

QUESTÃO 1

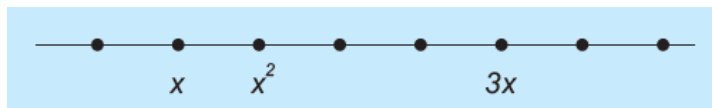
ALTERNATIVA D

Como $2,5 = 5 \times 0,5$, o tempo que o frango deve ficar no forno é $5 \times 12 = 60$ minutos. Logo, Paula deve colocar o frango no forno às 19 h, mas 15 minutos antes deve acender o forno. Assim, Paula deve acender o forno às 18 horas e 45 minutos.

QUESTÃO 2

ALTERNATIVA A

Da figura, tiramos que $3x - x = 4(x^2 - x)$, já que os pontos estão igualmente espaçados.



Logo, $2x = 4x^2 - 4x$. Há duas soluções: $x = 0$ (que não serve) e $x = 3/2$. O valor da distância entre dois pontos consecutivos é, portanto, $(3/2)^2 - (3/2) = 3/4$.

QUESTÃO 3

ALTERNATIVA C

Observe que o último número da linha 1 é 1, da linha 2 é $4 = 2^2$, da linha 3 é $9 = 3^2$ e assim por diante. Os números que finalizam uma linha são sempre quadrados perfeitos. Assim, como os quadrados mais próximos de 2015 são $44^2 = 1936$ e $45^2 = 2025$, o número 2015 foi escrito na linha 45.

Observação: A afirmação “A linha n contém $2n - 1$ termos e termina com o número n^2 ” pode ser facilmente provada usando-se o Princípio de Indução Finita, pois ela é obviamente verdadeira para $n=1$ e, supondo-a verdadeira para a linha n , a linha $n+1$ terá $2n-1+2 = 2(n+1) - 1$ termos, já que ela contém 2 termos a mais do que a anterior; além disso, o último termo da linha $n+1$ é $n^2 + (2n-1) + 2 = (n+1)^2$.

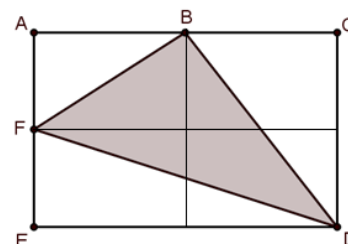
QUESTÃO 4

ALTERNATIVA E

Sendo B e F os pontos médios dos lados AC e AE, respectivamente, podemos dividir o retângulo ACDE usando segmentos paralelos aos seus lados com extremos nesses pontos médios para observar que:

- a área do triângulo ABF é $\frac{1}{8}$ da área do retângulo ABCD, ou seja, igual a 80 cm^2 ;
- a área do triângulo EDF é $\frac{1}{4}$ da área do retângulo ABCD, ou seja, igual a 160 cm^2 ;
- a área do triângulo BCD é $\frac{1}{4}$ da área do retângulo ABCD, ou seja, igual a 160 cm^2 .

A soma dessas áreas é igual a $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ da área do retângulo, ou ainda, 400 cm^2 . Portanto, a área do triângulo BDF é igual a $\frac{3}{8}$ da área do retângulo ACDE, ou seja, é 240 cm^2 .



QUESTÃO 5 ALTERNATIVA D

Chamando cada participante pela primeira letra de seu nome, as possibilidades de escolha dos 2 premiados são: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, ou seja, há 10 possibilidades. As possibilidades de escolha das duas premiações são: Ouro Ouro, Ouro Prata, Ouro Bronze, Prata Ouro, Prata Prata, Prata Bronze, Bronze Ouro, Bronze Prata e Bronze Bronze, ou seja, há 9 possibilidades. Pelo Princípio Multiplicativo, as diferentes formas de premiação são $10 \times 9 = 90$.

Outra solução Existem dois casos a considerar: ou os dois meninos premiados ganharam medalhas iguais, ou ganharam medalhas diferentes.

