

QUESTÃO 1

ALTERNATIVA A

Basta verificar que após oito giros sucessivos o quadrado menor retorna à sua posição inicial. Como $2012 = 8 \times 251 + 4$, após o 2012º giro o quadrado cinza terá dado 251 voltas completas no quadrado maior e mais quatro giros, parando na posição que corresponde à alternativa A.

QUESTÃO 2

ALTERNATIVA D

O primeiro triângulo da sequência é formado por três palitos. Para $n \geq 2$, o triângulo que ocupa a posição n na sequência é formado acrescentando n triângulos iguais ao primeiro ao triângulo precedente. Logo, o total de palitos utilizados para construir o triângulo que ocupa a posição n na sequência é $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \dots + 3n = 3 \cdot (1 + 2 + \dots + n) = \frac{3n(n+1)}{2}$. Para saber em qual triângulo foram

usados 135 palitos, devemos resolver a equação $\frac{3n(n+1)}{2} = 135$, ou seja, $n(n+1) = 90$. Por inspeção, vemos que a raiz positiva dessa equação é $n = 9$; logo o triângulo que estamos procurando é o nono triângulo da sequência, cujo lado tem 9 palitos.

QUESTÃO 3

ALTERNATIVA B

1 2 ~~3~~ 4 ~~5~~ 6 ~~7~~ 8 ~~9~~ 10 11 ~~12~~ 13 14 ~~15~~ 16 ~~17~~ 18 19

Apagando alguns números a mais, obtemos a figura acima e notamos o seguinte padrão: os números que não são apagados são 1, 2 e os da forma $3n+1$ para $n \geq 1$. Para verificar que esse padrão se estende até 1000, distribuímos os números de 1 a 1000 na seguinte tabela:

n	$3n+1$	$3n+2$	$3(n+1)$
0	1	2	3
1	4	5	6
2	7	8	9
3	10	11	12
4	13	14	15
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
332	997	998	999
333	1000		

A primeira coluna lista os números que deixam resto 1 quando divididos por 3, isto é, os números da forma $3n+1$; analogamente, a segunda coluna lista os números que deixam resto 2 quando divididos por 3 e a terceira lista os múltiplos de 3; as casas de cor cinza indicam número apagados. O padrão indicado até $n=4$ se repete até o final da tabela. De fato, para $n=5$, o número da primeira coluna só será apagado caso ele seja soma de dois números não apagados anteriormente; mas isso não pode acontecer, pois

- a soma de um número anterior da primeira coluna com 2 está na terceira coluna: $(3n+1) + 2 = 3(n+1)$ e
- a soma dois números anteriores da primeira coluna está na segunda coluna: $(3m+1) + (3n+1) = 3(m+n) + 2$.

Assim, o próximo número da primeira coluna, que é da forma $3n+1$, não será apagado e os números $3n+2 = (3n+1) + 1$ e $3(n+1) = (3n+1) + 2$, à sua direita, serão apagados. Usando esse argumento linha após linha, vemos que os números não apagados na tabela serão exatamente os números da primeira coluna. Na tabela vemos que há 333 números da forma $3n+1$ entre 4 e 1000, incluindo os extremos. Acrescentando os números 1 e 2, obtemos 335 números não apagados.

QUESTÃO 4 ALTERNATIVA E

Vamos listar as posições das cartas fazendo embaralhamentos sucessivos:

- posição inicial: A2345
- após o 1º embaralhamento: 3A524
- após o 2º embaralhamento: 534A2
- após o 3º embaralhamento: 4523A
- após o 4º embaralhamento: 24A53
- após o 5º embaralhamento: A2345, a posição inicial

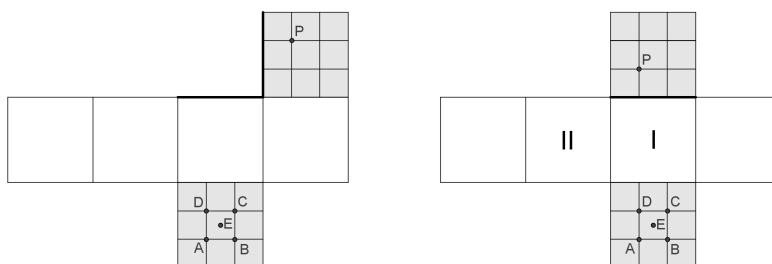
Assim, de 5 em 5 embaralhamentos retornamos à posição inicial. Como $2012 = 5 \times 402 + 2$, a posição das cartas após o 2012º embaralhamento é a mesma que a posição após o 2º embaralhamento, quando a primeira carta é a de número 5.

