

N2Q1 – Solução

a) Com o número 92653 Mônica obteve a expressão $9 + 2 - 6 \times 5 \div 3$. Efetuando primeiro a multiplicação e, em seguida, a divisão (ou então a divisão seguida da multiplicação), temos $9 + 2 - 6 \times 5 \div 3 = 9 + 2 - 10 = 1$.

b) Para obtermos o maior resultado possível, observamos que a expressão é dada pela subtração $A - B$, como indicado na figura abaixo, onde as pequenas caixas representam as posições dos algarismos do número a partir da esquerda:

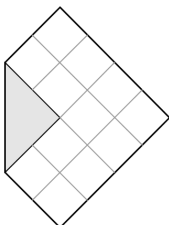
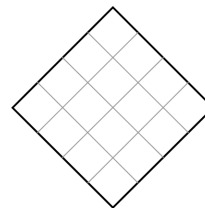
$$\underbrace{\boxed{1^a} + \boxed{2^a}}_A - \underbrace{\frac{\boxed{3^a} \times \boxed{4^a}}{\boxed{5^a}}}_B$$

Assim, o maior resultado será obtido quando maximizamos A e minimizamos B . Para maximizar A devemos escolher o algarismo 9 nas duas primeiras posições, caso em que $A = 9 + 9 = 18$; por outro lado, podemos fazer $B = 0$ colocando 0 na terceira posição ou na quarta posição e qualquer algarismo nas outras posições (exceto 0 na quinta posição). Logo o maior valor possível obtido por Mônica é $18 - 0 = 18$.

c) Utilizaremos o fato de que a expressão é dada por $A - B$, como no item anterior. Observamos que o menor valor de $A - B$ é obtido quando minimizamos A e maximizamos B . Como um número de cinco dígitos não começa por 0, o menor valor possível para A é $1 + 0 = 1$, quando temos 1 na primeira posição e 0 na segunda. Já para maximizar B devemos maximizar o numerador e minimizar o denominador. Isso acontece quando temos 9 na terceira e na quarta posições e 1 na quinta; nesse caso temos $B = \frac{9 \times 9}{1} = 81$. Logo o número que fornece o menor valor para a expressão criada por Mônica é 10991 e esse valor é $A - B = 1 - 81 = -80$.

N2Q2 – Solução

O quadrado original tem área de 16 cm^2 ; vamos dividi-lo em 16 quadradinhos de área 1 para proceder à solução.

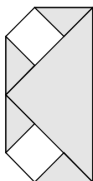
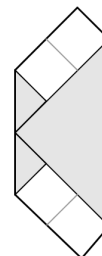


a) *1ª solução:* A primeira dobra deixa como parte não pintada uma região equivalente a 12 quadradinhos unitários. Portanto, a área da região não pintada da figura I é 12 cm^2 .

2ª solução: O triângulo cinzento da figura tem área igual a $\frac{1}{8}$ da área do quadrado. A área da região não pintada é então $1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$

da área do quadrado, ou seja, $\frac{3}{4} \times 16 = 12 \text{ cm}^2$.

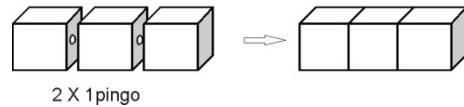
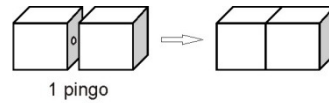
b) A segunda dobra deixa como partes não pintadas dois retângulos iguais, cada um deles composto por dois quadradinhos unitários. Portanto, a área da região não pintada na figura II é $2 + 2 = 4 \text{ cm}^2$.



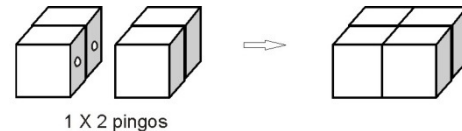
c) As duas últimas dobras horizontais deixam em branco apenas dois quadradinhos unitários. Portanto, a área da região não pintada na figura III é igual a $1 + 1 = 2 \text{ cm}^2$.

N2Q3 – Solução

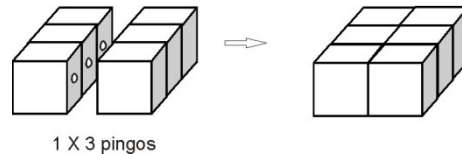
Para contar os pingos de cola que usa para montar sólidos, Cláudia começa contando quantos pingos de cola usa para fazer uma carreira de cubinhos. Para isso, ela precisa de tantos pingos quanto são os cubinhos, menos um. Assim, usa 1 pingo para unir 2 cubinhos, 2 pingos para unir 3 cubinhos, e assim por diante. Para unir duas carreiras iguais, ela usa tantos pingos quanto são os cubinhos de uma carreira. Logo, para colar 2 carreiras de 2 cubinhos, usa 2 pingos, para colar 2 carreiras de 3 cubinhos usa 3 pingos, e assim por diante.