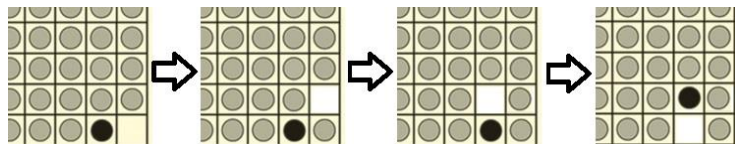
Se as medalhas são iguais, há 3 possibilidades para as medalhas, a saber, ou as duas são de ouro, ou as duas são de prata, ou as duas são de bronze. Além disso, dos 5 meninos, apenas 2 receberam medalhas, o que pode ocorrer de $\frac{5 \times 4}{2}$ maneiras diferentes (são 5 escolhas para o primeiro e são 4 escolhas para o segundo menino, mas precisamos dividir por 2, para eliminar as repetições, uma vez que para determinar a dupla de premiados, não importa a ordem de escolha dos meninos). Logo, pelo Princípio Multiplicativo, há $3 \times \frac{5 \times 4}{2} = 3 \times 10 = 30$ possibilidades para a premiação de dois desses meninos com medalhas iguais.

No segundo caso, se as medalhas recebidas pelos 2 meninos premiados são diferentes, há 3 possibilidades para os tipos de medalhas: ouro e prata; ouro e bronze; e prata e bronze. Em cada uma dessas possibilidades, a mais valiosa será recebida por 1 dos 5 meninos e a outra por um dentre os 4 meninos restantes. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, nesse caso, o número de formas diferentes de premiação é $3 \times 5 \times 4 = 60$.

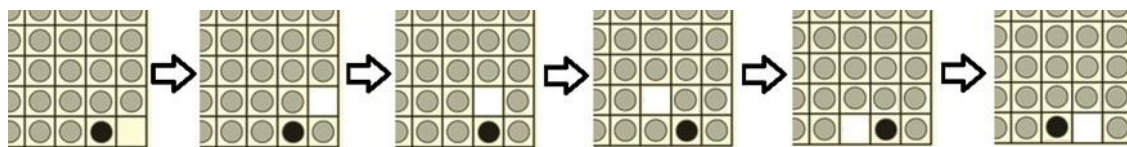
Portanto, pelo Princípio Aditivo, o número total de formas diferentes de ocorrer a premiação é $30 + 60 = 90$.

QUESTÃO 6
ALTERNATIVA E

Joãozinho precisa levar a peça preta até o canto superior esquerdo do tabuleiro, indicado pelas setas. Para fazer isso, a peça preta precisa andar para cima e para a esquerda, sem nunca voltar com ela para a direita ou para baixo. Inicialmente, Joãozinho deve andar com a pedra preta para cima, fazendo três movimentos, indicados na figura abaixo:

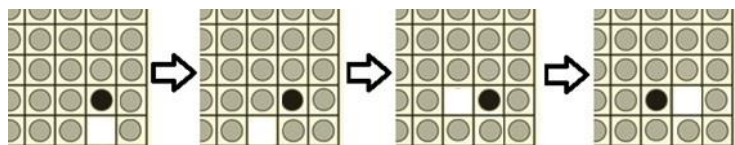


Ele deve andar com a pedra preta para cima, pois a outra possibilidade (andar com a pedra preta para a esquerda) requereria cinco movimentos, veja:

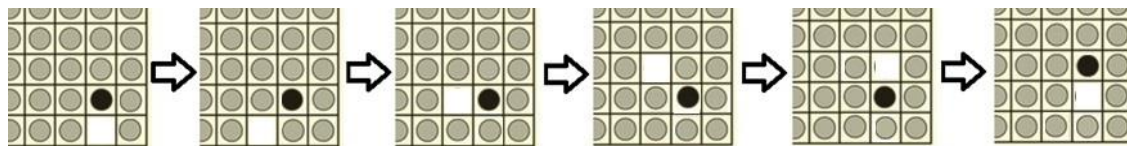


Como ele quer realizar o menor número possível de movimentos, ele opta em movimentar a pedra preta para cima, realizando três movimentos.