QUESTÃO 5 ALTERNATIVA A

De acordo com o gráfico do enunciado, no instante $t = 0$ os carros estão juntos, pois partem do mesmo ponto. Até $t = 1$, os dois carros se afastam de Quixajuba; como a velocidade de A é maior que a de B, a distância entre eles aumenta. Quando $t = 1$, a distância entre os dois carros é igual a $100 - 25 = 75$ km. De $t = 1$ a $t = 4$, o carro A fica parado, enquanto o carro B mantém sua velocidade inicial, diminuindo a distância entre eles. Quando $t = 4$, o carro B alcança o carro A, o que significa que a distância entre eles é 0. De $t = 4$ a $t = 5$, o carro A volta para Quixajuba, enquanto o carro B continua se afastando, a uma velocidade um pouco maior. Quando $t = 5$, a distância entre os carros é igual a $150 - 50 = 100$ km. Em cada um dos intervalos considerados, as velocidades dos carros são constantes, de modo que as distâncias entre eles variam linearmente com o tempo. O único gráfico coerente com esses fatos é o da alternativa A).

QUESTÃO 6 ALTERNATIVA B

Na planificação original, à esquerda na figura, observamos que os segmentos destacados formam uma aresta do cubo; desse modo, podemos substituir essa planificação pela que aparece à direita.



Observamos então que, ao montar o cubo, os pontos P, D e C ficarão à mesma distância da face I, logo nem C nem D são opostos de P. Do mesmo modo, os pontos P e A ficarão à mesma distância da face II, logo A não é o oposto de P. Finalmente, o ponto E é o oposto do ponto central da face onde aparece o ponto P; assim, o oposto de P é o ponto B.

QUESTÃO 7 ALTERNATIVA E

A expressão dada pode ser escrita como $\sqrt{n \cdot 17^2} = 3 \cdot 17^2$, sendo n o número de parcelas 17^2 que aparecem dentro do radical. Elevando os dois lados dessa expressão ao quadrado, temos $n \cdot 17^2 = 9 \cdot 17^4$, donde $n = 9 \cdot 17^2 = 2601$.

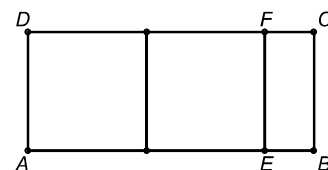
QUESTÃO 8

ALTERNATIVA C

Da semelhança dos retângulos $ABCD$ e $BCFE$ temos

$$\frac{AD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{AB - 2AD}{AD} = \frac{AB}{AD} - 2. \text{ Fazendo } \frac{AB}{AD} = x \text{ (a razão de prata) temos}$$

$$\frac{1}{x} = x - 2, \text{ ou seja, } x^2 - 2x - 1 = 0. \text{ A raiz positiva dessa equação é } x = 1 + \sqrt{2}.$$



QUESTÃO 9

ALTERNATIVA A

Notamos primeiro que a soma dos números de 1 a 25 é $\frac{25 \times (25 + 1)}{2} = 325$; a soma dos números em

uma linha, coluna ou diagonal é então $\frac{325}{5} = 65$. As casas brancas do tabuleiro consistem de uma linha,

de uma coluna e das duas diagonais, todas se cruzando na casa central. Denotando por x o número da casa central e lembrando que a soma dos números das casas cinzentas é 104, temos $4 \times 65 - 3x = 325 - 104$ e segue que $x = 13$.

QUESTÃO 10

ALTERNATIVA D

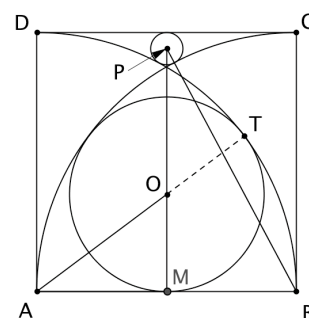
Na figura, marcamos o centro O do círculo maior e o ponto de tangência M desse círculo como lado AB . Por simetria, M é também o ponto médio de AB

e assim $AM = \frac{1}{2}$. Marcamos também o ponto de tangência T do círculo maior com o círculo de centro A ; é sabido que os pontos A , O e T estão alinhados. Seja r o raio do círculo maior. Então $AO = 1 - r$ e o teorema de

Pitágoras aplicado ao triângulo AMO nos dá $(1 - r)^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$; segue que

$r = \frac{3}{8}$. O raciocínio análogo, aplicado ao triângulo BMP , onde P é o centro do círculo menor, mostra que

$$(1 + s)^2 = (1 - s)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \text{ onde } s \text{ é o raio do círculo menor. Segue que } s = \frac{1}{16} \text{ e logo } \frac{r}{s} = 6.$$



QUESTÃO 11

ALTERNATIVA E

Sejam $r < s$ as velocidades dos dois trens em km/min e t o tempo, em minutos, que o trem mais rápido leva para percorrer 5 km. O enunciado diz que $r(t + 5) = st = 6$ e $20r = 20s - 4$. Da primeira expressão

tiramos $r = \frac{6}{t + 5}$ e $s = \frac{6}{t}$; da segunda tiramos $s - r = \frac{1}{5}$. Substituindo, temos $\frac{6}{t + 5} - \frac{6}{t} = \frac{1}{5}$, ou seja,

$t^2 + 5t - 150 = 0$. A raiz positiva dessa equação é $t = 10$; logo $s = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$ km/min, que é o mesmo que 36 km/h.

