

N3Q1 – Solução

a) O valor da área de cada painel é igual ao total de lâmpadas vermelhas que o mesmo usa. Logo, em um painel de 5 metros por 8 metros há $5 \times 8 = 40$ lâmpadas vermelhas.

b) Um painel de 5 metros por 8 metros contém 6 linhas horizontais e 9 linhas verticais, que formam entre si $6 \times 9 = 54$ interseções. De acordo com o enunciado, em cada uma dessas interseções é colocada uma lâmpada azul; logo há 54 lâmpadas azuis.

c) *1ª solução:* Em um painel de m metros por n metros, o número de lâmpadas azuis que há na borda coincide com o valor do seu perímetro, que é igual a $2(m+n)$. Por argumentos análogos aos usados nos itens (a) e (b), vemos que este painel usa $mn=72$ lâmpadas vermelhas e $(m+1)(n+1)=90$ lâmpadas azuis. Da última igualdade segue que $mn+(m+n)+1=90$ e então temos $m+n=90-mn-1=90-72-1=17$. Assim, o número de lâmpadas azuis que estão na borda do painel é $2(m+n)=2 \cdot 17=34$.

2ª solução: A área do painel é 72 (total de lâmpadas vermelhas), assim as possíveis dimensões do painel são as seguintes (em metros): 1×72 , 2×36 , 3×24 , 4×18 , 6×12 e 8×9 . A mesma argumentação usada no item (b) mostra apenas 8×9 corresponde a um painel que tem um total de 90 lâmpadas azuis, pois $90=(8+1)(9+1)$. Como o número de lâmpadas azuis que há na borda coincide com o valor do perímetro do painel, temos então que há $2(8+9)=34$ lâmpadas azuis na borda do painel.

N3Q2 – Solução

a) A figura I indica, com o número 3, os quadrados contaminados no terceiro estágio e apresenta o resultado da contaminação ao final deste estágio.

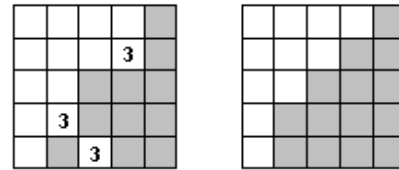


Figura I

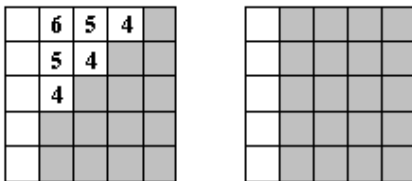


Figura II

b) A figura II indica os quadrados contaminados em cada estágio subsequente e mostra o resultado final da contaminação.

c) Os perímetros de contaminação no terceiro e no último estágios, destacados na figura III, são ambos iguais a 18 (correspondentes a 8 lados horizontais e 10 lados verticais de quadrados).

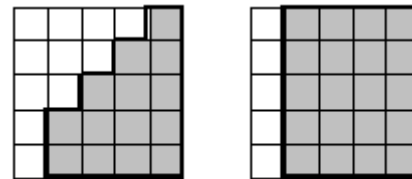


Figura III

d) Há várias configurações com 5 quadradinhos que levam à completa contaminação; a mais simples é a formada por 5 quadradinhos em uma diagonal.

e) Ao se acrescentar um quadrado à contaminação, cada lado exposto (ou seja, não em contato com outros quadrados) faz o perímetro de contaminação aumentar de uma unidade, enquanto cada lado em contato faz o perímetro diminuir de uma unidade. Portanto, a variação do perímetro de contaminação é igual à diferença entre o número de lados expostos e o número de lados em contato. Como um quadrado deve ter pelo menos dois lados em contato com outros quadrados para ser contaminado, esta diferença é sempre menor ou igual a zero. A tabela abaixo mostra os três casos possíveis:

lados em contato	lados expostos	variação do perímetro
2	2	$2 - 2 = 0$
3	1	$1 - 3 = -2$
4	0	$0 - 4 = -4$

e) Quando todos os quadrados estão contaminados, o perímetro de contaminação é igual a $4 \times 5 = 20$. Por outro lado, o perímetro de uma contaminação com n quadrados é no máximo igual a $4n$, que ocorre quando os n quadrados não têm lados em comum. Como o perímetro de contaminação nunca aumenta, para que esta contaminação seja capaz de contaminar todo o tabuleiro, é necessário que $4n$ seja no mínimo igual a 20; ou seja, n deve ser no mínimo igual a 5.

