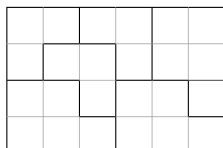
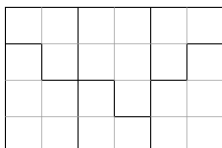
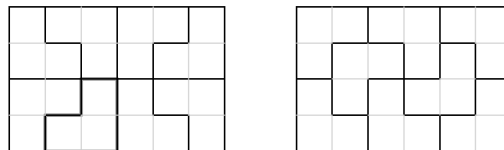


N1Q1 – Solução

a) Há várias formas de se cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo A; a figura mostra duas delas.



b) Há várias formas de se cobrir o tabuleiro com peças dos tipos A e B, com pelo menos uma do tipo B: a figura mostra duas delas.

c) Há $4 \times 6 = 24$ casas no tabuleiro. Cada peça do tipo B cobre 5 casas; como as peças devem ser colocadas sem sobreposição, o número de casas cobertas por uma peça do tipo B é 5, por duas peças é 10, por três peças é 15, por 4 peças é 20, menos que 24, e por cinco peças é 25, que já passa de 24. Logo não é possível cobrir o tabuleiro com peças do tipo B.

Esse argumento pode ser resumido dizendo que, como as peças são colocadas sem sobreposição, o número de casas cobertas por peças do tipo B é um múltiplo de 5; como 24 não é múltiplo de 5 (por verificação direta ou escrevendo $24 = 4 \times 5 + 4$), a conclusão segue.

N1Q2 – Solução

a) A (única) sequência de operações é CQD, como vemos: $15 \xrightarrow{C} 3 \xrightarrow{Q} 9 \xrightarrow{D} 18$. Existem outras sequências que produzem 18 a partir de 15, mas elas têm comprimento maior do que 3; por exemplo, $15 \xrightarrow{Q} 225 \xrightarrow{C} 45 \xrightarrow{C} 9 \xrightarrow{D} 18$.

b) A última tecla que Raquel apertou foi C, que divide por 5; para saber qual o número que havia no visor antes de apertar essa tecla, devemos desfazer o efeito da tecla C, ou seja, devemos multiplicar 7,2 por 5, obtendo $7,2 \times 5 = 36$. A penúltima tecla que Raquel apertou foi Q, que eleva ao quadrado; para desfazer o efeito dessa tecla, basta saber qual o número que elevado ao quadrado dá 36; esse número é 6 (ou seja, $\sqrt{36} = 6$). A seguir, novamente invertemos a tecla C, obtendo $6 \times 5 = 30$. Agora basta inverter a operação de duplicação da tecla D; para isto dividimos o resultado anterior por 2, o que produz o número $30 \div 2 = 15$. Verificando: $15 \xrightarrow{D} 30 \xrightarrow{C} 6 \xrightarrow{Q} 36 \xrightarrow{C} 7,2$.

O problema também pode ser resolvido com rudimentos de álgebra elementar. Se x é o número procurado, a sequência DCQC aplicada a x tem como resultado $\frac{1}{5} \left(\frac{2x}{5} \right)^2$; logo, devemos resolver a equação $\frac{1}{5} \left(\frac{2x}{5} \right)^2 = 7,2$, cuja solução positiva é $x = 15$.

c) Escrevendo 0,08 na forma de fração, temos $0,08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} = \frac{2/5}{5}$, ou seja, 0,08 é obtido dividindo 2 por 5 e dividindo o resultado por 5. Assim, Raquel pode obter 0,08 começando com 2 e apertando duas vezes a tecla C, ou seja, usando a sequência CC: $2 \xrightarrow{C} 0,4 \xrightarrow{C} 0,08$. Existem outras maneiras de chegar a 0,08; por exemplo, $1 \xrightarrow{C} 0,2 \xrightarrow{C} 0,04 \xrightarrow{D} 0,08$.

Deixamos como exercício mostrar que é possível chegar a 0,08 a partir de um número inteiro positivo a e alguma sequência de teclas se e somente se a é da forma 5^n ou 2×5^n para algum $n \geq 0$.

