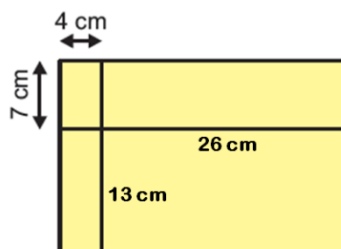


SOLUÇÕES N2 2015

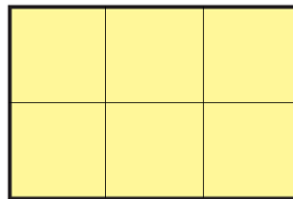
N2Q1 – Solução

item a)

O maior dos quatro retângulos tem lados de medida $30 - 4 = 26$ cm e $20 - 7 = 13$ cm. Logo, sua área é $26 \times 13 = 338$ cm².

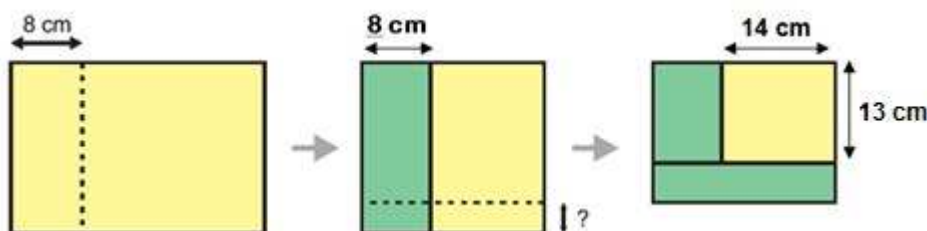


Item b)



Com um traço horizontal e dois verticais geramos os quadrados de maior área possível. Para formar apenas quadrados, o valor do lados desses quadrados deve dividir 20 e 30. A maior área ocorre, então, quando o lado desses quadrados for o máximo divisor comum de 20 e 30, ou seja, 10 cm.

Item c)



Vamos chamar a distância da segunda dobra até a margem inferior da folha de *altura da dobra*.

Como a folha tem 30 cm de largura e a primeira dobra foi feita a 8 cm da margem direita da folha, a largura da região em amarelo da última figura é igual a 30 cm menos duas vezes 8 cm, ou seja, $30 - 16 = 14$ cm.

Após a segunda dobra, o dobro da altura do retângulo amarelo será a diferença entre seu perímetro e o dobro de sua largura, ou seja, $54 - 28 = 26$ cm. Portanto, a altura do retângulo amarelo na terceira figura é 13 cm. Assim, da altura da folha original

sobraram $20 - 13 = 7$ cm para a realização da segunda dobra e, portanto, a altura da dobra é a metade, ou seja, $7 \div 2 = 3,5$ cm.

Outra solução.

Como a folha tem 30 cm de largura e a primeira dobra foi feita a 8 cm da margem direita da folha, a largura da região em amarelo da última figura é igual a 30 cm menos duas vezes 8 cm, ou seja, $30 - 16 = 14$ cm.

De forma análoga, como a folha tem 20 cm de altura, a altura da região em amarelo da última figura é igual 20 cm menos duas vezes a altura da dobra.

O perímetro da região em amarelo da última figura é igual a 54 cm, e seu semiperímetro (metade do perímetro) é 27 cm.

O semiperímetro de uma região retangular é a soma da largura e da altura dessa região. Assim, 14 cm mais 20 cm menos duas vezes a altura da dobra tem que ser igual a 27 cm.

- $14 + 20 - 2 \times (\text{altura da dobra}) = 27$ cm

Logo 27 cm mais duas vezes a altura da dobra é igual a 34 cm,

- $27 + 2 \times (\text{altura da dobra}) = 34$ cm

e a altura da dobra é igual à metade da diferença $34 - 27 = 7$ cm, ou seja, metade de 7 cm. Logo, altura da dobra = $(34 - 27) \div 2 = 3,5$ cm.