N3Q3 – Solução

a) O algarismo 1 é composto por dois polígonos, indicados na figura por A e B. Para pintar o polígono A, há 3 opções: branco, cinza e preto. Já para pintar o polígono B, há 2 opções, uma vez que sua cor não pode coincidir com aquela já usada para pintar A. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 1 pode ser pintado de $3 \times 2 = 6$ maneiras distintas.



b) Iniciamos observando que há 3 opções para pintar o polígono A. Uma vez que A foi pintado, há duas opções para pintar o polígono B e, como o polígono C é vizinho de A e B, só há uma cor possível para C.

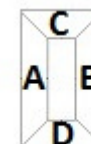


A cor do polígono D não deve coincidir com a cor de B, logo para cada cor escolhida para B, há 2 opções para a cor de D. Analogamente, há 2 opções para a cor de E.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 24$ maneiras distintas para pintar o algarismo 3.

c) Vamos distinguir dois casos.

- *As cores de A e B coincidem:* neste caso há 3 opções de cores para A e B, e restam 2 opções de cores para C e 2 para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras distintas.
- *As cores de A e B são diferentes:* neste caso, há 3 opções de cores para pintar A e, para cada uma dessas, há 2 opções para pintar B, restando apenas 1 opção para C e também para D. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o algarismo 0 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ maneiras distintas.

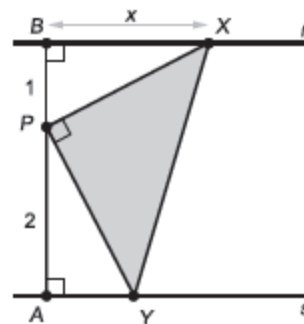


Segue do Princípio Aditivo que o algarismo 0 pode ser pintado de $12 + 6 = 18$ maneiras distintas.

d) Basta pintar os algarismos 2, 0, 1 e 3; o 2 pode ser pintado de $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras diferentes e o número de maneiras de pintar os outros algarismos já foi calculado nos itens anteriores. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $12 \times 6 \times 24 \times 18 = 31104$ maneiras distintas de pintar o número 2013.

N3Q4 – Solução

a) Do enunciado temos (i) $\widehat{PAY} = \widehat{XBP} = 90^\circ$. Além disso, temos $\widehat{BPX} + 90^\circ + \widehat{APY} = 180^\circ$, o que nos dá (ii) $\widehat{APY} = 90^\circ - \widehat{BPX}$. Por outro lado, no triângulo XBP os ângulos $\widehat{BPX}$ e $\widehat{BXP}$ são complementares e segue que (iii) $\widehat{BXP} = 90^\circ - \widehat{BPX}$. De (ii) e (iii) obtemos (iv) $\widehat{APY} = \widehat{BXP}$. Finalmente, de (i) e (iv) segue a semelhança dos triângulos PAY e XBP .



b) 1ª solução Seja $AY = y$. A semelhança dos triângulos PAY e XBP nos dá

(i) $\frac{y}{1} = \frac{2}{x}$. Decompondo o trapézio $AYXB$ nos triângulos XPY , PAY e XBP , temos

(ii) $\text{área}(XPY) = \text{área}(AYXB) - \text{área}(XBP) - \text{área}(PAY)$.

Usando (i), temos

$$\text{área}(AYXB) = \frac{x+y}{2} \cdot 3 = \frac{x+\frac{2}{x}}{2} \cdot 3 = \frac{3x}{2} + \frac{3}{x}$$

$$\text{área}(XBP) = \frac{x \cdot 1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\text{área}(PAY) = \frac{y \cdot 2}{2} = \frac{2}{x}$$

Substituindo estas expressões em (ii) obtemos

$$\text{área}(XPY) = \frac{3x}{2} + \frac{3}{x} - \frac{x}{2} - \frac{2}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

Solução análoga pode ser obtida baixando por X uma perpendicular à reta AB , denotando por C o ponto de interseção dessa perpendicular e da reta AB e fazendo

$$\text{área}(XPY) = \text{área}(ABXC) - \text{área}(PAY) - \text{área}(XBP) - \text{área}(XYC)$$

2ª solução: Seja $AY = y$. A semelhança dos triângulos PAY e XBP nos dá a

relação $\frac{y}{1} = \frac{2}{x}$. Segue do teorema de Pitágoras que $PX = \sqrt{1+x^2}$ e

$$PY = \sqrt{4+y^2} = \sqrt{4+\frac{4}{x^2}} = \frac{2}{x} \sqrt{1+x^2}.$$

Temos então

$$\text{área}(XPY) = \frac{PX \cdot PY}{2} = \frac{\sqrt{1+x^2} \times 2\sqrt{1+x^2}}{2x} = \frac{1+x^2}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

c) Devemos resolver a equação $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, ou seja, $2x^2 - 5x + 2 = 0$; suas raízes são

