

QUESTÃO 1 ALTERNATIVA C

Seja x o número de caras consecutivas obtidas após os primeiros 2014 lançamentos. Então, de acordo com o enunciado do problema, x deverá satisfazer a igualdade

$$997 + x = \frac{2014 + x}{2},$$

ou, equivalentemente, $1994 + 2x = 2014 + x$, de onde obtemos $x = 2014 - 1994 = 20$.

QUESTÃO 2 ALTERNATIVA B

Como $x > 0$, multiplicamos os termos das desigualdades $0 < x < y < 1$ por x e obtemos:

$$x \cdot 0 < x^2 < xy < x$$

Concluimos que $0 < xy < x$.

QUESTÃO 3 ALTERNATIVA D

Podemos organizar as informações numa tabela:

	mês	dia do mês	dia da semana
Andrea	agosto	16	segunda
Daniela	agosto	16	terça
Fernanda	setembro	17	terça
Patrícia	agosto	17	segunda
Tatiane	setembro	17	segunda

Se Andrea estivesse certa, então Fernanda não acertaria nenhuma das informações. Logo, não é ela que está certa, nem Fernanda (pelo mesmo motivo). Se Daniela estivesse certa, então Tatiane também nada acertaria. Logo Daniele e Tatiane não estão certas. Se Patrícia acertar tudo, as demais também acertarão alguma informação e, portanto, Patrícia é a única que está certa.

QUESTÃO 4 ALTERNATIVA B

Nos dois primeiros minutos, o carro andou a $90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{90 \text{ km}}{60 \text{ min}} = 1,5 \frac{\text{km}}{\text{min}}$, ou seja, Guilherme andou, nos primeiros 2 minutos, $2 \times 1,5 = 3$ km. Falta percorrer $5 - 3 = 2$ km no tempo de 3 minutos.

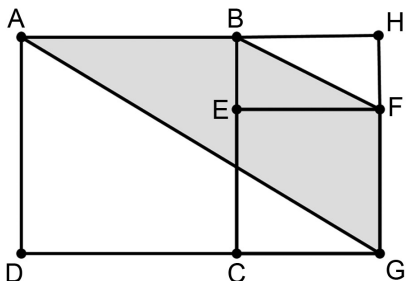
A velocidade suficiente para isto é $\frac{2 \text{ km}}{3 \text{ min}} = \frac{2 \text{ km}}{3 \text{ min} \cdot \frac{1}{60} \text{ h/min}} = \frac{2}{\frac{1}{20}} \text{ km/h} = 40 \text{ km/h}$.

QUESTÃO 5 ALTERNATIVA A

O lado do quadrado maior é $\sqrt{R}$ e o lado do menor $\sqrt{S}$. Traçamos o segmento BG e vemos que ele divide a região cinza em dois triângulos ABG e BFG , cujas áreas, somadas, dão a área da região cinza. A área do triângulo

$$ABG \text{ é } \frac{\sqrt{R} \cdot \sqrt{R}}{2} = \frac{R}{2} \text{ e a área do triângulo } BFG \text{ é } \frac{\sqrt{S} \cdot \sqrt{S}}{2} = \frac{S}{2}. \text{ Logo, a área}$$

$$\text{da região cinza é } \frac{R+S}{2}.$$

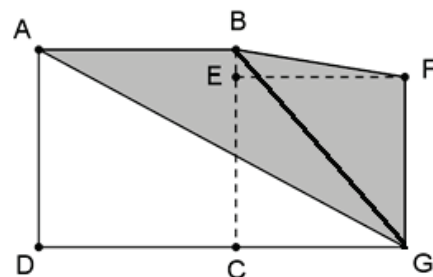


Outra solução:

Construímos o triângulo BFH congruente ao triângulo BEF e denotamos por X a área de cada um deles. Se a área da região cinza é Y observamos que

$$Y + X = \frac{A(ADGH)}{2} = \frac{R+S+2X}{2} = \frac{R+S}{2} + X,$$

$$\text{de onde concluímos que } Y = \frac{R+S}{2}.$$

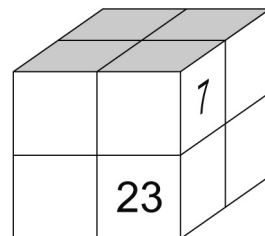


QUESTÃO 6 ALTERNATIVA C

Como em cada face aparecem quatro números consecutivos, então na face onde estiver o número 1, obrigatoriamente estarão os números 1, 2, 3 e 4. Logo, na face onde estiver o número 5 estarão os números 5, 6, 7 e 8, e assim, sucessivamente, até chegarmos à face com os números 21, 22, 23 e 24.