N2Q2 – Solução

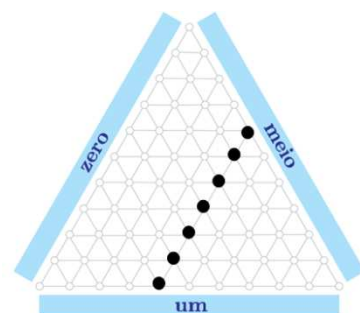
item a)

O aluno D obteve nota zero em 1 questão, nota meio em 5 questões e nota um em 4 questões. Sendo assim, a nota obtida pelo aluno D na prova foi $1 \times 0,0 + 5 \times 0,5 + 4 \times 1,0 = 6,5$.

Item b)

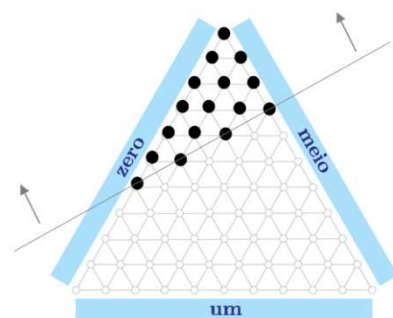
Há sete possibilidades de um aluno tirar nota zero em 4 questões.

- $1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 = 6 \times 1,0 + 0 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 0,5 = 5 \times 1,0 + 1 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 0,5 + 0,5 = 4 \times 1,0 + 2 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 1,0 + 1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 3 \times 1,0 + 3 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 2 \times 1,0 + 4 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1 \times 1,0 + 5 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 0 \times 1,0 + 6 \times 0,5 + 4 \times 0,0$



item c)

Há 16 possibilidades do aluno obter nota 7,0 ou maior do que 7,0, como está ilustrado na figura ao lado.



N2Q3 – Solução

item a)

A sequência que começa com 30 e 16 é: **30, 16, 14** = $30 - 16$, **2** = $16 - 14$, **12** = $14 - 2$. O próximo termo não pertence à sequência pois ele é negativo ($2 - 12 = -10$).

Item b)

Se a sequência tem cinco termos e termina em 1, 2, ela é do tipo

$$_, _, _, 1, 2.$$

Se chamarmos x o termo anterior ao 1 sabemos que $x - 1 = 2$, logo $x = 3$. Da mesma forma, se y é o termo anterior ao 3 sabemos que $y - 3 = 1$, logo $y = 4$. Finalmente, se z é o termo anterior ao 4 sabemos que $z - 4 = 3$, logo $z = 7$. Portanto, a sequência é formada pelos seguintes termos: 7, 4, 3, 1, 2.

Outra Solução.

Denotemos por a_n o n -ésimo termo da sequência cujo quarto termo é 1 e o quinto termo é 2. Assim,

$$a_3 = a_4 + a_5 = 1 + 2 = 3, \quad a_2 = a_3 + a_4 = 3 + 1 = 4, \quad a_1 = a_2 + a_3 = 4 + 3 = 7.$$

Logo, a sequência é formada pelos seguintes termos: 7, 4, 3, 1, 2.

Item c)

Denotemos por a o segundo termo da sequência. A sequência então é formada pelos termos: 25, a e $25 - a$; já que ela termina no terceiro termo, o termo posterior deve ser negativo, ou seja, $a - (25 - a) = 2a - 25 < 0$. Logo, a é um número inteiro não negativo, menor do que 12,5, ou seja

$$a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Item d)

Denotemos novamente por a o segundo termo da sequência e calculemos os demais termos, sem nos importarmos inicialmente com as restrições descritas no enunciado:

$$60, a, 60 - a, 2a - 60, 120 - 3a, 5a - 180, 300 - 8a, 13a - 480, \dots$$

Vamos impor agora as restrições do enunciado:

- $0 \leq a < 60$
- $2a - 60 \geq 0 \Rightarrow a \geq 30$
- $120 - 3a \geq 0 \Rightarrow a \leq 40$
- $5a - 180 \geq 0 \Rightarrow a \geq 36$
- $300 - 8a \geq 0 \Rightarrow a \leq 37,5$
- $13a - 480 \geq 0 \Rightarrow a \geq 36,9$

Como a é um número inteiro, $a = 37$ e a sequência é formada pelos termos: 60, 37, 23, 14, 9, 5, 4, 1, 3.