Após fazer isto, ele deve andar com a pedra preta para a esquerda, fazendo novos três movimentos.



Se ele optasse por andar com a pedra preta para cima faria cinco movimentos, veja:



Deste modo, sempre optando em realizar o menor número de movimentos, ele escolhe mover a pedra preta para a esquerda, com outros três movimentos.

Assim, para levar a pedra preta até o canto superior esquerdo do tabuleiro, com o menor número de movimentos possível, Joãozinho deve andar com a pedra preta sete casas para cima e seis casas para a direita, alternando esses movimentos e começando para cima, gastando sempre três movimentos cada vez que a pedra preta andar uma casa. Logo, o número mínimo de movimentos necessários é $3 \times 7 + 3 \times 6 = 21 + 18 = 39$.

QUESTÃO 7

ALTERNATIVA A

Sejam x e y os dois números. Vamos usar as conhecidas identidades do quadrado da soma $(x + y)^2$ e do cubo da soma $(x + y)^3$ para encontrar uma identidade para a soma dos quadrados $x^2 + y^2$:

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

Do quadrado da soma podemos concluir que

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

e do cubo da soma podemos concluir que

$$3x^2y + 3xy^2 = (x + y)^3 - (x^3 + y^3)$$

Evidenciando o produto $3xy$ no lado esquerdo da identidade acima

$$3xy(x + y) = (x + y)^3 - (x^3 + y^3)$$

e isolando o produto xy (não há problema em dividir por $x + y$, pois $x + y = 3$), temos

$$xy = \frac{(x + y)^3 - (x^3 + y^3)}{3(x + y)}$$

Substituindo esse produto na identidade da soma dos quadrados temos

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - \frac{2(x + y)^3 - (x^3 + y^3)}{3(x + y)}$$

Agora, como $x + y = 3$ e $x^3 + y^3 = 25$, segue que

$$x^2 + y^2 = (3)^2 - \frac{2(3)^3 - (25)}{3} = 9 - \frac{2 \cdot 27 - 25}{3} = 9 - \frac{2 \cdot 2}{3} = 9 - \frac{4}{3} = \frac{81 - 4}{9} = \frac{77}{9}.$$

QUESTÃO 8

ALTERNATIVA B

Marcelo saiu de casa às 15h. Ele caminhou durante x minutos, até perceber que esqueceu a carteira. Para voltar a sua casa, correndo, ele levou metade desse tempo, igual a $x/2$ minutos. Ele permaneceu em casa 3 minutos procurando a carteira e saiu correndo até chegar à estação. Chegou à estação às 15h30min e gastou 12 minutos nesta última corrida. Logo,

$$x + \frac{x}{2} + 3 + 12 = 30 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 15 \Leftrightarrow x = 10$$

Portanto, Marcelo lembrou-se da carteira às 15h10min.

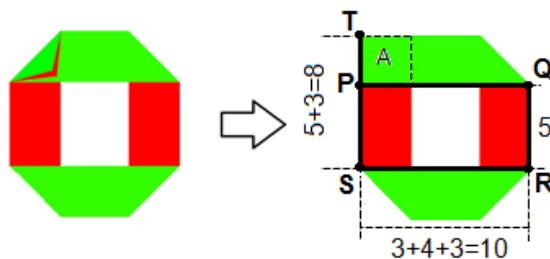
QUESTÃO 9

ALTERNATIVA D

A figura ao lado mostra como fica a tira se desfizermos a última dobra realizada por Júlia. Observemos que a fita está com uma sobreposição na região quadrada indicada pela letra A. Para medir o comprimento da tira, vamos medir os segmentos indicados na figura, pelas letras P, Q, R, S e T, que compõem a borda da tira, destacada pela linha preta mais grossa. Para isso, indicaremos o comprimento de um segmento, em centímetros, escrevendo seus pontos extremos. Por exemplo, escreveremos PQ para representar o comprimento do segmento que une os pontos P e Q. Temos:

$$PQ = 3 + 4 + 3 = 10 \quad QR = 5 \quad RS = 3 + 4 + 3 = 10 \quad ST = 5 + 3 = 8$$

Portanto, o comprimento da tira é igual a $10 + 5 + 10 + 8 = 33$ cm.