Sendo assim, no cubo apresentado a face com o número 23 também apresenta os números 21, 22 e 24. Como o enunciado diz que a soma do maior número de uma face com o menor da face oposta é igual a 25, podemos concluir que na face oposta à que contém o 23 estão os números 1, 2, 3 e 4. Na face em que aparece o número 7 aparecem os números 5, 6 e 8, e na face oposta a esta estão os números 17, 18, 19 e 20. Logo, na face destacada (em cinza) pode estar qualquer número de 9 até 16.

Como a pergunta é qual é o menor número que pode aparecer na face cinza, a resposta é 9.



QUESTÃO 7 ALTERNATIVA B

Quando pintarmos o papel em forma de pentágono dos dois lados, a área total pintada será de 28 cm^2 . Esta área pintada inclui a área de um dos lados do retângulo original, que ficará totalmente azul, e a área pintada do outro lado. Se da área total de 40 cm^2 , correspondente aos dois lados do retângulo, retirarmos a área pintada de 28 cm^2 , teremos 12 cm^2 de área não pintada.

QUESTÃO 8 ALTERNATIVA D

Cada figura é formada por 3 cópias da figura anterior, posicionadas de modo a colocar em contato apenas dois pares de quadradinhos das cópias das figuras. Em consequência, o comprimento do contorno da nova figura é igual a 3 vezes o comprimento do contorno da anterior, menos 4 cm (correspondentes aos lados em contato).

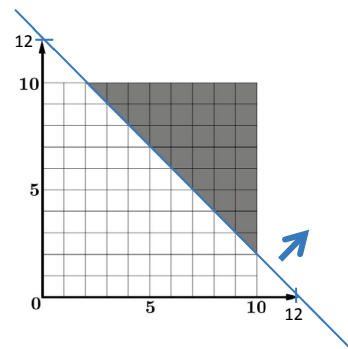
A tabela abaixo dá o comprimento do contorno das sucessivas figuras.

Figura	Contorno (cm)
1	4
2	$3 \times 4 - 4 = 8$
3	$3 \times 8 - 4 = 20$
4	$3 \times 20 - 4 = 56$
5	$3 \times 56 - 4 = 164$
6	$3 \times 164 - 4 = 488$

Portanto, o contorno da Figura 6 mede 488 cm.

QUESTÃO 9 ALTERNATIVA E

As notas x e y obtidas pelo aluno nas duas provas devem ser tais que $\frac{x+y}{2} \geq 6$, ou seja, $x+y \geq 12$. Os pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a equação $x+y=12$ pertencem à reta que corta os eixos nos pontos $(0, 12)$ e $(12, 0)$. Os que satisfazem a desigualdade correspondem ao semiplano determinado por esta reta que não contém a origem. A região pedida é a interseção desse semiplano com o quadrado formado pelas notas possíveis (ou seja, satisfazendo às condições $0 \leq x \leq 10$ e $0 \leq y \leq 10$), representada na alternativa E.



QUESTÃO 10 ALTERNATIVA C

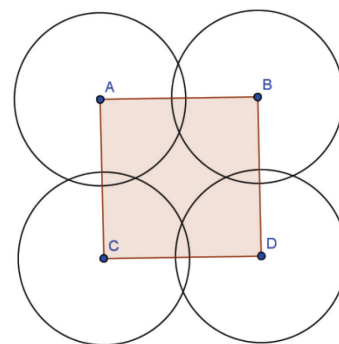
Como Gustavo possui pelo menos uma moeda de cada tipo, ele não pode ter 2 moedas de 50 centavos, senão formaria 1 real. Ele também não pode ter 2 moedas de 25 centavos. Com a moeda de 50 centavos e com uma moeda de 25 centavos ele também não pode formar 1 real. Concluímos assim, que Gustavo possui uma moeda de 50 centavos e uma moeda de 25 centavos. Gustavo não pode ter 5 moedas de 10 centavos, senão junto com a moeda de 50 centavos ele formaria 1 real.