N2Q4 – Solução

item a)

No encontro da linha 7 com a coluna 21 foi escrito o algarismo 1, pois 21 é múltiplo de 7.

Item b)

A soma dos algarismos da linha 23 é 4, pois de 1 a 100 existem exatamente quatro múltiplos de 23 (a saber: 23, 46, 69, 92).

Item c)

Na coluna 98 aparecerá 1 nas casas das linhas correspondentes aos divisores de 98. Como $98 = 2 \times 7^2$, então 98 possui $2 \times 3 = 6$ divisores (a saber: 1, 2, 7, 14, 49 e 98). Logo, a soma dos algarismos que aparecem na coluna 98 é 6.

Item d)

A soma dos algarismos será ímpar nas colunas cujo número tenha uma quantidade ímpar de divisores. Os números que possuem uma quantidade ímpar de divisores são apenas os quadrados perfeitos. De fato, se d divide n , então n/d também divide n ; logo os divisores de um número natural sempre ocorrem aos pares, exceto quando $d = n/d$, ou seja, quando $n = d^2$.

Como $10^2 = 100$, temos 10 quadrados perfeitos de 1 a 100, incluindo os extremos. Logo, a soma dos algarismos é ímpar nas colunas correspondentes aos quadrados perfeitos.

Obs.: A partir da decomposição de um número natural em fatores primos, é fácil encontrar todos os seus divisores:

Se $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_s^{r_s}$ é a decomposição em fatores primos de n , então os divisores positivos de n são da forma:

$$p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \dots \cdot p_s^{t_s}, \text{ com } 0 \leq t_i \leq r_i, i = 1, \dots, s.$$

Este fato permite contar facilmente o número de divisores positivos de n , a saber

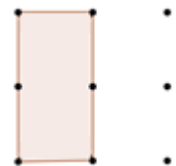
$$(r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) \cdot \dots \cdot (r_s + 1).$$

Como consequência, n tem um número ímpar de divisores se e somente se todos os expoentes das potências de primos de sua decomposição forem números pares e, portanto, n deve ser um quadrado perfeito.

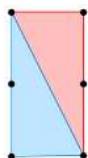
N2Q5 – Solução

item a)

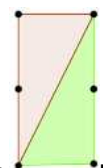
Dentro de cada retângulo como o indicado ao lado, há 4 triângulos congruentes ao da figura do enunciado:



- dois quando traçamos uma diagonal



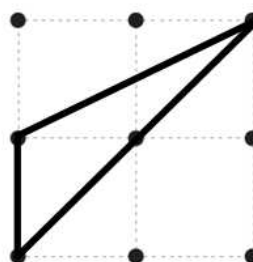
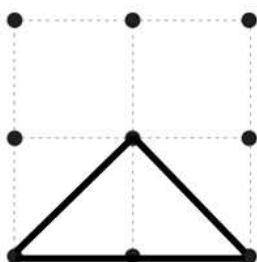
- outros dois quando traçamos a outra



Como há quatro retângulos congruentes ao descrito acima, poderemos fazer um total de $4 \times 4 = 16$ triângulos congruentes ao que está no enunciado da questão.

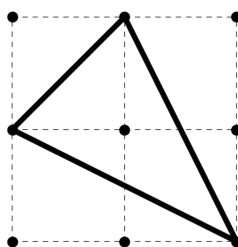
Item b)

Há vários triângulos possíveis. Abaixo estão duas possibilidades.



