

Questão 1

item a)

Cada nova pilha tem dois cubinhos a mais em sua base. Assim, como a terceira pilha tem 5 cubinhos em sua base, a quarta pilha tem $5 + 2 = 7$ cubinhos e a quinta pilha tem $7 + 2 = 9$ cubinhos em sua base.

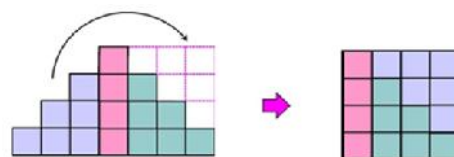
Item b)

A sequência formada pelo número de cubinhos nas bases das pilhas é a sequência dos números ímpares 1, 3, 5, 7, 9, Podemos representar o n -ésimo número ímpar pela expressão $2n - 1$, igual ao número de cubinhos da base da n -ésima pilha. Por exemplo, para calcular o número de cubinhos na base da quinta pilha, fazemos $n = 5$, obtendo $2 \times 5 - 1 = 9$ cubinhos. Portanto, na base da 2014ª pilha há $2 \times 2014 - 1 = 4028 - 1 = 4027$ cubinhos.

Alternativamente, podemos ver que os números de cubinhos das bases das pilhas formam uma sequência de números que começam por 1 e aumentam de 2 em 2. Assim, basta calcular quantas vezes o 2 foi somado ao primeiro termo para descobrir um termo. Por exemplo, o segundo termo é o primeiro mais 2, o terceiro termo é o primeiro mais duas vezes 2, etc. Logo, o 2014º termo é o primeiro mais 2013 vezes 2, isto é, $1 + 2013 \times 2 = 1 + 4026 = 4027$, igual ao número de cubinhos da base da 2014ª pilha.

Item c)

Vemos, pelo exemplo dado, que a parte da pilha à esquerda da maior coluna pode ser movida de modo a se encaixar perfeitamente na parte da pilha à direita da maior coluna, pois são iguais. Além disso, a altura da maior coluna é igual ao comprimento da base da pilha sem a parte à esquerda da maior coluna. Portanto, após o encaixe, a pilha tem a forma de um quadrado, vista de frente. Assim, a quarta pilha triangular pode ser transformada numa pilha quadrada de $4 \times 4 = 16$ cubinhos, como na figura. Para uma pilha com 99 cubinhos em sua base, ocorre o mesmo. Excluindo a maior coluna, restam $99 - 1 = 98$ colunas, sendo metade delas à esquerda e metade à direita da maior coluna, isto é $98:2 = 49$ de cada lado. Assim, quando retiramos a parte da pilha à esquerda, sobram $49 + 1 = 50$ colunas e após o encaixe, todas essas colunas ficam de mesma altura, formando uma parede quadrada de 50 cubinhos de largura por 50 cubinhos de altura. Logo, para construir essa pilha, são necessários $50^2 = 2500$ cubinhos.



Solução alternativa

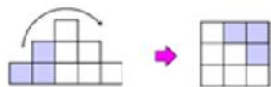
A primeira pilha tem um cubinho. Pedro descobre como reorganizar os cubinhos da segunda, da terceira e da quarta pilha para obter o número de cubinhos em cada uma delas, conforme a ilustração abaixo.

Se a base da pilha triangular tem $2 \times 2 - 1 = 3$ cubinhos então a pilha quadrada terá $2 \times 2 = 4$ cubinhos.

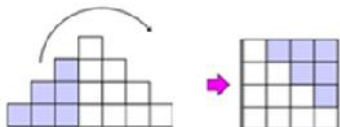


**Solução da prova da 2ª fase
OBMEP 2014 – Nível 2**

Se a base da pilha triangular tem $2 \times 3 - 1 = 5$ cubinhos então a pilha quadrada terá $3 \times 2 = 9$ cubinhos.



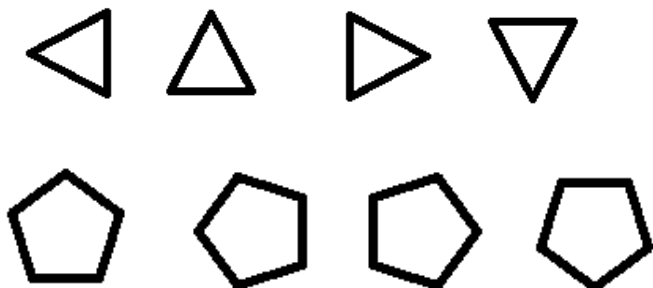
Se a base da pilha triangular tem $2 \times 4 - 1 = 7$ cubinhos então a pilha quadrada terá $4 \times 2 = 16$ cubinhos.