Para formar camadas com altura de 1 cubinho, ela junta carreiras iguais. Para formar uma camada 2×2 , Cláudia une duas carreiras de dois cubinhos cada. O número total de pingos de cola é $1 \times 2 + 2 \times 1 = 1 \times 2 \times 2 = 4$.



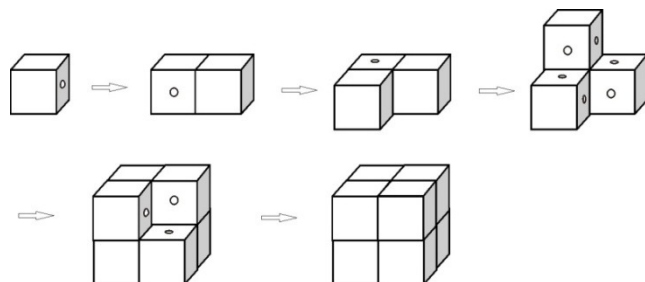
Para formar uma camada 2×3 , ela cola 2 carreiras de 3 cubos cada, usando um total de $1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$ pingos.



Para formar uma camada 3×3 , ela junta 2 carreiras de 3 cubinhos cada e, em seguida, mais uma carreira de 3 cubinhos cada, num total de $2 \times 3 + 3 \times 2 = 2 \times 2 \times 3 = 12$ pingos. De maneira semelhante, para formar uma camada 4×4 ela une 4 carreiras de 4 cubinhos, usando $3 \times 4 + 4 \times 3 = 2 \times 3 \times 4 = 24$ pingos, para uma de 5×5 , ela usa $2 \times 4 \times 5 = 40$, etc.

a) Para formar um cubo de 2 cm de aresta, Cláudia deve colar duas camadas 2×2 de cubinhos de 1 cm de aresta. Como vimos acima, em cada camada ela usa 4 pingos; logo, para formar as 2 camadas, ela usará $2 \times 4 = 8$ pingos. Como cada camada tem 4 cubinhos, para colar as duas camadas irá usar mais 4 pingos. No total, ela irá usar $8 + 4 = 12$ pingos.

Solução alternativa: Começando com um cubinho, Cláudia usa um pingo para juntar um cubinho na face ao lado, mais um para um cubinho em outra face vizinha ao lado e outro para a face vizinha de cima. Depois, 2 pingos para cada buraco (dois laterais e um em baixo) e, no final, mais 3 pingos para colar o último cubinho. No total, ela terá usado $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 12$ pingos de cola.

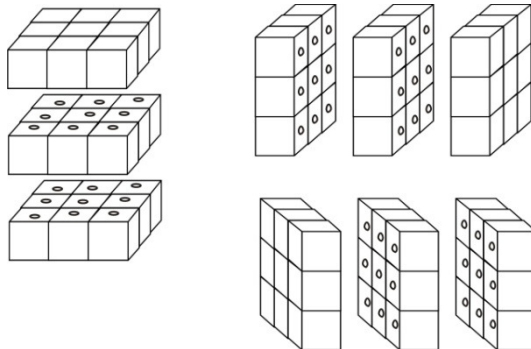


b) Para montar um cubo de aresta 3 cm, ela irá colar 3 camadas 3×3 de cubinhos. Como vimos acima, para formar cada uma dessas camadas ela usa 12 pingos, logo para montar as 3, ela irá usar $3 \times 12 = 36$ pingos. Como cada camada tem 9 cubinhos, para colar duas camadas, ela precisará de 9 pingos e, para colar a terceira camada, mais 9 pingos. No total, irá usar $36 + 2 \times 9 = 54$ pingos.

c) Para montar uma camada 3×3 , Cláudia usa 12 pingos de cola; para montar uma camada 5×5 , usa 40 pingos e para montar uma camada 7×7 , usa $2 \times 6 \times 7 = 84$ pingos. Para colar um cubinho na camada 3×3 , ela usa 1 pingo; para colar a camada 3×3 na camada de baixo ela usa 9 pingos (pois a camada 3×3 tem 9 cubinhos) e para colar a camada 5×5 na camada de baixo, ela usa 25 pingos (esta camada tem 25 cubinhos). Portanto, o número total de pingos de cola para montar o sólido é $12 + 40 + 84 + 1 + 9 + 25 = 171$.