N1Q3 – Solução

a) Alberto, primeiro a acordar, pegou $\frac{1}{5}$ do total de jabuticabas deixando $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ para os demais irmãos. Beatriz, segunda a acordar, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas deixadas por Alberto, pegando assim $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{5}$, ou seja, $\frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$ do total de jabuticabas.

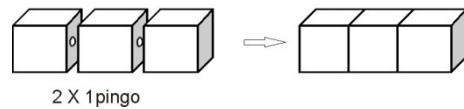
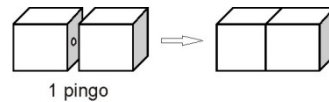
b) Alberto pegou exatamente $\frac{1}{5}$ do total de jabuticabas, deixando $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ delas na vasilha. Como Beatriz dividiu as jabuticabas deixadas por Alberto em cinco partes, ela ficou com menos que $\frac{1}{5}$ e deixou mais que $\frac{3}{5}$ das jabuticabas. Os irmãos restantes, dividindo esses $\frac{3}{5}$ em três partes iguais, ficaram com mais de $\frac{1}{5}$ cada. Logo foi Beatriz quem ficou com menos jabuticabas e Carlos, Dulce e Eduardo com mais jabuticabas.

Podemos também pensar como segue. Alberto ficou com $\frac{1}{5}$ das jabuticabas e deixou $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ delas na vasilha. Beatriz ficou então com $\frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$ das jabuticabas e deixou $\frac{4}{5} - \frac{4}{25} = \frac{20}{25} - \frac{4}{25} = \frac{16}{25}$ na vasilha. Cada um dos irmãos restantes ficou com $\frac{1}{3} \times \frac{16}{25} = \frac{16}{75}$ das jabuticabas. Como $\frac{1}{5} = \frac{15}{75}$ e $\frac{4}{25} = \frac{12}{75}$, a conclusão segue.

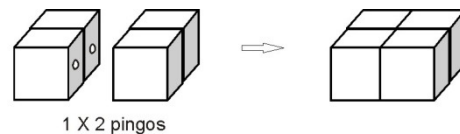
c) Como Carlos, Dulce e Eduardo ficaram com $\frac{16}{75}$ das jabuticabas cada um e essa fração é irredutível, o total de jabuticabas tem que ser múltiplo de 75; por outro lado, como cada um dos irmãos ficou com um número inteiro de jabuticabas menor ou igual a 20, o número total de jabuticabas é no máximo 100. O único múltiplo de 75 que é menor ou igual a 100 é o próprio 75. Logo, havia 75 jabuticabas na vasilha; Alberto ficou com $\frac{1}{5} \times 75 = 15$ jabuticabas, Beatriz com $\frac{4}{25} \times 75 = 12$ jabuticabas e Carlos, Dulce e Eduardo com $\frac{16}{75} \times 75 = 16$ jabuticabas cada um.

N1Q4 – Solução

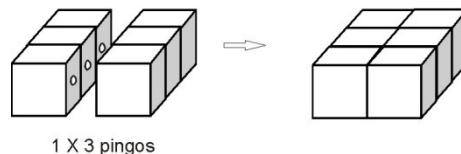
Para contar os pingos de cola que usa para montar sólidos, Cláudia começa contando quantos pingos de cola usa para fazer uma carreira de cubinhos. Para isso, ela precisa de tantos pingos quanto são os cubinhos, menos um. Assim, usa 1 pingo para unir 2 cubinhos, 2 pingos para unir 3 cubinhos, e assim por diante. Para unir duas carreiras iguais, ela usa tantos pingos quanto são os cubinhos de uma carreira. Logo, para colar 2 carreiras de 2 cubinhos, usa 2 pingos, para colar 2 carreiras de 3 cubinhos usa 3 pingos, e assim por diante.



Para formar camadas com altura de 1 cubinho, ela junta carreiras iguais. Para formar uma camada 2×2 , Cláudia une duas carreiras de dois cubinhos cada. O número total de pingos de cola é $1 \times 2 + 2 \times 1 = 1 \times 2 \times 2 = 4$.