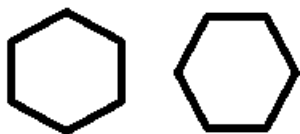
Usando o mesmo raciocínio, ele precisa descobrir a posição n da pilha que terá 99 cubinhos em sua base. Logo, escreve $2n - 1 = 99$ e obtém $n = 50$. Assim, para construir a pilha, ele precisará de $50^2 = 2500$ cubinhos.

Questão 2

Como os cartões são quadrados podemos girá-los como quiser. Assim, o triângulo e o pentágono podem ser colados de 4 maneiras distintas.



Já o quadrado, não importa quanto giremos, ele sempre gerará a mesma imagem; e para o hexágono teremos duas possibilidades.



item a)

O pentágono pode ser visualizado de 4 maneiras distintas. Basta observar que o pentágono tem um lado paralelo a um dos lados do cartão, logo há 4 lados possíveis para esse lado ficar paralelo a um dos lados do cartão.

Item b)

O hexágono pode ser visualizado de 2 maneiras distintas. Basta observar que o hexágono tem dois lados opostos paralelos aos lados do cartão, logo esses lados podem estar paralelos aos lados de cima e de baixo, ou aos lados direito e esquerdo.

Item c)

Pelo princípio multiplicativo, o triângulo pode ser colado em 4 posições e de 4 maneiras distintas ($4 \times 4 = 16$ possibilidades). O quadrado terá 3 posições possíveis de uma única maneira. O pentágono terá 2 posições possíveis e pode ser colado de 4 maneiras e o hexágono deverá ser colado na quarta e última posição, de duas maneiras possíveis.

Logo, há $4 \times 4 \times 3 \times 1 \times 2 \times 4 \times 1 \times 2 = 768$ maneiras distintas.

Outra solução

Podemos começar posicionando as figuras no álbum. Isso pode ser feito de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes. Depois, para cada uma das 24 maneiras, podemos modificar a posição das figuras: Triângulo, 4 maneiras; Quadrado, 1 maneira; Pentágono, 4 maneiras; Hexágono, 2 maneiras.

Logo, teremos um total de $24 \times 4 \times 1 \times 4 \times 2 = 768$ configurações diferentes para a primeira página do álbum.

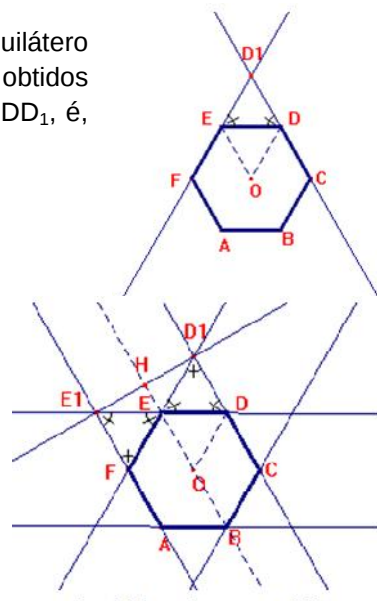
Questão 3

item a)

O triângulo EDD_1 tem, pela sua construção, dois ângulos medindo 60° , logo é equilátero e congruente aos seis triângulos equiláteros também congruentes entre si obtidos quando unimos os vértices do hexágono ao seu centro O . A área do triângulo EDD_1 , é, portanto, igual a $1/6$ da área do hexágono, ou seja, $1/6$.

Item b)

O triângulo E_1ED_1 é isósceles e tem a mesma área que o triângulo EDD_1 , pois $\overline{E_1E} = \overline{ED}$ e a altura relativa a essas bases é a mesma para cada triângulo. Assim, a área do triângulo E_1ED_1 é $1/6$ da área do hexágono. O hexágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ é a reunião do hexágono inicial, cuja área é um, com seis triângulos equiláteros cuja soma das áreas é um, com seis triângulos isósceles cuja soma das áreas também é um, logo, sua área é 3 cm^2 . Este resultado segue também observando-se que E_1D_1DF é um retângulo e, portanto, E_1ED_1 tem mesma área que ED_1D .