Solução geral para cubos

Olhando para um cubo montado, podemos contar quantas faces de cubinhos estão em contato duas a duas. Para cada par dessas faces de cubinhos em contato, foi usado um pingo de cola. Basta contar então quantos cubinhos formam cada uma das camadas horizontais ou verticais, e contar quantas camadas há em cada direção. O número de pingos de cola em cada uma das três direções (uma horizontal e duas verticais diferentes) é o número de quadradinhos em cada camada multiplicado pelo número de camadas nessa direção menos um.



a) Para o cubo de 2 cm de aresta, cada camada tem 4 cubinhos de 1 cm. Como há duas camadas em cada uma das três direções, foram usados $1 \times 4 + 1 \times 4 + 1 \times 4 = 3 \times 1 \times 4 = 12$ pingos de cola.

b) Para o cubo de 3 cm de aresta, cada camada tem 9 cubinhos de 1 cm. Como há três camadas em cada uma das três direções, foram usados $2 \times 9 + 2 \times 9 + 2 \times 9 = 3 \times 2 \times 9 = 54$ pingos de cola.

Observação: na primeira construção de um cubo com n^3 cubinhos por carreiras e camadas, o número de pingos de cola usado é $[(n-1)n + n(n-1)]n + (n-1)n^2 = 3n^2(n-1)$, que corresponde à segunda solução (três direções de $n-1$ secções, com n^2 quadradinhos cada).

N2Q4 – Solução

a) A figura I indica, com o número 3, os quadrados contaminados no terceiro estágio e apresenta o resultado da contaminação ao final deste estágio.

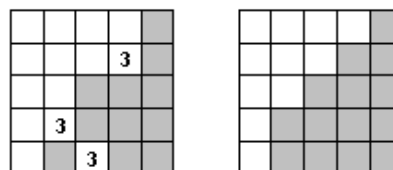


Figura I

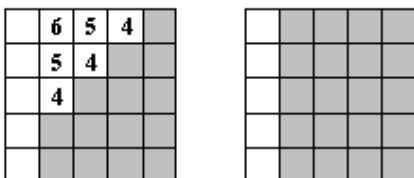


Figura II

b) A figura II indica os quadrados contaminados em cada estágio subsequente e mostra o resultado final da contaminação.

c) Os perímetros de contaminação no terceiro e no último estágios, destacados na figura III, são ambos iguais a 18 (correspondentes a 8 lados horizontais e 10 lados verticais de quadrados).

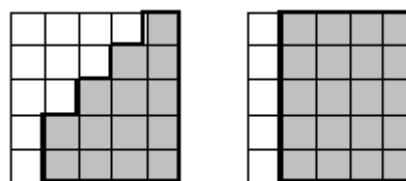


Figura III

d) Há várias configurações com 5 quadradinhos que levam à completa contaminação; a mais simples é a formada por 5 quadradinhos em uma diagonal.

e) Ao se acrescentar um quadrado à contaminação, cada lado exposto (ou seja, não em contato com outros quadrados) faz o perímetro de contaminação aumentar de uma unidade, enquanto cada lado em contato faz o perímetro diminuir de uma unidade. Portanto, a variação do perímetro de contaminação é igual à diferença entre o número de lados expostos e o número de lados em contato. Como um quadrado deve ter pelo menos dois lados em contato com outros quadrados para ser contaminado, esta diferença é sempre menor ou igual a zero. A tabela abaixo mostra os três casos possíveis:

lados em contato	lados expostos	variação do perímetro
2	2	$2 - 2 = 0$
3	1	$1 - 3 = -2$
4	0	$0 - 4 = -4$

e) Quando todos os quadrados estão contaminados, o perímetro de contaminação é igual a $4 \times 5 = 20$. Por outro lado, o perímetro de uma contaminação com n quadrados é no máximo igual a $4n$, que ocorre quando os n quadrados não têm lados em comum. Como o perímetro de contaminação nunca aumenta, para que esta contaminação seja capaz de contaminar todo o tabuleiro, é necessário que $4n$ seja no mínimo igual a 20; ou seja, n deve ser no mínimo igual a 5.

N2Q5 – Solução

a) O algarismo 1 é composto por dois polígonos, indicados na figura por A e B. Para pintar o polígono A, há 3 opções: branco, cinza e preto. Já para pintar o polígono B, há 2 opções, uma vez que sua cor não pode coincidir com aquela já usada para pintar A. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 1 pode ser pintado de $3 \times 2 = 6$ maneiras distintas.



b) Iniciamos observando que há 3 opções para pintar o polígono A. Uma vez que A foi pintado, há duas opções para pintar o polígono B e, como o polígono C é vizinho de A e B, só há uma cor possível para C.

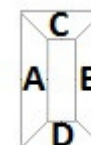


A cor do polígono D não deve coincidir com a cor de B, logo para cada cor escolhida para B, há 2 opções para a cor de D. Analogamente, há 2 opções para a cor de E.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 24$ maneiras distintas para pintar o algarismo 3.

c) Vamos distinguir dois casos.