QUESTÃO 10 ALTERNATIVA C

Para obter a maior quantidade possível para o total de pontos de intersecção, Joãozinho deve desenhar as próximas retas em uma disposição de tal modo que, cada nova reta desenhada, interseccione cada circunferência já desenhada em dois pontos, e interseccione cada reta já desenhada em um ponto, todos distintos entre si e dos já desenhados.

A maior quantidade possível para o total de pontos de intersecção que a terceira reta pode gerar é $2+2+1+1 = 6$ pontos.

A maior quantidade possível para o total de pontos de intersecção que a quarta reta pode gerar é $2+2+1+1+1 = 7$ pontos.

A maior quantidade possível para o total de pontos de intersecção que a quinta reta pode gerar é $2+2+1+1+1+1 = 8$ pontos.

Logo, a maior quantidade possível para o total de pontos de intersecção é $11+6+7+8 = 32$ pontos.

QUESTÃO 11 ALTERNATIVA B

Para simplificar nossa escrita, vamos escrever u_n para representar o algarismo das unidades do número a_n ; assim, precisamos determinar u_{2015} . Observemos os três primeiros termos da sequência:

$$a_1 = 3, a_2 = 3 + 3^2 = 3 + 9 = 12 \text{ e } a_3 = 12 + (12)^2 = 12 + 144 = 156.$$

Agora, é claro que $u_2 = 2$ e $u_3 = 6$. Por outro lado, poderíamos determinar u_3 sem calcular o valor de a_3 . De fato, a_3 é a soma de duas parcelas cujos algarismos das unidades são 2 e 4, respectivamente. Logo, $u_3 = 2 + 4 = 6$.

Aplicando essa mesma ideia para $a_4 = 156 + (156)^2$, vemos que u_4 é a soma de duas parcelas cujos algarismos das unidades são, ambos, iguais a 6. Portanto, $u_4 = 2$.

Novamente aplicando este raciocínio, concluímos que $u_5 = 6$, pois é a soma de duas parcelas cujos algarismos das unidades são iguais a 2 e 4, respectivamente.

Assim, aplicando este argumento sucessivamente, a partir do segundo número da sequência, concluímos que os algarismos das unidades dos números da sequência, determinam uma nova sequência que é formada, alternadamente, apenas pelos números 2 e 6. Mais precisamente, $u_n = 2$, sempre que o índice n for par, e $u_n = 6$, sempre que o índice n for ímpar. Consequentemente, $u_{2015} = 6$.

QUESTÃO 12 ALTERNATIVA B

Na roleta das centenas, a probabilidade de a seta parar no setor marcado com o número 3 é de $1/2$, e a probabilidade de a seta parar no setor marcado com os números 1 ou 2 é de $1/4$ para cada um deles. Na roleta das dezenas, a probabilidade de a seta parar num dos setores marcados com os números 1, 3, 4, 5 e 8 é de $1/5$ para cada um deles. O número determinado pelas setas, depois de giradas, é maior que 260 quando acontece alguma das situações seguintes:

- A seta da roleta das centenas para no setor marcado com 3, o que acontece com probabilidade $1/2$. Não importa o que ocorre nas casas das dezenas e das unidades.
- A seta da roleta das centenas para no setor marcado com 2 e a seta do setor das dezenas para no setor marcado com 8, o que acontece com probabilidade $(1/4) \times (1/5)$. Não importa o que ocorre na casa das unidades.

Assim, a probabilidade de que o número determinado pelas setas, após serem giradas, seja maior do que 260 é

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{20}$$

o que representa uma porcentagem de $50\% + 5\% = 55\%$ de probabilidade.