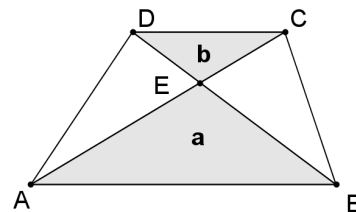
QUESTÃO 12

ALTERNATIVA C

Vamos denotar por (ABC) a área do triângulo ABC , e analogamente para outros triângulos. Primeiro observamos que $(ABD) = (ABC)$, pois esses triângulos têm a mesma altura e a base AB comum. Logo $(AED) = (ABD) - (ABE) = (ABC) - (ABE) = (BCE)$, ou seja, os dois triângulos brancos na figura têm a mesma área, que denotamos por x .

Por outro lado, como os triângulos AED e ECD têm a mesma altura relativa às bases AE e EC , temos $\frac{x}{b} = \frac{(AED)}{(DCE)} = \frac{AE}{EC}$ e, analogamente, temos $\frac{a}{x} = \frac{(ABE)}{(BCE)} = \frac{AE}{EC}$. Logo $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, donde $x = \sqrt{ab}$.

Finalmente, a área do trapézio é dada por $a + 2x + b = a + 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.



QUESTÃO 13

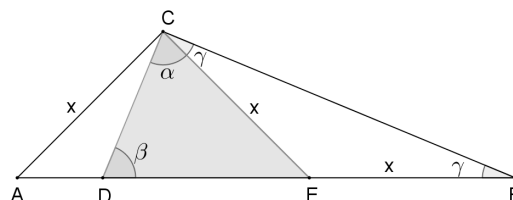
ALTERNATIVA D

A costureira gastou 299 centavos. Como as blusas são iguais, em cada uma foi gasta a mesma quantia; logo, o número n de blusas é um divisor de 299. Como $299 = 13 \times 23$ e tanto 13 quanto 23 são primos, as possibilidades para n são 1, 13, 23 e 299. O enunciado exclui a possibilidade $n = 1$ (são várias blusas) e a possibilidade $n = 299$ é excluída observando que, como um botão custa 4 centavos, a quantia gasta em qualquer blusa é maior que 1 centavo. Se $n = 23$, o total em botões e laços gasto em cada blusa seria 13 centavos, o que não pode acontecer pois não é possível gastar exatamente 13 centavos com botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Resta a possibilidade $n = 13$; nesse caso, o total gasto em botões e laços em cada blusa é de 23 centavos, que corresponde a 4 botões e 1 laço.

QUESTÃO 14

ALTERNATIVA C

Seja $AC = CE = EB = x$. Como o triângulo ACE é retângulo em C obtemos, pelo teorema de Pitágoras, $AE^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$, donde $AE = x\sqrt{2}$. Observamos agora que o triângulo EBC é isósceles de base BC ; segue que seus ângulos em B e C são iguais. Vamos denotar a medida desses ângulos por γ ; marcamos também os ângulos α e



β como na figura. Do fato do triângulo BCD ser retângulo em C , obtemos $\alpha = 90^\circ - \gamma$ e $\beta = 90^\circ - \gamma$, ou seja, $\alpha = \beta$. Logo o triângulo CED é isósceles e $DE = EC = x$.

Os triângulos ABC e CDE têm suas bases AB e DE sobre a mesma reta AB , logo as suas alturas relativamente a essas bases são iguais. Portanto, a razão entre suas áreas é igual a $\frac{AB}{DE}$. Como

$AB = AE + EB = x\sqrt{2} + x = x(\sqrt{2} + 1)$ e $DE = x$, segue que essa razão é

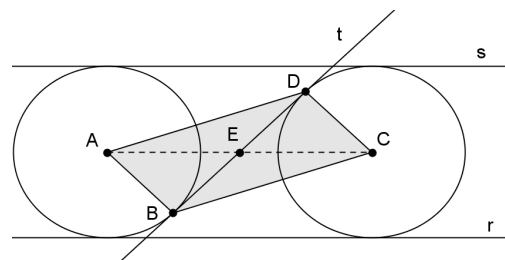
$$\frac{\text{área}(ABC)}{\text{área}(CDE)} = \frac{AB}{DE} = \frac{x(\sqrt{2} + 1)}{x} = \sqrt{2} + 1$$

e como a área do triângulo CDE é igual a 1, concluímos que a área do triângulo ABC é $\sqrt{2} + 1$.