Para maximizar, podemos supor que ele tem, então, quatro moedas de 10 centavos. Com elas e com as moedas de 50 e 25 centavos ele não consegue formar 1 real. Por fim, ele não pode ter cinco moedas de 1 centavo, pois se tivesse, formaria 1 real juntando a elas a moeda de 50 centavos com a de 25 centavos e mais duas de 10 centavos. Assim, Gustavo deve ter, no máximo, quatro moedas de 1 centavo. Logo, o maior valor total possível que Gustavo pode ter é $50 + 25 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 119$ centavos, ou seja, R\$ 1,19.

QUESTÃO 11 ALTERNATIVA E

Devido às simetrias presentes na figura, podemos construir o quadrado $ABCD$, com vértices A, B, C e D situados nos centros de cada uma das circunferências, conforme mostrado na figura. Observamos que em cada circunferência, os dois lados do quadrado que saem do centro dela determinam um arco cujo

comprimento é $\frac{3}{2} + 3 + \frac{3}{2} = 6$, sendo essa medida a quarta parte do comprimento de cada círculo. Logo, o comprimento de cada círculo é 24.



QUESTÃO 12 ALTERNATIVA D

Como $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, tem-se $n \geq 13$. Por outro lado,

$$13! = 13 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10},$$

$$\text{E, portanto, } \frac{n!}{13!} = \frac{2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 14 \cdot 15 \cdot 16.$$

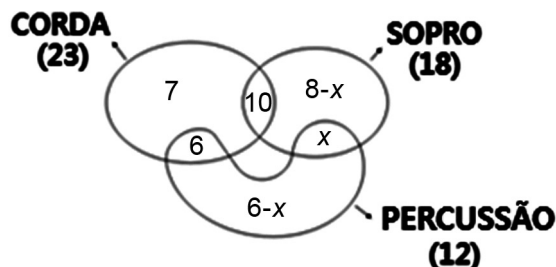
Logo, $n! = 13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 16!$, ou seja, $n = 16$.

QUESTÃO 13 ALTERNATIVA A

As informações sobre os componentes da orquestra estão representadas no diagrama.

Seja x o número de componentes que tocam instrumentos de sopro e percussão. É claro que $x \leq 6$.

O número de componentes da orquestra é dado pela soma: $23 + 8 + (6 - x) = 37 - x$; sabendo que $x \leq 6$, temos que o número mínimo de componentes da orquestra ocorre quando $x = 6$, ou seja, quando a orquestra tem 31 componentes.



QUESTÃO 14 ALTERNATIVA E

Seja x a distância percorrida com as duas juntas e y a distância percorrida apenas por Talia, fica claro que Isabel deve pagar pela distância x e Talia pela distância $x + y$. Como os pagamentos são proporcionais a essas distâncias,

a fração correspondente a Isabel é $\frac{x}{x + (x + y)} = \frac{x}{2x + y}$. Seja p o preço por quilômetro rodado. Então

$$\begin{cases} 4 + px = 28 \\ 4 + px + py = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} px = 28 - 4 = 24 \\ 4 + 24 + py = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} px = 24 \\ py = 44 - 4 - 24 = 16 \end{cases}$$

Portanto, Isabel deve pagar $\frac{x}{2x + y} = \frac{\frac{24}{p}}{2 \cdot \frac{24}{p} + \frac{16}{p}} = \frac{24}{48 + 16} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$ do valor total, ou seja, Talia deve receber de

Isabel $\frac{3}{8} \cdot 44 = \text{R\$ } 16,50$. Observe que não foi necessário conhecer o valor de p .

