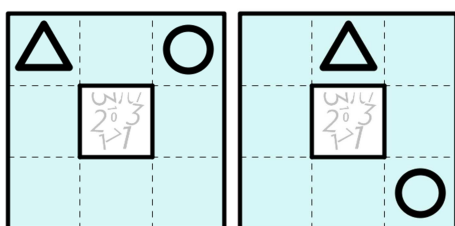


SOLUÇÕES N1 2015

N1Q1 – Solução

item a)

Basta continuar os movimentos que estão descritos no enunciado:

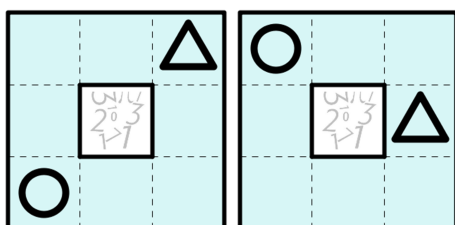


Quadro 6

Quadro 7

Item b)

Basta continuar por mais dois quadros para ver que a situação do Quadro 1 se repete no Quadro 9. Também é possível concluir isso observando que a bolinha retorna à posição inicial a cada quatro quadros consecutivos enquanto que o triângulo retorna à posição inicial a cada oito quadros consecutivos; logo a situação do Quadro 1 vai se repetir após oito quadros consecutivos, ou seja, no Quadro 9.

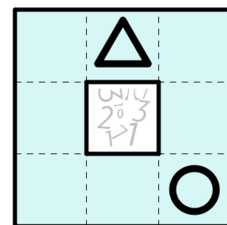


Quadro 8

Quadro 9

Item c)

No Quadro 2015, a bolinha e o triângulo estão em posições idênticas às do Quadro 7. Para ver isto, basta dividir 2015 por 8, já que os quadros se repetem de 8 em 8. Fazendo essa divisão obtemos $2015 = 251 \times 8 + 7$. Logo, o Quadro 2015 é idêntico ao Quadro 7. De forma geral, são idênticos dois quadros cujos números deixam o mesmo resto na divisão por 8.



Quadro 2015

N1Q2 – Solução

item a)

Na listagem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, há quatro números ímpares e três pares. Após João e Maria terem retirado seus cartões, sobraram na mesa um cartão ímpar e um cartão par. Desse modo, a soma dos cartões que sobraram na mesa é a soma de um número par com um número ímpar sendo, portanto, ímpar.

Item b)

Como o produto dos três cartões retirados por João era ímpar, seus três cartões certamente eram ímpares. Assim, sobraram na mesa três cartões com números pares e um cartão com número ímpar para Maria retirar. Como Maria retirou dois desses cartões restantes, certamente retirou pelo menos um cartão par. Consequentemente, o produto dos números dos cartões retirados por Maria na segunda rodada foi par.

Item c)

João concluiu acertadamente que a soma dos números dos cartões de Maria é par porque ele retirou os três cartões pares. Caso contrário, sempre haveria a possibilidade de Maria retirar um cartão par e um cartão ímpar, que somados resultaria em um número ímpar.

Outra solução. Como João concluiu acertadamente que a soma dos cartões retirados por Maria foi par, ela deve ter retirado dois cartões pares ou dois cartões ímpares. Vejamos as possibilidades iniciais de João:

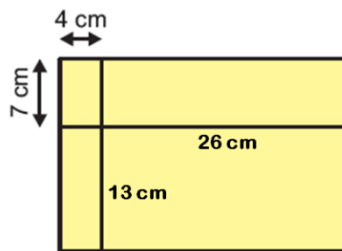
- João não retirou cartões pares. Nesse caso Maria poderia ter retirado um cartão par e um ímpar e a conclusão de João estaria incorreta.
- João retirou apenas um cartão par. Nesse caso também Maria poderia ter retirado um cartão par e um ímpar e a conclusão de João estaria errada.
- João retirou dois cartões pares. Novamente, Maria poderia ter retirado um cartão par e um ímpar e a conclusão de João estaria incorreta.
- João retirou três cartões pares. Como, de fato, foi isso o que aconteceu, ele teve certeza de que Maria retirou dois cartões ímpares, cuja soma é par.

Logo João retirou os cartões 2, 4 e 6.

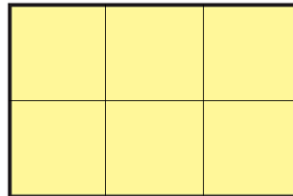
N1Q3 – Solução

item a)

O maior dos quatro retângulos tem lados de medida $30 - 4 = 26$ cm e $20 - 7 = 13$ cm. Logo, sua área é $26 \times 13 = 338$ cm².

