das tiras são $30 - 2x$ e $40 - 2x$; sua área é então

$$(30 - 2x) \times (40 - 2x) = 1200 - 140x + 4x^2.$$

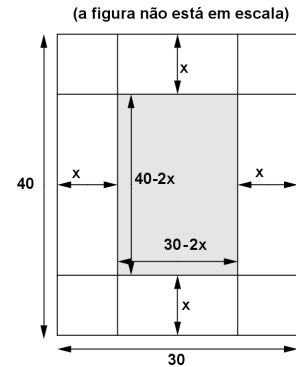
Como a área desse pedaço corresponde a 68% da área da folha original, temos

$$1200 - 140x + 4x^2 = 0,68 \times 1200 = 816$$

ou seja

$$x^2 - 35x + 96 = 0$$

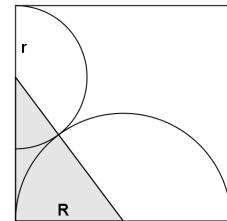
Essa equação tem as soluções $x = 32$ e $x = 3$; como $2 \times 32 = 64$ supera os lados da folha original, a solução $x = 32$ deve ser descartada. Logo a largura das tiras é 3 cm.



QUESTÃO 7

ALTERNATIVA E

Sejam R e r os raios dos semicírculos maior e menor, respectivamente; o lado do quadrado tem então medida $2R = 36$, ou seja, $R = 18$. Como os centros dos semicírculos e o ponto de tangência estão alinhados, o triângulo destacado na figura é um triângulo retângulo de catetos R e $2R - r$ e hipotenusa $R + r$. O teorema de



Pitágoras nos dá $(R + r)^2 = R^2 + (2R - r)^2$. Simplificando, obtemos $6Rr = 4R^2$

e segue que $r = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3} \times 18 = 12$ cm.

QUESTÃO 8

ALTERNATIVA E

Primeiro notamos que a afirmativa de Daniela é verdadeira, pois há apenas um culpado; logo a culpada não é Daniela. Se Bruno mentiu, então ele é culpado e Eduardo diz a verdade. Mas Eduardo disse que a culpada é uma menina, logo ele também estaria mentindo, o que não satisfaz o enunciado. Então Bruno diz a verdade e, portanto, Eduardo é o culpado.

QUESTÃO 9

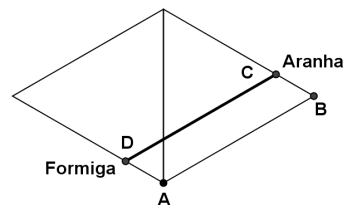
ALTERNATIVA A

Com os números 1, 4, 6 e 8 podem-se formar $4 \times 3 \times 2 = 24$ números de três algarismos distintos, pois temos 4 possibilidades para escolher a centena, depois 3 possibilidades para escolher a dezena e por fim 2 possibilidades para escolher a unidade. Nas unidades desses números irão aparecer seis vezes cada um dos algarismos 6, 4, 2 e 1, pois cada um deles aparece o mesmo número de vezes entre os 24 números e $24 \div 4 = 6$; o mesmo irá ocorrer nas dezenas e nas centenas. Como $6 \times (8 + 6 + 4 + 1) = 114$, a soma desses 24 números será $114 + 10 \times 114 + 100 \times 114 = 111 \times 114 = 12654$.

QUESTÃO 10

ALTERNATIVA A

As faces laterais da pirâmide são triângulos equiláteros de lado 1. Planificando as faces que contêm como aresta comum o segmento que liga o ponto A ao vértice superior da pirâmide, obtemos um losango com a aranha (ponto C) e a formiga (ponto D) em lados opostos, conforme a figura.



O trajeto mais curto que a aranha deve percorrer para chegar até a formiga corresponde ao segmento CD . Como $AD = BC$ e lados opostos de um losango são paralelos, segue que $ABCD$ é um paralelogramo. Logo $CD = AB = 1\text{m}$.

QUESTÃO 11

ALTERNATIVA D

Seja x o número de meninas e y o número de meninos no grupo. Como 3 pizzas de 12 pedaços cada não são suficientes para que cada menino coma 7 pedaços e cada menina coma 2 pedaços, temos $36 < 2x + 7y$. Por outro lado, como 4 pizzas de 12 pedaços cada são suficientes para que cada menino coma 8 pedaços e cada menina coma 4 pedaços, com sobra, temos $4x + 8y < 48$. Como $2x + 7y < 4x + 8y$ e tanto $2x + 7y < 4x + 8y$ e $2x + 7y < 4x + 8y$ são números maiores que 36 e menores que 48, temos

$$(4x + 8y) - (2x + 7y) = 2x + y < 48 - 36 = 12.$$

A desigualdade $2x + y < 12$ mostra que $x \leq 5$. Vamos agora testar a desigualdade $36 - 2x < 7y < 8y < 48 - 4x$ para os possíveis valores de x . Quando $x = 1$ temos $34 < 7y < 8y < 44$, que tem a solução $y = 5$; os valores 2, 3, 4 e 5 para x levam, respectivamente, às inequações $32 < 7y < 8y < 40$, $30 < 7y < 8y < 36$, $28 < 7y < 8y < 32$ e $26 < 7y < 8y < 28$, todas sem solução inteira para y . Segue que a única solução do problema é $x = 5$, $y = 1$ e assim a quantidade de crianças é $x + y = 5 + 1 = 6$.