QUESTÃO 15 ALTERNATIVA E

Como $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, os possíveis números são formados pelos algarismos:

- 5, 5, 5, 2 e 4, caso em que contabilizamos $5 \cdot 4 = 20$ possibilidades; 5 possibilidades para a posição do algarismo 2 e 4 possibilidades para o algarismo 4 (as demais casas do número devem receber o algarismo 5).
- 5, 5, 5, 8 e 1, caso em que, de forma análoga, contabilizamos $5 \cdot 4 = 20$ possibilidades.

Logo, existem $20 + 20 = 40$ números com tal propriedade.

QUESTÃO 16 ALTERNATIVA B

Denotaremos por $\mathbf{AF}$ a área de uma figura F e por $\sim$ a relação de semelhança de triângulos. Sejam b a medida da base do paralelogramo e h sua altura. Então:

$$\mathbf{AABC} = 24 \text{ cm}^2 \Rightarrow b \cdot h = 24 \text{ cm}^2$$

$$\triangle GCF \sim \triangle GDA \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{b/2}{b} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_2 = 2h_1 \Rightarrow 3h_1 = h \Rightarrow h_1 = \frac{h}{3}$$

$$\text{Portanto, } \mathbf{AGFC} = \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{h}{3}}{2} = \frac{b \cdot h}{12} = \frac{24}{12} = 2 \text{ cm}^2.$$

Da mesma forma, também podemos concluir que $\mathbf{AAHE} = 2 \text{ cm}^2$.

Vamos calcular agora a área $\mathbf{ABEF}$, lembrando que triângulos semelhantes possuem áreas relacionadas com o quadrado da constante de proporcionalidade:

$$\triangle EBF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\mathbf{AEBF}}{\mathbf{AABC}} = \left(\frac{b/2}{b} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \mathbf{AEBF} = \frac{\mathbf{AABC}}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ cm}^2.$$

Agora vamos calcular a área do quadrilátero $EFGH$ por diferença:

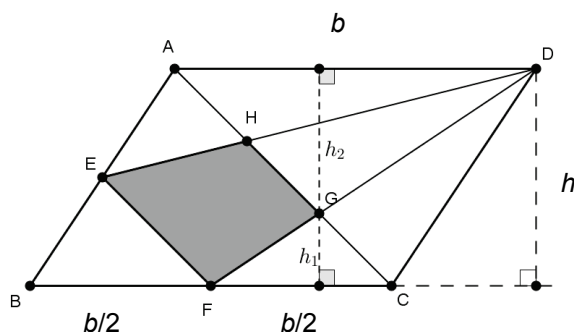
$$\mathbf{AEFGH} = \mathbf{AABC} - \mathbf{AGFC} - \mathbf{AAEH} - \mathbf{AEBF} = 12 - 2 - 2 - 3 = 5 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Outra solução: } \mathbf{ADFC} = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{AABCD} = 6, \mathbf{ADEA} = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{AABCD} = 6, \mathbf{ABFE} = \frac{1}{8} \cdot \mathbf{AABCD} = 3.$$

Daí, $\mathbf{ADEF} = 24 - 6 - 6 - 3 = 9$. Temos que $\triangle DEF \sim \triangle DHG$ e a razão entre suas alturas é

$$\frac{3BD/4}{BD/2} = 3/2$$

Portanto, $\mathbf{ADHG} = \frac{4}{9} \mathbf{ADEF} = 4$. A área procurada é a diferença $9 - 4 = 5 \text{ cm}^2$.



QUESTÃO 17 ALTERNATIVA C

Como as faces opostas somam 7, as faces podem ser divididas em três duplas: {1,6}, {2,5} e {3,4}.

Vamos considerar três casos:

a) Os algarismos que aparecem no topo dos três dados são todos da mesma dupla.

Neste caso, a dupla {1,6} gera $2 \times 2 \times 2 = 8$ números diferentes: 111, 116, 161, 611, 661, 616, 166 e 666. Analogamente, a dupla {2,5} gera outras oito possibilidades e a dupla {3,4} mais oito. Assim, neste primeiro caso temos um total de 24 possibilidades.

b) Dois dos algarismos do topo pertencem a uma dupla e o outro pertence a uma dupla diferente.