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = 2.$$

d) 1ª solução: Queremos encontrar o menor valor positivo de a tal que a equação $x + \frac{1}{x} = a$ tem solução positiva x . Essa equação é a mesma $x^2 - ax + 1 = 0$, que tem soluções $x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ e $x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ sempre que $\Delta = a^2 - 4 \geq 0$ (nesse caso, essas soluções são sempre positivas, pois $0 \leq \sqrt{a^2 - 4} < a$ para qualquer $a > 0$). O menor valor de a que satisfaz a condição $\Delta \geq 0$ é $a = 2$; nesse caso, $\Delta = 0$ e a única solução da equação é $x = 1$. Logo (XPY) assume seu valor mínimo quando $x = 1$, quando $(XPY) = 2$; observamos que esse é o caso em que os triângulos PAY e XBP são isósceles.

2ª solução: Escrevemos $x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2$, lembrando que $x > 0$. Como um quadrado é sempre maior ou igual a zero, vemos que o valor mínimo da expressão $x + \frac{1}{x}$ ocorre quando $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, ou seja, quando $x = 1$; nesse caso, esse valor mínimo é 2.

3ª solução: Se $x = 1$ então $x + \frac{1}{x} = 2$. Se $x \neq 1$ então $x + \frac{1}{x} > 2$; de fato, se $x + \frac{1}{x} \leq 2$ então $x^2 - 2x + 1 \leq 0$, ou seja, $(x - 1)^2 \leq 0$, um absurdo. Logo a área é mínima para $x = 1$ e seu valor nesse ponto é 2.

4ª solução: Se $x \neq 1$ podemos escrever $x = 1 \pm k$, com $k > 0$. Raciocínio análogo ao da 3ª solução mostra então que, em ambos os casos, temos $x + \frac{1}{x} > 2$.

5ª solução: a desigualdade aritmético-geométrica diz que se a e b são dois números positivos então sua média aritmética é maior que sua média geométrica, isto é,

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (exercício). Fazendo $x = a$ e $\frac{1}{x} = b$, temos $\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$, ou seja, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ para qualquer valor de x ; como para $x = 1$ temos $x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1} = 2$, segue que esse é o valor mínimo da área.

N3Q5 – Solução

a) Ao se sortear uma bola da 2ª caixa, há 10 bolas idênticas, uma das quais é amarela. Logo, a probabilidade de que a segunda bola retirada seja amarela é $\frac{1}{10}$.

b) Ao se sortear uma bola da 2ª caixa, há duas bolas com o mesmo número da primeira bola sorteada (uma amarela e uma branca). A probabilidade de que uma delas seja a 2ª bola sorteada é $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

c) 1ª solução: A primeira bola pode ser sorteada de 9 maneiras e a segunda de 10. O número total de possibilidades para o sorteio das duas bolas é, portanto, $9 \times 10 = 90$. Para contar quantos são os sorteios em que a segunda bola tem o número 1, consideraremos dois casos:

- A bola sorteada da 1ª caixa tem o número 1. Neste caso, há apenas uma possibilidade para o sorteio da 1ª bola, mas duas para o sorteio da 2ª (já que há duas bolas com o número 1 na segunda caixa quando ela é sorteada). Logo, há $1 \times 2 = 2$ formas de se obter 1 na 2ª bola.
- A bola sorteada da 1ª caixa tem o número diferente de 1. Neste caso, há 8 possibilidades para o sorteio da 1ª bola, e apenas uma para o sorteio da 2ª (já que há somente uma bola com o número 1 na segunda caixa quando ela é sorteada). Logo, há $8 \times 1 = 8$ formas de se obter 1 na 2ª bola.

A probabilidade de que a segunda bola tenha o número 1 é, portanto,

$$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{2 + 8}{90} = \frac{1}{9}$$

2ª solução: As bolas de 1 a 9 figuram em igual quantidade em ambas as caixas. Logo, mesmo depois de passada uma bola da 1ª para a 2ª, todos os números continuam tendo a mesma chance de serem sorteados. Portanto, a probabilidade de que a segunda bola seja a bola de número 1 é $\frac{1}{9}$.