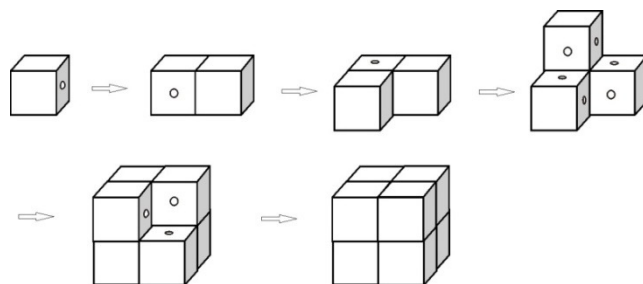
Para formar uma camada 2×3 , ela cola 2 carreiras de 3 cubos cada, usando um total de $1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$ pingos.



Para formar uma camada 3×3 , ela junta 2 carreiras de 3 cubinhos cada e, em seguida, mais uma carreira de 3 cubinhos cada, num total de $2 \times 3 + 3 \times 2 = 2 \times 3 \times 3 = 12$ pingos. De maneira semelhante, para formar uma camada 4×4 ela une 4 carreiras de 4 cubinhos, usando $3 \times 4 + 4 \times 3 = 2 \times 3 \times 4 = 24$ pingos, para uma de 5×5 , ela usa $2 \times 4 \times 5 = 40$, etc.

a) Para formar um cubo de 2 cm de aresta, Cláudia deve colar duas camadas 2×2 de cubinhos de 1 cm de aresta. Como vimos acima, em cada camada ela usa 4 pingos; logo, para formar as 2 camadas, ela usará $2 \times 4 = 8$ pingos. Como cada camada tem 4 cubinhos, para colar as duas camadas irá usar mais 4 pingos. No total, ela irá usar $8 + 4 = 12$ pingos.

Solução alternativa: Começando com um cubinho, Cláudia usa um pingo para juntar um cubinho na face ao lado, mais um para um cubinho em outra face vizinha ao lado e outro para a face vizinha de cima. Depois, 2 pingos para cada buraco (dois laterais e um em baixo) e, no final, mais 3 pingos para colar o último cubinho. No total, ela terá usado $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 12$ pingos de cola.

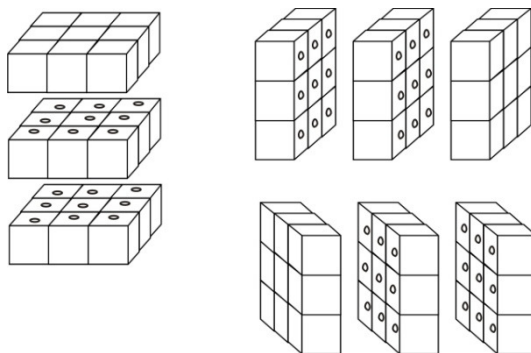


b) Para montar um cubo de aresta 3 cm, ela irá colar 3 camadas 3×3 de cubinhos. Como vimos acima, para formar cada uma dessas camadas ela usa 12 pingos, logo para montar as 3, ela irá usar $3 \times 12 = 36$ pingos. Como cada camada tem 9 cubinhos, para colar duas camadas, ela precisará de 9 pingos e, para colar a terceira camada, mais 9 pingos. No total, irá usar $36 + 2 \times 9 = 54$ pingos.

c) Para montar uma camada 3×3 , Cláudia usa 12 pingos de cola; para montar uma camada 5×5 , usa 40 pingos e para montar uma camada 7×7 , usa $2 \times 6 \times 7 = 84$ pingos. Para colar um cubinho na camada 3×3 , ela usa 1 pingo; para colar a camada 3×3 na camada de baixo ela usa 9 pingos (pois a camada 3×3 tem 9 cubinhos) e para colar a camada 5×5 na camada de baixo, ela usa 25 pingos (esta camada tem 25 cubinhos). Portanto, o número total de pingos de cola para montar o sólido é $12 + 40 + 84 + 1 + 9 + 25 = 171$.