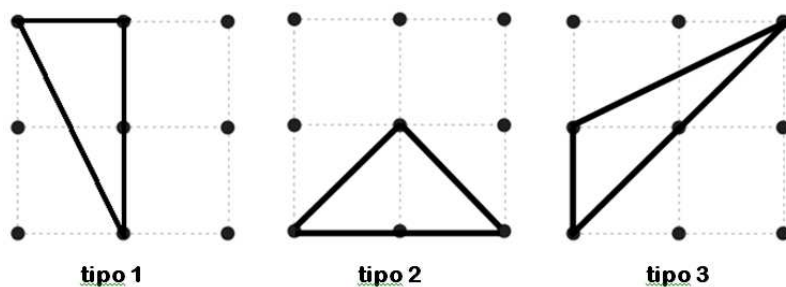
Item c)

Os triângulos com vértices na malha não possuem lados inteiros ou possuem pelo menos um lado inteiro. Os que não possuem lados inteiros são aqueles que possuem vértices não alinhados, nem na horizontal nem na vertical. Esses triângulos são congruentes ao triângulo abaixo e possuem área $1,5 \text{ cm}^2$.



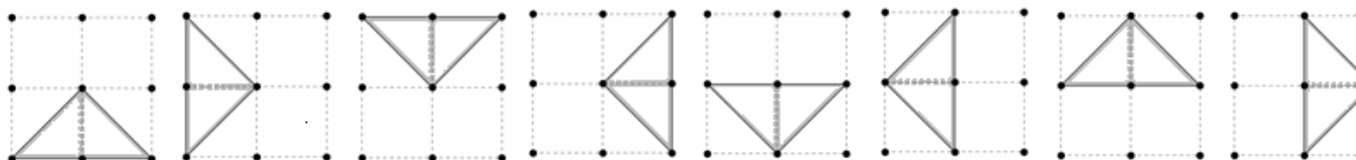
Logo os triângulos que têm área 1 necessariamente possuem pelo menos um lado inteiro. Assim, considerando esse lado como sendo a base para o cálculo da área,

teremos triângulos de base 1 cm e altura 2 cm ou triângulos de base 2 cm e altura 1 cm, e esses triângulos são todos congruentes a um dos três tipos abaixo.

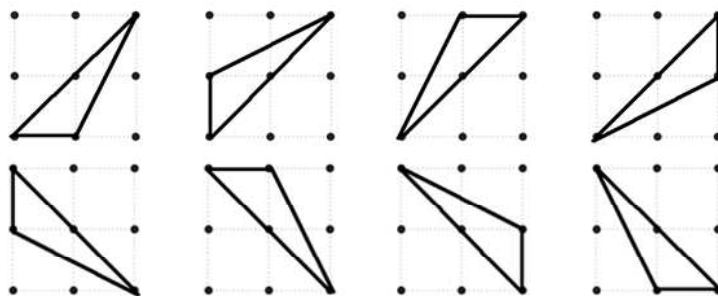


Vimos, no item a), que existem 16 triângulos do tipo 1.

É fácil ver que existem 8 triângulos do tipo 2, quatro deles com um vértice no ponto central da malha e outros quatro com um lado contendo o ponto central da malha.



Resta contar o número de triângulos do tipo 3. Há também apenas 8 triângulos deste tipo, quatro para cada uma das duas diagonais do quadrado maior.



Logo, no total teremos $16 + 8 + 8 = 32$ triângulos com área de 1 cm^2 e com vértices nos pontos marcados.

N2Q6 – Solução

item a)

Abaixo estão algumas maneiras de se cobrir o tabuleiro, todas elas diferentes da que aparece na Figura 1.



Item b)