3ª solução:

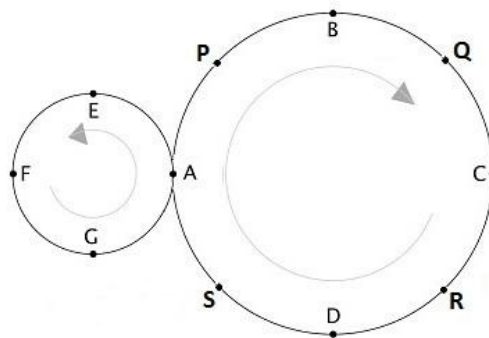
$$P(2^\text{a} \text{ bola} = 1) =$$

$$P(1^\text{a} \text{ bola} = 1) \times P(2^\text{a} \text{ bola} = 1 | 1^\text{a} \text{ bola} = 1) + P(1^\text{a} \text{ bola} \neq 1) \times P(2^\text{a} \text{ bola} = 1 | 1^\text{a} \text{ bola} \neq 1) =$$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{10} + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{9}$$

N3Q6 – Solução

Iniciamos fazendo algumas observações gerais. Como os ciclistas percorrem a pista com velocidade constante, e gastam o mesmo tempo para percorrer a circunferência menor, concluímos que eles se deslocam com a mesma velocidade. Consequentemente, se eles partem de pontos diferentes, eles podem se encontrar apenas quando passam pelo ponto A, chegando por circunferências distintas.



Para facilitar nossa descrição, colocamos mais quatro pontos na circunferência maior, indicados pelas letras P, Q, R e S, como na figura, de modo que distância entre quaisquer dois destes pontos consecutivos, ao longo da pista, é sempre a mesma e igual a 500 metros, que é $1/8$ de volta na circunferência maior. Vamos chamar de *módulo* o percurso entre dois destes pontos consecutivos. Então, a pista é formada por 12 módulos e, como os ciclistas gastam 8 minutos para percorrer a circunferência menor, eles gastam 2 minutos para percorrer um módulo e 24 minutos para dar uma volta completa na pista.

a) O ciclista que parte do ponto B chegará pela primeira vez ao ponto A após percorrer 6 módulos, portanto após 12 minutos de sua partida. O percurso percorrido por ele é denotado pela sequência BQCRDSA, indicando os pontos pelos quais o ciclista parte, passa e chega. Por outro lado, o outro ciclista, que parte do ponto D, chega em A pela primeira vez após percorrer 2 módulos, ou seja, após 4 minutos, quando troca de circunferência e chega pela segunda vez em A depois de dar uma volta completa na circunferência menor, totalizando 12 minutos após sua partida. O seu percurso é DSAEFGA. Logo, os ciclistas se encontram pela primeira vez, em A, após 12 minutos do momento em que partiram.

b) Como eles levaram 20 minutos para se encontrar, sabemos que cada ciclista percorreu 10 módulos entre o ponto de partida e o ponto A, onde se encontraram. Assim, para determinar os possíveis pontos de partida dos ciclistas basta percorrer, a partir de A, 10 módulos no sentido contrário ao do deslocamento na pista. Podemos fazer isto de apenas duas maneiras:

- partindo de A pela circunferência maior, fazendo o percurso ASDRCQBPAFG, e portanto chegando ao ponto de partida F; e
- partindo de A pela circunferência menor, fazendo o percurso AGFEASDRCQB, e portanto chegando ao ponto de partida B.

Consequentemente, um dos ciclistas partiu do ponto B e o outro de F.

c) Consideremos as semicircunferências $\widehat{ABC}$, $\widehat{CDA}$, $\widehat{AEF}$ e $\widehat{FGA}$; observando o sentido do percurso e lembrando que os ciclistas se deslocam com a mesma velocidade constante v , podemos fazer a seguinte tabela, que descreve o comportamento da distância entre os ciclistas, dependendo das semicircunferências nas quais se encontram:

Ciclistas	Distância entre eles
Os dois estão na mesma circunferência	constante
Um está em $\widehat{ABC}$ e outro em $\widehat{FGA}$	
Um está em $\widehat{CDA}$ e outro em $\widehat{AEF}$	
Um está em $\widehat{ABC}$ e outro em $\widehat{AEF}$	aumenta
Um está em $\widehat{CDA}$ e outro em $\widehat{FGA}$	diminui

No caso em que eles se encontram nas semicircunferências $\widehat{ABC}$ e $\widehat{AEF}$, eles se afastam com velocidade constante $2v$; como a distância é uma função linear do tempo (supondo a velocidade constante), o gráfico da distância entre eles em função do tempo, nesse caso, também é linear. O mesmo vale se eles se encontram nas semicircunferências $\widehat{CDA}$ e $\widehat{FGA}$, pois nesse caso eles se aproximam com velocidade constante $2v$. Assim, o gráfico é formado por segmentos de reta, como vemos abaixo.

Para facilitar a leitura do gráfico, em cada tempo considerado, indicamos, abaixo do eixo horizontal, o ponto da pista onde se encontrava cada um dos ciclistas.