Em dois dados aparecem algarismos da dupla:	No outro dado aparece algarismo da dupla:
{1,6}	{2,5}
{1,6}	{3,4}
{2,5}	{1,6}
{2,5}	{3,4}
{3,4}	{1,6}
{3,4}	{2,5}

Pensemos nas possibilidades de formação de números em cada uma das linhas da tabela acima; por exemplo, no caso em que 1 ou 6 aparece no topo de dois dados e no outro dado aparece 2 ou 5, teremos $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ possibilidades (a saber: 112, 121, 211, 115, 151, 511, 162, 126, 216, ... , 566). Analogamente, cada um dos casos apresentados nas linhas da tabela produzirão 24 números diferentes.

No total, neste caso teremos $6 \times 24 = 144$ possibilidades.

c) Os três números que aparecem no topo dos dados são provenientes de números de duplas diferentes. Este caso nunca ocorre, pois é impossível enfileirar os dados de modo que as faces em contato tenham o mesmo número.

Logo, podemos obter $24 + 144 = 168$ números diferentes.

Outra solução, utilizando o complementar: já que o caso c) não ocorre, basta descontar do total de números obtidos sem restrições de contato ($6 \times 6 \times 6 = 216$) os números obtidos que utilizam algarismos das três duplas. Para formar números utilizando algarismos das três duplas, temos 6 escolhas para o primeiro dado (números das 3 duplas), 4 escolhas para o segundo dado (números de duas duplas) e 2 escolhas para o terceiro dado (números de uma dupla). Logo, existem $6 \times 4 \times 2 = 48$ números no caso c). Consequentemente, Mônica pode obter $216 - 48 = 168$ números.

Uma terceira solução é a seguinte: podemos considerar inicialmente três casos:

a) As faces 1 e 6 (ou 6 e 1) estão em contato. Os algarismos que podem aparecer no topo de um dado pertencem ao conjunto {2, 3, 4, 5}. Neste caso, no topo dos três dados, podem aparecer $4 \times 4 \times 4 = 64$ números diferentes.

b) As faces 2 e 5 (ou 5 e 2) estão em contato. Os algarismos que podem aparecer no topo de um dado pertencem ao conjunto {1, 3, 4, 6}. Analogamente neste caso, no topo dos três dados, podem aparecer $4 \times 4 \times 4 = 64$ números diferentes. Entretanto, eles não precisam ser diferentes dos números encontrados no caso a).

c) As faces 3 e 4 (ou 4 e 3) estão em contato. Os algarismos que podem aparecer no topo de um dado pertencem ao conjunto {1, 2, 5, 6}. Como nos casos anteriores, no topo dos três dados, podem aparecer $4 \times 4 \times 4 = 64$ números diferentes. Entretanto, eles não precisam ser diferentes dos números encontrados no caso a) ou no caso b).

Os três casos juntos produzem $3 \times 64 = 192$ números, porém nem todos distintos. Precisamos retirar desta contagem os números comuns aos casos a) e b), b) e c) e a) e c).

Não há algarismos comuns aos três casos. Como $\{2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 3, 4, 6\} = \{3, 4\}$, os algarismos comuns aos casos a) e b) produzirão números (no topo dos três dados) em que só aparecem os algarismos 3 e 4. A quantidade de tais números é $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Analogamente, como $\{2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 5, 6\} = \{2, 5\}$, os algarismos comuns aos casos a) e c) produzirão números (no topo dos três dados) em que só aparecem os algarismos 2 e 5. A quantidade de tais números é $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Do mesmo modo, como $\{1, 3, 4, 6\} \cap \{1, 2, 5, 6\} = \{1, 6\}$, os algarismos comuns aos casos b) e c) produzirão números (no topo dos três dados) em que só aparecem os algarismos 1 e 6. A quantidade de tais números é $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Assim, Mônica pode obter $3 \times 64 - 3 \times 8 = 168$ números diferentes.