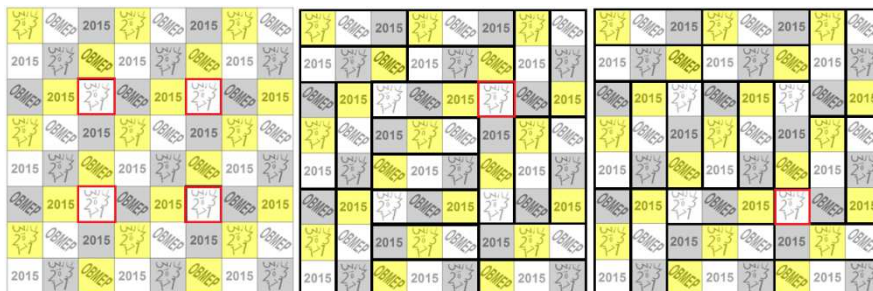
Primeiro, observemos que cinco peças cobrem exatamente $5 \times 3 = 15$ casas do tabuleiro. Consequentemente, quando cobrimos o tabuleiro com cinco peças, sobrará uma casa descoberta. Por outro lado, observemos que o tabuleiro apresentado possui 5 casas brancas, 5 casas cinzas e 6 casas amarelas. Também vemos que ele possui 5 casas marcadas com a palavra OBMEP, 5 com o ano 2015 e, finalmente, 6 com o logotipo . Como cada peça cobre sempre três cores e três marcas diferentes, concluímos que a única casa descoberta deve ser amarela e marcada com o logo . Mas somente as casas dos cantos têm estas características (amarela e marcada com ). Portanto, a única casa descoberta sempre será uma casa localizada em um dos cantos.

Outra solução. Se forem colocadas quatro peças no tabuleiro cobrindo os quatro cantos então as quatro casas centrais do tabuleiro ficarão descobertas, e a quinta peça nunca irá cobrir essas casas, pois não há possibilidade de encaixe para essa peça. Logo, a única forma de se cobrir um tabuleiro 4×4 com 5 peças é deixar uma das casas do canto descoberta. Isso é sempre possível, como visto no item a).

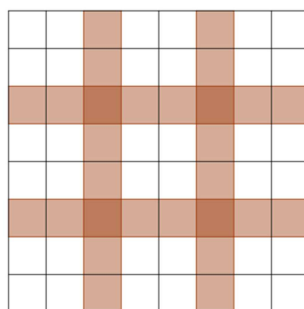
Item c)

Analogamente ao que vimos no item anterior, com 21 peças podemos cobrir 63 casas. Portanto, pelo menos uma casa ficará descoberta, uma vez que o tabuleiro 8×8 tem 64 casas. Usando o mesmo raciocínio aplicado no item anterior, observemos que o tabuleiro apresentado possui 21 casas amarelas, 21 casas cinzas e 22 casas brancas. Por outro lado, possui 21 casas demarcadas com a palavra OBMEP, 21 casas com o ano 2015 e 22 com o logo . Consequentemente, se a cobertura deixar apenas uma casa descoberta, esta deve ser branca e marcada com o logo . Dentre todas as casas do tabuleiro, existem apenas 4 com essas características, destacadas em vermelho na figura abaixo à esquerda. Na figura abaixo, ao centro, exibimos uma

possível cobertura com a correspondente casa descoberta. A partir dessa, “rodando” a cobertura sobre o tabuleiro, obtemos uma nova cobertura exibida na figura à direita, cuja casa descoberta é diferente da anterior. Seguindo esta ideia, podemos exibir 4 coberturas diferentes, cada uma correspondendo a uma das casas indicadas na figura à esquerda.



Outra solução. Pinte 28 casas do tabuleiro 8×8 , dispostas em duas faixas horizontais e duas faixas verticais, conforme a figura abaixo.



Suponha, por absurdo, que exista uma cobertura do tabuleiro com 21 peças do tipo 3×1 que cobrem as quatro casas situadas na interseção de duas faixas pintadas. Cada peça que cobre uma casa da interseção obrigatoriamente cobre 3 casas pintadas e não cobre duas casas da interseção de duas faixas. Portanto há 4 peças, cada uma cobrindo exatamente uma casa da interseção, logo, juntas cobrem ao todo 12 das casas pintadas. Pela disposição da pintura (das faixas estarem afastadas de 2 casas entre si), cada uma das 17 peças restantes cobre exatamente 1 casa pintada. Logo o número de casas pintadas no tabuleiro é maior do que ou igual a $12 + 17 = 29$, absurdo, pois apenas há 28 delas. Portanto qualquer cobertura do tabuleiro com 21 peças deixa descoberta uma das casas de interseção de duas faixas. A existência de coberturas do tabuleiro com 21 peças deixando descoberta uma casa da interseção de duas faixas é exibida na solução anterior.