QUESTÃO 13

ALTERNATIVA A

O lado do quadrado cuja área é 1 tem comprimento 1. Para calcular a área da região S compreendida entre os quadrados $ABCD$ e $APQR$, no primeiro caso, em que o ponto P está no segmento $\overline{AB}$, temos que a distância x varia entre 0 e 1 e a expressão para a área é $S(x) = 1 - x^2$, cujo gráfico é um arco de parábola com concavidade para baixo.

No segundo caso, quando o ponto B está no segmento $\overline{BP}$, temos que a distância x é maior do que 1 e $S(x) = x^2 - 1$, cujo gráfico é um arco de parábola com concavidade para cima.

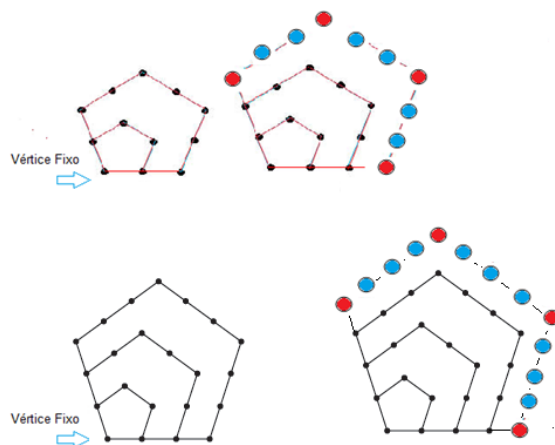
O gráfico que melhor representa a variação de S em função de x , ou seja, o gráfico da função $S(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$ é o da alternativa A.

QUESTÃO 14

ALTERNATIVA C

Os números de pontos de cada figura formam uma sequência chamada de *números pentagonais*. Observe que, a partir da figura n , $n \geq 1$, a figura $n+1$ é obtida acrescentando-se à figura anterior 4 novos pontos (vermelhos) que serão os vértices e n novos pontos (azuis) em cada um dos três lados opostos ao vértice fixo, totalizando $4+3n$ novos pontos.

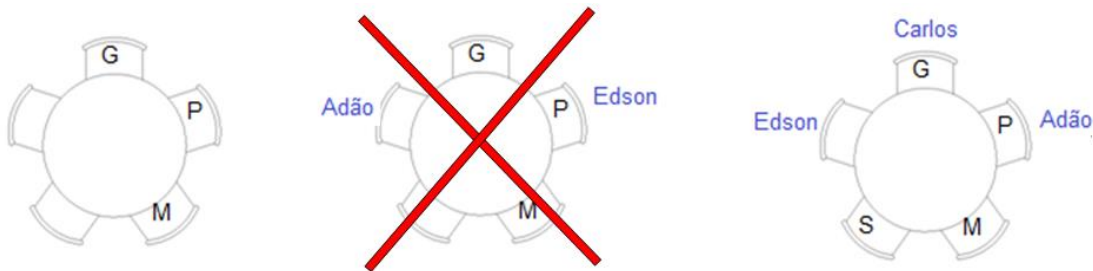
Assim, se a vigésima figura possui 651 pontos a vigésima primeira terá $651 + 3 \times 20 + 4 = 715$ pontos.



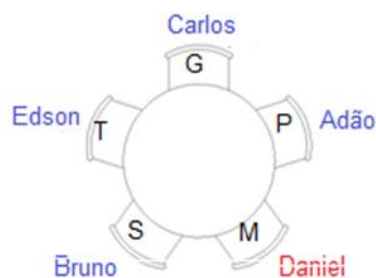
QUESTÃO 15

ALTERNATIVA D

O paranaense está entre o goiano e o mineiro. Como o goiano sentou-se entre Edson e Adão, temos duas possibilidades: Edson é paranaense ou Adão é paranaense.



Eliminamos o caso em que Edson é paranaense com a informação de que "Edson sentou-se tendo como vizinhos Carlos e o sergipano", pois se Edson fosse paranaense ele estaria entre o goiano e o mineiro. Portanto, Adão é o paranaense. Como Edson sentou-se entre Carlos e o sergipano, concluímos que Carlos é goiano e o lugar entre Edson e o mineiro é do sergipano. A última informação do enunciado diz que Bruno sentou-se entre o tocantinense e o mineiro. Logo, Edson é tocantinense e Bruno é sergipano. Portanto, Daniel é mineiro.