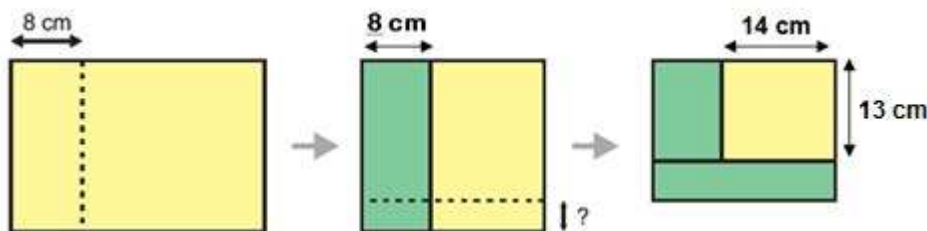


Item b)



Com um traço horizontal e dois verticais geramos os quadrados de maior área possível. Para formar apenas quadrados, o valor do lados desses quadrados deve dividir 20 e 30. A maior área ocorre, então, quando o lado desses quadrados for o máximo divisor comum de 20 e 30, ou seja, 10 cm.

Item c)



Vamos chamar a distância da segunda dobra até a margem inferior da folha de *altura da dobra*.

Como a folha tem 30 cm de largura e a primeira dobra foi feita a 8 cm da margem direita da folha, a largura da região em amarelo da última figura é igual a 30 cm menos duas vezes 8 cm, ou seja, $30 - 16 = 14$ cm.

Após a segunda dobra, o dobro da altura do retângulo amarelo será a diferença entre seu perímetro e o dobro de sua largura, ou seja, $54 - 28 = 26$ cm. Portanto, a altura do retângulo amarelo na terceira figura é 13 cm. Assim, da altura da folha original sobraram $20 - 13 = 7$ cm para a realização da segunda dobra e, portanto, a altura da dobra é a metade, ou seja, $7 \div 2 = 3,5$ cm.

Outra solução.

Como a folha tem 30 cm de largura e a primeira dobra foi feita a 8 cm da margem direita da folha, a largura da região em amarelo da última figura é igual a 30 cm menos duas vezes 8 cm, ou seja, $30 - 16 = 14$ cm.

De forma análoga, como a folha tem 20 cm de altura, a altura da região em amarelo da última figura é igual 20 cm menos duas vezes a altura da dobra.

O perímetro da região em amarelo da última figura é igual a 54 cm, e seu semiperímetro (metade do perímetro) é 27 cm.

O semiperímetro de uma região retangular é a soma da largura e da altura dessa região. Assim, 14 cm mais 20 cm menos duas vezes a altura da dobra tem que ser igual a 27 cm.

- $14 + 20 - 2 \times (\text{altura da dobra}) = 27 \text{ cm}$

Logo 27 cm mais duas vezes a altura da dobra é igual a 34 cm,

- $27 + 2 \times (\text{altura da dobra}) = 34 \text{ cm}$

e a altura da dobra é igual à metade da diferença $34 - 27 = 7 \text{ cm}$, ou seja, metade de 7 cm. Logo, altura da dobra = $(34 - 27) \div 2 = 3,5 \text{ cm}$.

N1Q4 – Solução

item a)

Como não é possível repetir algarismos, os algarismos que podem ser acrescentados à direita de 1063 são 2, 4, 5, 7, 8 e 9; desses, o único que é múltiplo ou divisor de 3 é o algarismo 9 (9 é múltiplo de 3). O número 10639 está na lista de Juca, não é possível acrescentar um novo algarismo pois 2, 4, 5, 7 e 8 não são múltiplos nem divisores de 9.

Item b)

O número natural sucessor de 2015 é 2016, entretanto ele não está na lista de Juca, pois os números dessa lista devem ser acrescidos de algarismos enquanto for possível colocar múltiplo ou divisor do último algarismo escrito, ou seja 2016 pode ser completado a 201639. O próximo número que vem depois do 2016 é 2017, e este sim está na lista de Juca, já que 3, 4, 5, 6, 8 e 9 não são múltiplos nem divisores de 7.

Item c)

Como qualquer número é múltiplo de 1 e divisor de 0, todos os números listados por Juca vão conter os algarismos 0 e 1 e sempre será possível acrescentar outro algarismo disponível à direita desses dois algarismos. Assim, todos os números listados por Juca têm pelo menos três algarismos. Os primeiros números com três algarismos distintos são 102, 103 e 104, que não estão na lista de Juca, pois é possível acrescentar 4 ou 8 à direita do 2, 6 ou 9 à direita do 3 e 2 ou 8 à direita do 4. Como 105 está na lista de Juca, pois não é possível acrescentar os algarismos 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9 à direita do 5, segue que esse é o menor número na lista de Juca.

Item d)

O maior número da lista de Juca é o 9362841705. Ele é o maior porque contém todos os algarismos, começa com 9 e sempre é acrescentado, a cada vez, o maior algarismo possível que seja múltiplo ou divisor do último algarismo escrito.

N1Q5 – Solução

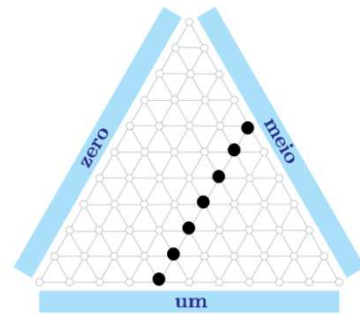
item a)

O aluno D obteve nota zero em 1 questão, nota meio em 5 questões e nota um em 4 questões. Sendo assim, a nota obtida pelo aluno D na prova foi $1 \times 0,0 + 5 \times 0,5 + 4 \times 1,0 = 6,5$.