Solução geral para cubos

Olhando para um cubo montado, podemos contar quantas faces de cubinhos estão em contato duas a duas. Para cada par dessas faces de cubinhos em contato, foi usado um pingo de cola. Basta contar então quantos cubinhos formam cada uma das camadas horizontais ou verticais, e contar quantas camadas há em cada direção. O número de pingos de cola em cada uma das três direções (uma horizontal e duas verticais diferentes) é o número de quadradinhos em cada camada multiplicado pelo número de camadas nessa direção menos um.



a) Para o cubo de 2 cm de aresta, cada camada tem 4 cubinhos de 1 cm. Como há duas camadas em cada uma das três direções, foram usados $1 \times 4 + 1 \times 4 + 1 \times 4 = 3 \times 1 \times 4 = 12$ pingos de cola.

b) Para o cubo de 3 cm de aresta, cada camada tem 9 cubinhos de 1 cm. Como há três camadas em cada uma das três direções, foram usados $2 \times 9 + 2 \times 9 + 2 \times 9 = 3 \times 2 \times 9 = 54$ pingos de cola.

Observação: na primeira construção de um cubo com n^3 cubinhos por carreiras e camadas, o número de pingos de cola usado é $[(n-1)n + n(n-1)]n + (n-1)n^2 = 3n^2(n-1)$, que corresponde à segunda solução (três direções de $n-1$ secções, com n^2 quadradinhos cada).

N1Q5 – Solução

a) O número 9 pode ser escrito como soma de duas parcelas inteiras de quatro maneiras diferentes: $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$. Como a ordem em que os cartões são escolhidos não altera sua soma, segue que Vítor pode escolher dois cartões azuis cujos números somam 9 de 4 maneiras diferentes.

b) *1ª solução:* Podemos escrever 9 como soma de dois números de 1 a 8 de 4 maneiras: $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$. No caso de cartões com a mesma cor, escolhemos uma das expressões de 9 como soma e depois a cor dos cartões; como as cores são em número de 3, isso pode ser feito de $4 \times 3 = 12$ maneiras. No caso de cartões de cores diferentes, escolhemos uma das expressões de 9, a cor de um dos cartões e uma cor diferente para o outro cartão; isso pode ser feito de $4 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras diferentes. No total, é possível escolher dois cartões cuja soma seja 9 de $12 + 24 = 36$ maneiras diferentes.

2ª solução: Para fazer uma escolha possível, Vítor deve pegar um par de cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9. Os números desses cartões podem ser escolhidos de 4 maneiras diferentes, como vimos no item anterior. Para cada um desses pares, a cor do cartão com o menor número pode ser escolhida de 3 maneiras diferentes, bem como a cor do cartão com o maior número; no total, as cores dos cartões de um par podem ser escolhidas de $3 \times 3 = 9$ maneiras diferentes. Como são 4 pares, o número total de escolhas é $4 \times 9 = 36$.

c) *1ª solução:* Há três casos a considerar.

- *Os três cartões têm a mesma cor:* as possibilidades para que sua soma 9 seja são $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$; como são 3 cores, o número de possibilidades nesse caso é $3 \times 3 = 9$.
- *Dois cartões de uma cor e o terceiro de uma cor diferente:* os dois cartões da mesma cor somam de 3 a 8; as possibilidades são aqui $3 = 1 + 2$, $4 = 1 + 3$, $5 = 1 + 4 = 2 + 3$, $6 = 1 + 5 = 2 + 4$, $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ e $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$, num total de 12 possibilidades; em qualquer caso, para completar a soma 9, o terceiro cartão pode ser escolhido de uma única maneira. Para as cores, temos 3 possibilidades para os cartões de mesma cor e 2 para o de cor diferente. No total, temos $12 \times 1 \times 3 \times 2 = 72$ possibilidades nesse caso.
- *Os cartões têm cores diferentes:* listamos a seguir as 28 possibilidades nesse caso; as letras A, B e V indicam, respectivamente, azul, branco e vermelho.

A	1	1	7	1	1	2	2	6	6	1	1	3	3	5	5	1	4	4	2	2	5	2	2	3	3	4	4	3
B	1	7	1	2	6	1	6	1	2	3	5	1	5	1	3	4	1	4	2	5	2	3	4	2	4	2	3	3
V	7	1	1	6	2	6	1	2	1	5	3	5	1	3	1	4	4	1	5	2	2	4	3	4	2	3	2	3

No total, o número de maneiras é então $9 + 72 + 28 = 109$.