QUESTÃO 16

ALTERNATIVA D

Considerando cada par de irmãos, o mais velho retira duas moedas do pote pelo irmão mais novo, enquanto o mais novo coloca uma moeda no pote pelo mais velho. Logo, para cada par de irmãos, uma moeda é retirada do pote. Se forem n os filhos de João, há $\frac{n(n-1)}{2}$ pares de irmãos e, portanto, este é o número total de moedas retiradas do pote no processo. Logo, temos $\frac{n(n-1)}{2} = 100 - 22 = 78$. Daí resulta $n^2 - n - 156 = 0$. Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos $n = 13$ ou $n = -12$. Logo, João tem 13 filhos.

Outra solução: Na tabela, numeramos os irmãos de 1 a n , com idades crescentes:

	irmão 1	irmão 2	3	...	irmão $n-2$	irmão $n-1$	irmão n
moedas que coloca	$n-1$	$n-2$	$n-3$		2	1	0
moedas que tira	2×0	2×1	2×2		$2 \times (n-3)$	$2 \times (n-2)$	$2 \times (n-1)$

A segunda linha é o dobro da primeira, portanto o que sobra de moedas é igual à soma $1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ e, portanto, temos $\frac{n(n-1)}{2} = 100 - 22 = 78$. Daí resulta $n^2 - n - 156 = 0$. Resolvendo, como antes, obtemos $n = 13$ ou $n = -12$. Logo, João tem 13 filhos.

QUESTÃO 17

ALTERNATIVA B

Seja O o centro da circunferência, OM a altura do triângulo OAB relativa à base AB e ON a altura do triângulo OCD relativa à base CD .

Como AB é paralelo à CD , segue que os pontos M , O e N estão alinhados e que MN é a altura do trapézio.

Vamos denotar $OA = OB = OC = OD = r$, $OM = x$ e $ON = y$. A altura do trapézio é, assim, igual a $x + y = 9$ cm. Como o triângulo OAB é isósceles com base $AB = 16$ cm, segue, pelo Teorema de Pitágoras, que

$$r^2 = 8^2 + x^2$$

De forma análoga, como o triângulo OCD é isósceles com base $CD = 10$ cm, segue, pelo Teorema de Pitágoras, que

$$r^2 = 5^2 + y^2$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, e usando que $y^2 - x^2 = (y + x)(y - x)$, temos

$$(y + x)(y - x) = 8^2 - 5^2 = 39$$

Embora o desenho indique que o centro da circunferência esteja dentro do trapézio, este fato pode ser confirmado pois se centro da circunferência estivesse no exterior ao trapézio, teríamos as seguintes equações:

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ y + x = \frac{39}{9} = \frac{13}{3} \end{cases}$$

que resultariam em $x = \frac{20}{3}$ e $y = -\frac{7}{3}$, o que é impossível já que $y > 0$. Assim, o centro da circunferência é interior ao trapézio e temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ y - x = \frac{39}{9} = \frac{13}{3} \end{cases}$$

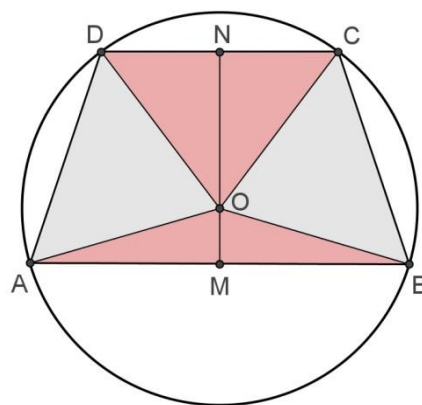
que resultam em $x = \frac{7}{3}$ e $y = \frac{20}{3}$.

Pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$r^2 = 8^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = 64 + \frac{49}{9} = \frac{576 + 49}{9} = \frac{625}{9}$$

e, portanto,

$$r = \sqrt{\frac{625}{9}} = \frac{25}{3}$$



QUESTÃO 18 ALTERNATIVA C

Os dados do problema estão organizados na tabela abaixo:

Pessoa	Quantidade de livros que comprou	Preço por cada livro	Quanto a pessoa gastou
Amiga 1	a_1	a_1	a_1^2
Amiga 2	a_2	a_2	a_2^2
Amiga 3	a_3	a_3	a_3^2
Namorado da amiga 1	n_1	n_1	$n_1^2 = a_1^2 - 32$
Namorado da amiga 2	n_2	n_2	$n_2^2 = a_2^2 - 32$
Namorado da amiga 3	n_3	n_3	$n_3^2 = a_3^2 - 32$

Como $n_i^2 = a_i^2 - 32$, $i = 1, 2, 3$, então $(a_i - n_i) \cdot (a_i + n_i) = 32 = 2^5$. Cada uma das parcelas do membro direito da última igualdade é um número inteiro positivo e, portanto, há apenas duas soluções $(a_i = 9, n_i = 7)$ e $(a_i = 6, n_i = 2)$, devido à decomposição única em fatores primos. Na primeira solução, a mulher comprou dois livros a mais do que o seu namorado e na segunda ela comprou 4 livros a mais do que o namorado. Como as mulheres compraram oito livros a mais do que os homens, só resta a possibilidade de um casal ter comprado $6 + 2 = 8$ livros e os outros dois casais terem comprado, cada um deles $9 + 7 = 16$ livros. Deste modo a quantidade total de livros comprada foi $8 + 16 + 16 = 40$.

QUESTÃO 19 ALTERNATIVA C

Existem vários subconjuntos que satisfazem às condições do enunciado; todos eles com 11 elementos. Por exemplo: $B_1 = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}\}$, $B_2 = \{1, 3, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, 2^3 \cdot 3, 2^4 \cdot 3, 2^5 \cdot 3, 2^6 \cdot 3, 2^7 \cdot 3, 2^8 \cdot 3, 2^9 \cdot 3\}$ e $B_3 = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^9 \cdot 3\}$. A solução anteriormente divulgada está incorreta; ela contempla apenas o primeiro exemplo.

Não é possível construir um subconjunto de A nas condições descritas no enunciado, contendo 12 ou mais elementos. De fato, suponhamos que isto fosse possível, e seja B um subconjunto de A , com $k \geq 12$ elementos. Seja n o maior elemento de B . Então, n deve ser múltiplo dos demais elementos de B . Logo n deve possuir k divisores positivos (ele próprio e os demais $k-1$ elementos do conjunto). O menor número n que possui k divisores positivos é 2^{k-1} . Entretanto, $2^{k-1} \geq 2^{11} = 2048 > 2015$, pois $k \geq 12$. Logo, $n > 2015$ e, portanto, n não pode pertencer a B , já que B é subconjunto de A . Esta contradição surge da suposição de que B tem mais do que 11 elementos. Assim, os subconjuntos de A com a maior quantidade possível de elementos, que satisfazem as condições do enunciado, possuem 11 elementos.

QUESTÃO 20 ALTERNATIVA E

Fazendo uma planificação da lateral do cilindro (abrindo-o sem distorções), cortando-o pela geratriz que passa pela aranha, teremos a seguinte situação:

O caminho de menor distância que a aranha deve seguir para capturar a mosca é o segmento AQ , sendo Q o refletido de M com relação à reta que corresponde à borda superior da lata. O problema pede que encontremos a distância entre os pontos P e M , pois esta é a distância percorrida pela aranha na superfície interna da lata. Como a distância de P a M é igual à distância de P a Q , pela semelhança dos triângulos AQS e PQR , vemos que $PR = 3$ cm ($PR/15 = 4/20$). Aplicando-se o Teorema de Pitágoras, vemos que a distância de P até Q é 5 cm.