Item b)

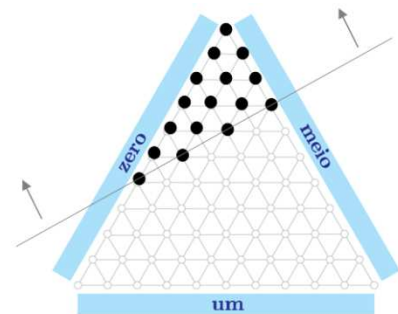
Há sete possibilidades de um aluno tirar nota zero em 4 questões.

- $1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 = 6 \times 1,0 + 0 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 0,5 = 5 \times 1,0 + 1 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 0,5 + 0,5 = 4 \times 1,0 + 2 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 1,0 + 1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 3 \times 1,0 + 3 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 2 \times 1,0 + 4 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1 \times 1,0 + 5 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 0 \times 1,0 + 6 \times 0,5 + 4 \times 0,0$



item c)

Há 16 possibilidades do aluno obter nota 7,0 ou maior do que 7,0, como está ilustrado na figura ao lado.



N1Q6 – Solução

item a)

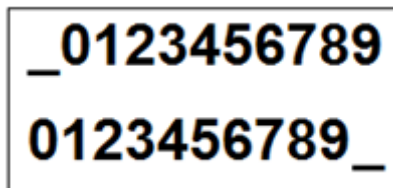
Para criar uma senha de 11 algarismos que inicie com o bloco 20152015, Pedro precisa apenas determinar os três últimos algarismos que definem a senha.

20152015 _ _ _

Ele pode usar qualquer um dos 10 algarismos na antepenúltima, penúltima e última posição da senha. Pelo Princípio Multiplicativo, há $10 \times 10 \times 10 = 1000$ possibilidades. Portanto, existem mil senhas que começam com o bloco 20152015.

Item b)

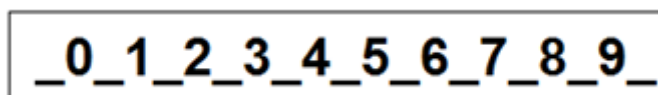
Como o bloco 0123456789 é formado por 10 algarismos, resta acrescentar 1 algarismo para se criar uma senha. Esse algarismo deve ser colocado ou na primeira ou na última posição, para não “quebrar” o bloco.



Na primeira posição é possível colocar 10 algarismos. O mesmo ocorre na última posição. Assim, pelo Princípio Aditivo, existem $10 + 10 = 20$ senhas diferentes que contêm o bloco 0123456789.

Item c)

Para se criar uma senha de acordo com as novas condições exigidas, devemos inserir um algarismo no bloco 0123456789: à esquerda, à direita ou entre dois de seus algarismos. Há 11 espaços possíveis para se inserir um dos dez algarismos:



Logo há, nas condições descritas, $11 \times 10 = 110$ possibilidades de se criar senhas. Entretanto, algumas dessas senhas assim criadas são repetidas, e devemos descontá-las de nossa contagem. Observemos um exemplo: a senha 00123456789 pode ser obtida de duas maneiras diferentes:

- 00123456789 (colocando-se 0 à esquerda do número 0123456789)
- 00123456789 (colocando-se 0 entre 0 e 1 no número 0123456789)

Cada um dos algarismos de 0 a 9 pode gerar uma, e só uma, duplicação de senha. Assim, devemos descontar da contagem inicial uma senha para cada algarismo. Há, portanto, $110 - 10 = 100$ senhas que Pedro pode criar nas condições descritas.

Segunda solução: Para facilitar nossa escrita, vamos representar pela letra X o algarismo a ser excluído. Para determinar o número de senhas possíveis, observemos as possibilidades de escolha para X, conforme a posição que ele ocupa na senha.

Para o caso em que X ocupa a primeira posição, ou seja, o bloco inicia na segunda posição, não existe restrição para a escolha de X. Portanto, para esse caso, temos 10 senhas diferentes.

Por outro lado, se X não ocupa a primeira posição, isto é, o bloco inicia na primeira posição, a única restrição é que X seja diferente do algarismo que está na posição anterior, para evitar duplicidade na contagem.

Por exemplo, se X ocupa a segunda posição, então a senha inicia com 0. Consequentemente, nesse caso, devemos ter X diferente de zero, pois as senhas que iniciam com 00 já foram contabilizadas anteriormente. Assim, nesse caso, temos 9 senhas diferentes, e diferentes das anteriores.

Se X ocupa a terceira posição, a senha deve iniciar com 01. Consequentemente, X deve ser diferente de 1, pois as senhas que iniciam com 011 já foram contabilizadas no caso anterior. Assim, nesse caso, temos 9 senhas diferentes, e diferentes das anteriores.

Seguindo este raciocínio, temos que, para X na primeira posição, existem 10 senhas e para cada uma das demais posições de X, 9 senhas.

Consequentemente, o total de senhas possíveis é $10 + 10 \times 9 = 10 + 90 = 100$.