QUESTÃO 18 ALTERNATIVA A

Como em um compasso, o giro de um ponto em torno de outro é sempre um arco de circunferência. Como o ponto A gira duas vezes, a primeira vez em torno de C e a segunda vez em torno de B, sua trajetória será a união dos arcos de duas circunferências. Logo, somente as alternativas A) e B) podem estar certas. A alternativa B) é facilmente descartada, pois ao terminar o primeiro giro, o ponto A não fica sobre a reta que apoia o triângulo. Assim, a figura que aparece na alternativa A), sendo a união de dois arcos de circunferência de 120° , é a que representa a trajetória do ponto A.

QUESTÃO 19 ALTERNATIVA D

Podemos supor que o primeiro cubo tem cinco faces vermelhas e uma branca. Seja v o número de faces vermelhas do segundo cubo. Ao se lançar os dois dados, há $6 \times 6 = 36$ casos possíveis. Para que as faces tenham a mesma cor, devem ser ambas vermelhas ($5 \times v$ possibilidades) ou ambas azuis ($1 \times (6 - v)$ possibilidades). A probabilidade de se observar faces iguais é, portanto,

$$\frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos possíveis}} = \frac{5v + (6 - v)}{36} = \frac{4v + 6}{36} = \frac{2v + 3}{18}$$

Para que a probabilidade possa ser igual a $11/18$, deve-se ter $2v + 3 = 11$, ou seja, $v = 4$. O segundo cubo deve ter, portanto, 4 faces vermelhas.

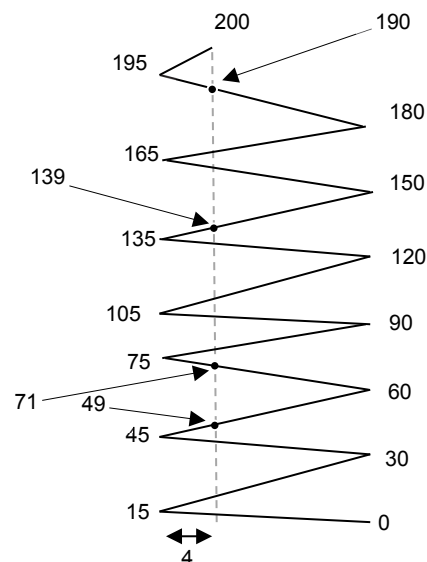
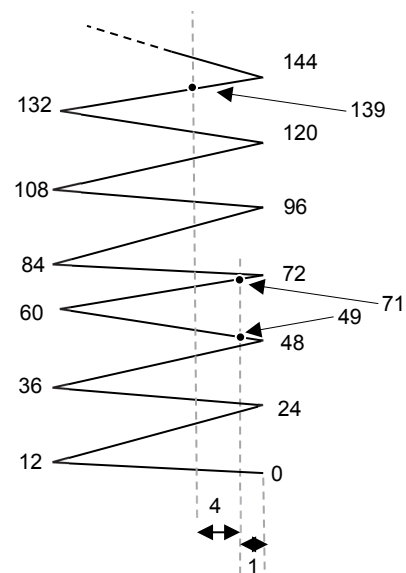
QUESTÃO 20 ALTERNATIVA D

Como as marcas 49 e 71 ficaram sobrepostas em pedaços que são vizinhos, houve uma dobra exatamente no ponto médio, isto é, em $(49 + 71) / 2 = 60$. Como o processo iniciou-se com a marca 0, o tamanho de cada pedaço, isto é, a distância entre duas dobras sucessivas, deve ser um divisor de 60. Os divisores de 60 são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e o próprio 60. Mas, estando 49 e 71 em pedaços vizinhos, descartamos os divisores 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 10 pois a distância de 49 (ou 71) até a dobra 60 é 11, maior do que todos eles. Resta decidir qual é o tamanho de cada pedaço dentre as possibilidades 12, 15, 20, 30 ou 60 e, para isto, usaremos a informação de que a marca 139 ficou alinhada com 49 e 71.