- *As cores de A e B coincidem:* neste caso há 3 opções de cores para A e B, e restam 2 opções de cores para C e 2 para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras distintas.
- *As cores de A e B são diferentes:* neste caso, há 3 opções de cores para pintar A e, para cada uma dessas, há 2 opções para pintar B, restando apenas 1 opção para C e também para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ maneiras distintas.

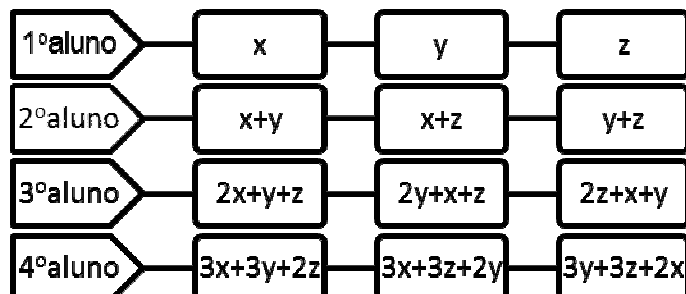


Segue do Princípio Aditivo que o algarismo 0 pode ser pintado de $12 + 6 = 18$ maneiras distintas.

d) Basta pintar os algarismos 2, 0, 1 e 3; o 2 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras diferentes e o número de maneiras de pintar os outros algarismos já foi calculado nos itens anteriores. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $12 \times 6 \times 24 \times 18 = 31104$ maneiras distintas de pintar o número 2013.

N2Q6 – Solução

Vamos denotar por x , y e z os números ditos pelo 1º aluno da fila. O esquema a seguir fornece os números ditos pelos alunos, até o 4º da fila.



a) 1ª solução: Basta fazer a tabela que segue.

1º aluno	2, 5, 6
2º aluno	$2 + 5 = 7$, $2 + 6 = 8$, $5 + 6 = 11$
3º aluno	$7 + 8 = 15$, $7 + 11 = 18$, $8 + 11 = 19$

2ª solução: Para $x=2$, $y=5$ e $z=6$, o 3º aluno dirá, de acordo com o diagrama acima, $2 \times 2 + 5 + 6 = 15$, $2 \times 5 + 2 + 6 = 18$ e $2 \times 6 + 2 + 5 = 19$.

b) 1ª solução: as possibilidades para escrever 13 e 14 como soma de dois números inteiros positivos são

$$\begin{aligned}
 13 &= 1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7 \\
 14 &= 1 + 13 = 2 + 12 = 3 + 11 = 4 + 10 = 5 + 9 = 6 + 8
 \end{aligned}$$

Afirmamos que 1 não foi um dos números escolhidos pelo 2º aluno. De fato, se ele tivesse escolhido 1, seus outros dois números teriam sido 12 e 13; mas $12 + 13 = 25$, que não foi o terceiro número falado pelo 3º aluno. O mesmo argumento elimina todas as possibilidades de escolha para os números escolhidos pelo segundo aluno, exceto 3, 10 e 11; segue que os números escolhidos pelo primeiro aluno foram 1, 2 e 9.

2ª solução: Sejam x , y e z os números ditos pelo 1º aluno da fila. O 3º aluno disse os números 13, 14 e 21; podemos supor que

$$\begin{cases}
 2x + y + z = 13 \\
 2y + x + z = 14 \\
 2z + x + y = 21
 \end{cases}$$

Somando as três equações temos $4x + 4y + 4z = 48$, o que nos leva a $x + y + z = 12$. Logo $2x + y + z = x + (x + y + z) = x + 12 = 13$ e segue que $x = 1$. Procedendo de modo análogo, obtemos $y = 2$ e $z = 9$ como os números ditos pelo 1º aluno da fila.

c) Sejam x , y e z os números ditos pelo 1º aluno da fila; podemos supor que

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 48 \\ 3x + 2y + 3z = 61 \end{cases}$$

Subtraindo essas equações obtemos $z - y = 13$, ou seja, $z = y + 13$; substituindo nas equações acima obtemos

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2(y + 13) = 3x + 5y + 26 = 48 \\ 3x + 2y + 3(y + 13) = 3x + 5y + 39 = 61 \end{cases}$$

Simplificando, obtemos

$$\begin{cases} 3x + 5y = 22 \\ 5y = 22 - 3x \end{cases}$$

Da segunda equação vemos que $22 - 3x$ deve ser um múltiplo positivo de 5, o que só acontece para $x = 4$; segue então que devemos ter $y = 2$ e $z = 15$. O terceiro número que o 4º aluno falou é então $3y + 3z + 2x = 3 \times 2 + 3 \times 15 + 2 \times 4 = 59$.