Item c)

A cada etapa, a área do hexágono anterior será triplicada: a área do hexágono $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ será o triplo da área do hexágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ou seja, 3^2 cm^2 , a do hexágono seguinte, 3^3 cm^2 , e a do hexágono $A_5B_5C_5D_5E_5F_5$, $3^5 = 243 \text{ cm}^2$.

Questão 5

item a)

Basta observar na tabela o número que se apresenta na linha do F e na coluna do B, que é o número 2. Portanto, F ultrapassou B duas vezes

Item b)

A casa amarela representa quantas vezes o atleta B ultrapassou o atleta D. No início da corrida B estava à frente de D e como D foi o vencedor da corrida, temos a certeza de que B terminou atrás de D. Portanto, B ultrapassou D uma vez a menos do que D ultrapassou B. Como D ultrapassou B duas vezes, podemos afirmar que B ultrapassou D uma única vez.

Item c)

A casa verde representa quantas vezes o atleta E ultrapassou o atleta B. No início da corrida E estava atrás de B e como E foi o último colocado da corrida, temos a certeza de que E terminou atrás de B. Portanto, E ultrapassou B tantas vezes quanto B ultrapassou E. Como B ultrapassou E três vezes, E também ultrapassou B três vezes.

item d)

Já sabemos que D ganhou a corrida e que E foi o último colocado. Comparando os números escritos em posições simétricas em relação à diagonal cinza, concluímos que:

- A começou à frente de B, C e F.
- Como o número de ultrapassagens de A sobre B é igual ao número de ultrapassagens de B sobre A, concluímos que A e B terminaram na mesma posição relativa que começaram a corrida, ou seja, A terminou à frente de B.
- Do mesmo modo, como o número de ultrapassagens de A sobre C é igual ao número de ultrapassagens de C sobre A, concluímos que A e C terminaram na mesma posição relativa que começaram a corrida, ou seja, A terminou à frente de C.
- Por outro lado, como o número de ultrapassagens de A sobre F é igual ao número de ultrapassagens de F sobre A menos 1, concluímos que A terminou atrás de F.

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	4	2	1	2
B	2	-	0	1	3	1
C	4	0	-	4	1	3
D	3	2	5	-	1	3
E	1	3	1	1	-	0
F	3	2	4	3	1	-

Com isso já podemos concluir que F terminou à frente de A, B e C. Mas B começou à frente de C não houve ultrapassagens entre B e C, logo B terminou à frente de C.

Portanto, a corrida terminou na seguinte ordem:

1º. lugar: D – 2º. lugar: F – 3º. lugar: A – 4º. lugar: B – 5º. lugar: C – 6º. lugar: E.

Questão 6

item a)

As seis maneiras são as seguintes: 1-2-3-4-5, 1-2-3-5-4, 1-2-4-3-5, 1-2-4-5-3, 1-3-2-4-5, 1-3-5-4-2.

item b)

Basta ele subir pelos degraus ímpares até o mais alto dos ímpares e em seguida ir para o mais alto dos pares e descer pelos degraus pares.

- Exemplo para 10 degraus: 1-3-5-7-9-10-8-6-4-2
- Exemplo para 11 degraus: 1-3-5-7-9-11-10-8-6-4-2.

Item c)

- Se ele começar com os movimentos 1-2, o problema recairá no caso com 11 degraus e, portanto, será possível completá-lo de 68 maneiras.
- Se ele começar com 1-3-2, então ele terá que ir para o degrau 4 e o problema recairá na mesma situação da escada com 9 degraus e ele terá 31 maneiras para completá-lo.
- Se ele começar com 1-3-4, os degraus 2 e 5 ficarão com um afastamento de 3 degraus e não será possível completar o movimento.
- Se ele começar com 1-3-5, ele não poderá mais descer ou subir um degrau, até atingir o último ímpar para depois voltar pelos pares como descrito no item b) e, portanto, haverá apenas uma maneira.

Logo, o número de maneiras de completar a brincadeira será igual a $68 + 31 + 1 = 100$ maneiras.