QUESTÃO 12

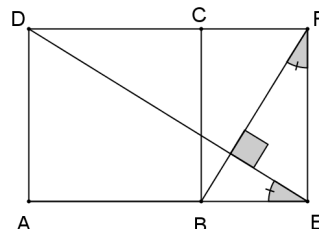
ALTERNATIVA C

As amigas podem escolher suas blusas, sem restrição, de $3 \times 3 \times 3 = 27$ maneiras diferentes. Por outro lado, se elas devem escolher blusas sem repetição de cores e uma delas já escolheu a sua entre as 3 possibilidades, uma outra terá apenas 2 possibilidades e a última apenas 1, num total de $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades sem repetição de cores. Logo a probabilidade em questão é igual a $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

QUESTÃO 13

ALTERNATIVA E

Como BF é perpendicular a DE e EF é perpendicular a AE , os ângulos $\widehat{AED}$ e $\widehat{EFB}$ são iguais. Logo os triângulos AED e EFB são semelhantes e temos $\frac{BE}{EF} = \frac{AD}{AE}$. Fazendo $BE = x$ e



lembrando que $AD = EF = 1$, segue que $\frac{x}{1} = \frac{1}{1+x}$, ou seja, $x^2 + x - 1 = 0$. A

solução positiva dessa equação é $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, donde $AE = 1+x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

QUESTÃO 14

ALTERNATIVA A

Seja x o comprimento em metros da pista. Quando Alberto cruzou a linha de chegada, a distância entre Bernardo e Carlos era de 10 metros, e era 16 metros quando Bernardo cruzou a linha de chegada. Vemos assim que Bernardo correu 36 metros enquanto Carlos correu 30; logo

$\frac{\text{velocidade de Carlos}}{\text{velocidade de Bernardo}} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$. Como Bernardo cruzou a linha de

chegada 16 metros à frente de Carlos, temos a equação $\frac{5}{6} = \frac{x-16}{x}$, cuja

solução é $x = 96$.

QUESTÃO 15

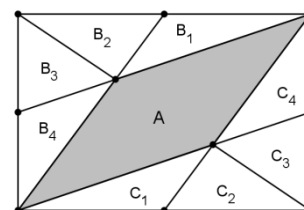
ALTERNATIVA D

Quando se retiram duas bolas pretas da caixa, elas não retornam; mas quando as bolas retiradas são uma preta e outra de cor distinta, a preta retorna. Isso mostra que o número de bolas pretas na caixa diminui de dois em dois. Observamos que o número de bolas na caixa diminui de um a cada retirada, de modo que eventualmente sobrarão duas bolas na caixa. Como o número inicial de bolas pretas é ímpar, sempre haverá um número ímpar de bolas pretas na caixa; desse modo, exatamente uma das duas bolas que sobrar na caixa é preta.

QUESTÃO 16

ALTERNATIVA D

Considere a decomposição do retângulo indicada na figura, e seja a a área do retângulo. As áreas B_1 e B_2 são iguais, pois correspondem a áreas de triângulos com mesma medida de base e altura; o mesmo ocorre com B_3 e B_4 . O triângulo retângulo formado por B_1 , B_2 e B_3 tem como catetos um lado do retângulo e metade



do outro lado; sua área é então $\frac{a}{4}$ e temos $B_1 + B_2 + B_3 = \frac{a}{4}$; o mesmo ocorre

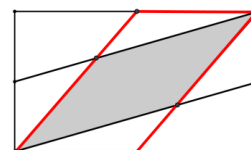
com $B_2 + B_3 + B_4$. Logo $B_1 + B_2 + B_3 = B_2 + B_3 + B_4$, o que implica em $B_1 = B_4$.

Logo $B_1 = B_2 = B_3 = B_4$ e segue que $B_1 + B_1 + B_1 = 3B_1 = \frac{a}{4}$, donde $B_1 = \frac{a}{12}$.

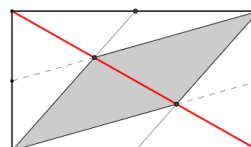
Por simetria, todas essas conclusões se aplicam a C_1, C_2, C_3 e C_4 . Logo

$$A = a - 8 \times \frac{a}{12} = \frac{a}{3} = \frac{42}{3} = 14 \text{ cm}^2.$$

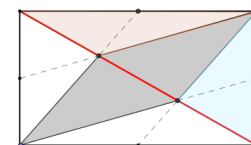
Nas figuras ao lado, apresentamos outra solução. Na primeira, observamos que o quadrilátero em vermelho, é um paralelogramo, pois seus lados horizontais são paralelos e congruentes.



O teorema de Tales mostra que os lados não horizontais desse paralelogramo dividem a diagonal destacada na segunda figura em três segmentos congruentes, conforme a segunda figura.