2ª solução: Para fazer uma escolha possível, Vítor deve pegar um trio de cartões cuja soma seja igual a 9. Quanto aos números, há sete possibilidades para esses trios:

$$9 = 1 + 1 + 7 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$$

Observamos que os trios são de três tipos diferentes:

- (3,3,3) — os três números são iguais.
- (1,2,6), (1,3,5) e (2,3,4) — os três números são diferentes.

- $(1,1,7)$, $(1,4,4)$ e $(2,2,5)$ — um número é repetido duas vezes e o terceiro é diferente.

Há uma única maneira de escolher cartões para o trio $(3,3,3)$, a saber, um de cada cor. Já para os trios do segundo tipo, cada um dos números pode aparecer em qualquer das cores; nesse caso, há $3 \times 3 \times 3 = 27$ maneiras de escolher um desses trios. Como são 3 trios, o total aqui é $3 \times 27 = 81$ possibilidades.

Para um trio do terceiro tipo, devemos escolher duas cores distintas para os números repetidos, o que pode ser feito de 3 maneiras (AB, AV e BV) e depois uma cor qualquer para o número diferente, o que pode ser feito de 3 maneiras. Nesse caso, o total de possibilidades é $3 \times 3 = 9$; como são 3 trios desse tipo, obtemos $3 \times 9 = 27$ possibilidades.

Finalmente, o número total de possibilidades é a soma das possibilidades de cada caso, ou seja, $1 + 81 + 27 = 109$.

N1Q6 – Solução

a) A figura I indica, com o número 3, os quadrados contaminados no terceiro estágio e apresenta o resultado da contaminação ao final deste estágio.

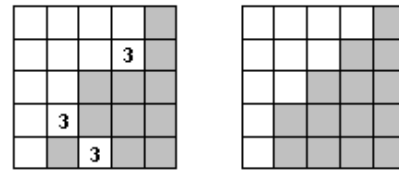


Figura I

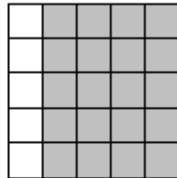
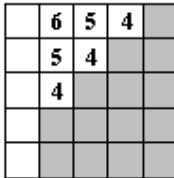


Figura II

b) A figura II indica os quadrados contaminados em cada estágio subsequente e mostra o resultado final da contaminação.

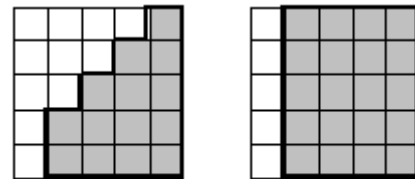


Figura III

c) Os perímetros de contaminação no terceiro e no último estágios, destacados na figura III, são ambos iguais a 18 (correspondentes a 8 lados horizontais e 10 lados verticais de quadrados).

d) Há várias configurações com 5 quadradinhos que levam à completa contaminação; a mais simples é a formada por 5 quadradinhos em uma diagonal.

e) Ao se acrescentar um quadrado à contaminação, cada lado exposto (ou seja, não em contato com outros quadrados) faz o perímetro de contaminação aumentar de uma unidade, enquanto cada lado em contato faz o perímetro diminuir de uma unidade. Portanto, a variação do perímetro de contaminação é igual à diferença entre o número de lados expostos e o número de lados em contato. Como um quadrado deve ter pelo menos dois lados em contato com outros quadrados para ser contaminado, esta diferença é sempre menor ou igual a zero. A tabela abaixo mostra os três casos possíveis:

lados em contato	lados expostos	variação do perímetro
2	2	$2 - 2 = 0$
3	1	$1 - 3 = -2$
4	0	$0 - 4 = -4$

e) Quando todos os quadrados estão contaminados, o perímetro de contaminação é igual a $4 \times 5 = 20$. Por outro lado, o perímetro de uma contaminação com n quadrados é no máximo igual a $4n$, que ocorre quando os n quadrados não têm lados em comum. Como o perímetro de contaminação nunca aumenta, para que esta contaminação seja capaz de contaminar todo o tabuleiro, é necessário que $4n$ seja no mínimo igual a 20; ou seja, n deve ser no mínimo igual a 5.