As distâncias da marca de 139 aos dois pontos anteriores são, respectivamente, 90 e 68. Como a marcação de 139 coincide com as anteriores, uma dessas distâncias deve ser um múltiplo do dobro do tamanho da dobra, ou seja, deve ser um múltiplo de 24, 30, 40, 60 ou 120. Mas 68 não é um múltiplo de nenhum desses números, enquanto 90 é múltiplo apenas de 30. Portanto, o tamanho de cada pedaço é 15, o que faz com que a última dobra ocorra na marca de 195 cm e, daí, ao dobrar-se o último pedaço, a marca de 200 cm fica sobre $195 - (200 - 195) = 190$ cm.

As figuras a seguir ilustram o que acontece para os cinco possíveis valores das medidas dos pedaços.

Se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 12, teríamos a situação descrita pela figura ao lado e a marca 139 não estaria alinhada com 71 e 49. Logo, este caso não ocorre.

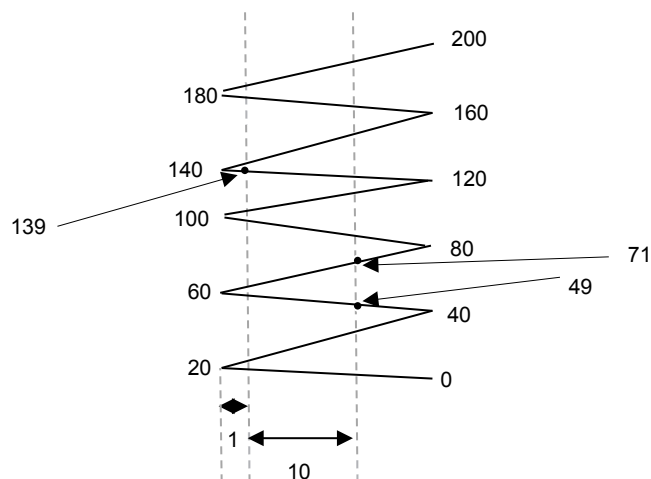


Se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 15, teríamos a seguinte situação:

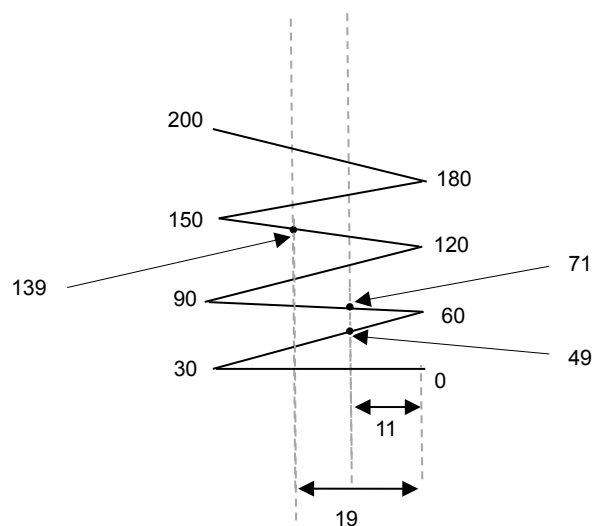
Este é o único caso correto. De fato, veremos a seguir que os demais casos não podem ocorrer:

Se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 20, teríamos a seguinte situação:

Este caso também não pode ocorrer pois 139 não se alinha com 49 e 71.



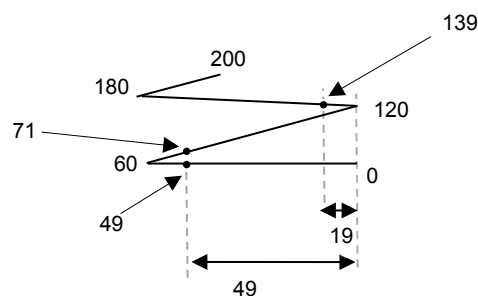
Se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 30, teríamos a seguinte situação:



E vemos que também este caso também não ocorre.

Finalmente, se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 60, teríamos a seguinte situação:

Este último caso também não ocorre.



Logo o comprimento de cada pedaço é 15 cm e a última dobra é feita na marca 195; assim a marca 200 alinha-se com a marca 190, a qual está no penúltimo pedaço.