Finalmente, os três triângulos destacados na terceira figura e cujas bases são esses segmentos de mesma medida, têm o terceiro vértice em comum; desse modo tem todos a mesma área, que é $\frac{1}{3}$ de metade da área do retângulo, ou seja, 7 cm^2 . Logo a área da região cinza é 14 cm^2 .



QUESTÃO 17

ALTERNATIVA C

No instante em que o terceiro carro saiu de Quixajuba, o segundo estava $40 \times 0,5 = 20$ km e o primeiro $50 \times 0,5 = 25$ km à sua frente. Seja v a velocidade, em km/h, do terceiro carro e t o tempo, em horas, que ele levou para alcançar o segundo; temos então $vt = 20 + 40t$, ou seja, $v = \frac{20 + 40t}{t}$.

Como o terceiro carro alcançou o primeiro 1,5 horas depois de alcançar o segundo, temos $vt + 1,5v = 25 + 50(t + 1,5) = 50t + 100$, donde $v = \frac{50t + 100}{t + 1,5}$.

Logo $\frac{20 + 40t}{t} = \frac{50t + 100}{t + 1,5}$; essa igualdade se reduz a $t^2 + 2t - 3 = 0$, cujas raízes são $t = 1$ e $t = -3$. Logo $t = 1$ e $v = 20 + 40 = 60$ km/h.

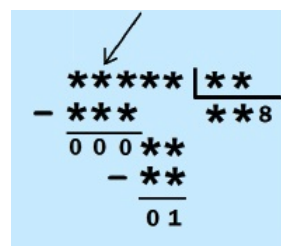
QUESTÃO 18

ALTERNATIVA E

Observamos que ao multiplicar 8 pelo divisor obtemos um número com dois algarismos. Como o divisor também tem dois algarismos e $8 \times 13 = 104$, as possibilidades para o divisor são 10, 11 e 12.

Observamos agora que ao multiplicar o algarismo das centenas do quociente pelo divisor, obtemos um número de três algarismos. A única maneira possível de multiplicar um número de apenas um algarismo por 10, 11 ou 12 de modo a obter um número de três algarismos é $9 \times 12 = 108$. Como a primeira subtração efetuada na conta armada tem como resultado 000, os três asteriscos à esquerda no dividendo correspondem a 1, 0 e 8, nessa ordem. Assim, o asterisco indicado em vermelho corresponde ao algarismo 0.

O(a) leitor(a) pode prosseguir essa análise e mostrar que a conta armada corresponde à expressão $10897 = 12 \times 908 + 1$.



$$\begin{array}{r}
 \text{*****} \overline{) **} \\
 - *** \\
 \hline
 000** \\
 - ** \\
 \hline
 01
 \end{array}$$

QUESTÃO 19 ALTERNATIVA B

Para qualquer disposição dos algarismos, a soma dos vizinhos “juntados” terá sempre nove parcelas, sem repetição de algarismos nas unidades ou nas dezenas. O único algarismo que não aparece nas unidades é o primeiro e o único que não aparece nas dezenas é o último. Para que a soma seja máxima, o algarismo 0 não deve comparecer nas dezenas e, portanto, deve ser o último; além disso, o menor dos algarismos 1, 2, ..., 9 não deve aparecer nas unidades e, portanto, o 1 deve ser o primeiro. Concluímos que a soma é máxima para qualquer escolha onde 1 é o primeiro algarismo e 0 o último. Nesse caso, a soma das unidades será $0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44$ e a soma das dezenas será $10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 = 450$; a soma máxima é então $450 + 44 = 494$.

Algebricamente, podemos escrever esse argumento como segue. Seja $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ uma disposição qualquer dos algarismos de 0 até 9 na primeira linha. Na linha de baixo da tabela aparecerão os números $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_9 a_{10}$. Usando a representação decimal, a soma desses números pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} S &= a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_9 a_{10} = (10a_1 + a_2) + (10a_2 + a_3) + \dots + (10a_9 + a_{10}) \\ &= 10 \times (a_1 + a_2 + \dots + a_9) + (a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) \\ &= 10 \times (a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10}) - 10a_{10} + (a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10}) - a_1 \\ &= 11 \times (a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10}) - 10a_{10} - a_1 = 45 \cdot 11 - 10a_{10} - a_1 \\ &= 495 - 10a_{10} - a_1 \end{aligned}$$

Logo o valor de máximo de S é atingido quando $a_{10} = 0$ e $a_1 = 1$, como vimos.

QUESTÃO 20 ALTERNATIVA D

Antes de chegar ao centro, a aranha tem as seguintes escolhas em cada vértice de um pentágono:

- ir direto para o próximo nível, sem passar pelas arestas do pentágono em que se encontra;
- caminhar no sentido horário pelas arestas do pentágono em que se encontra por no máximo 5 segmentos, passando então para o próximo nível, e
- caminhar no sentido anti-horário pelas arestas do pentágono em que se encontra por no máximo 5 segmentos, passando então para o próximo nível.

Assim, em cada pentágono a aranha tem 11 escolhas para passar para o próximo nível; como são três os pentágonos, a aranha tem um total de $11 \times 11 \times 11 = 11^3$ caminhos possíveis para chegar ao centro da teia.