- A) Falsa, pois Pedro comprou 1 livro a mais que Vítor.
B) Falsa, pois Pedro é o marido de Lorena.
C) Verdadeira, pois Pedro comprou mais livros que Vítor e que H.
D) Falsa, pois Lorena comprou um livro a mais que Cláudia.
E) Falsa, pois Vítor é marido de Cláudia.

QUESTÃO 17 ALTERNATIVA B

A diagonal AC do quadrilátero $ABCD$ é paralela à reta r , pois A e C estão à mesma distância (1 cm) de r . Como r e t fazem um ângulo de 45° , segue que $\widehat{CED} = 45^\circ$. Como $\widehat{CDE} = 90^\circ$, o triângulo CDE é isósceles e temos $ED = DC = 1$ cm. Do mesmo modo obtemos $AB = BE = 1$ cm e segue que $ABCD$ é um losango de lados 1 cm. As diagonais AC e BD dividem esse



losango em quatro triângulos de mesma área; como a área do triângulo AEB é $\frac{AB \times BE}{2} = \frac{1}{2}$, a área de $ABCD$ é $4 \times \frac{1}{2} = 2$ cm².

QUESTÃO 18 ALTERNATIVA C

Há 6 possibilidades para escolher dois lugares juntos no mesmo lado da mesa: 1 no lado com 2 lugares, 2 no lado com 3 lugares e 3 no lado com 4 lugares. Uma vez escolhida uma dessas possibilidades, Alice e Bernardo podem se sentar de duas maneiras diferentes nesses lugares. Os quatro amigos que ainda estão em pé podem se sentar nos 7 lugares vazios de $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ maneiras diferentes. No total, os amigos podem se sentar-se à mesa de $6 \times 2 \times 840 = 10080$ maneiras diferentes.

QUESTÃO 19 ALTERNATIVA D

Seja x a distância entre P e Q , em km. O primeiro encontro entre André e Júlio ocorreu quando André tinha percorrido $x - 70$ km e Júlio, 70 km (figura 1). O segundo encontro ocorreu quando André tinha percorrido $x + (x - 40) = 2x - 40$ km e Júlio, $x + 40$ km (figura 2). Em cada um dos casos, eles levam o mesmo tempo para fazer esses percursos. Logo, representando por v_1 e v_2 as velocidades de André e Júlio, respectivamente, temos:

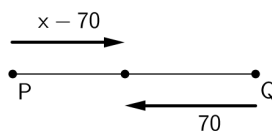


Figura 1

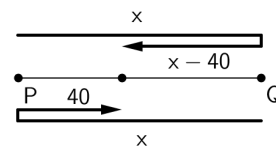


Figura 2

- tempo até o 1º encontro: $\frac{x - 70}{v_1} = \frac{70}{v_2}$
- tempo até o 2º encontro: $\frac{2x - 40}{v_1} = \frac{x + 40}{v_2}$

Dividindo as equações membro a membro, obtemos $\frac{x - 70}{2x - 40} = \frac{70}{x + 40}$. Isso leva à equação $x^2 - 170x = 0$, cujas raízes são $x = 0$ e $x = 170$. Como Pirajuba e Quixajuba estão separadas por pelo menos 70 km, a raiz apropriada é $x = 170$ km.

QUESTÃO 20

ALTERNATIVA D

Numeramos as quatro bolinhas de 1 a 4, do menor para o maior valor. Há $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ordens possíveis para a retirada das bolinhas, todas igualmente prováveis. Dessas retiradas, Pedro fica com o prêmio de maior valor nos seguintes casos:

1. a bolinha 4 sai na 3ª retirada; neste caso, seu número é necessariamente maior que os das duas primeiras;
2. a bolinha 4 sai na 4ª retirada, desde que a bolinha 3 saia em uma das duas primeiras retiradas (caso contrário, ou seja, se ela sair na 3ª retirada, Pedro ficará com ela, por seu número ser maior que o das duas primeiras).

O número de possibilidades para o primeiro caso é $3 \times 2 \times 1 = 6$. Para o segundo caso, há 2 possibilidades para a posição em que sai a bolinha 3 (1ª ou 2ª), 2 possibilidades para a bolinha que sai na 3ª posição e 1 possibilidade para a bolinha que sai na 4ª retirada, num total de $2 \times 2 \times 1 = 4$ possibilidades. Logo, o número de casos favoráveis é $6 + 4 = 10$ e a probabilidade de que Pedro tire o

prêmio de maior valor é $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

Outra solução é como segue. Pedro tira o prêmio máximo em duas situações: quando a bolinha 4 sai na 3ª posição ou quando ela sai na 4ª posição e a bolinha 3 sai em uma das duas primeiras. A probabilidade do primeiro evento é $\frac{1}{4}$ e a do segundo é $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$. Logo, a probabilidade de ele tirar o

prêmio máximo é $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.