

SOLUÇÕES N3 2015

N3Q1 – Solução

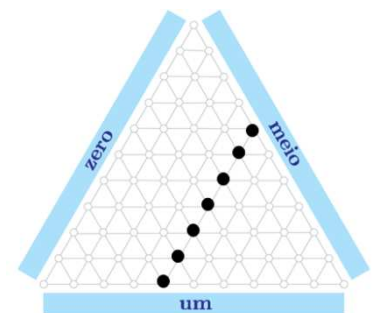
item a)

O aluno D obteve nota zero em 1 questão, nota meio em 5 questões e nota um em 4 questões. Sendo assim, a nota obtida pelo aluno D na prova foi $1 \times 0,0 + 5 \times 0,5 + 4 \times 1,0 = 6,5$.

Item b)

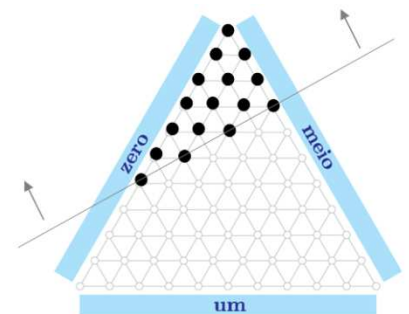
Há sete possibilidades de um aluno tirar nota zero em 4 questões.

- $1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 = 6 \times 1,0 + 0 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 0,5 = 5 \times 1,0 + 1 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0 + 0,5 + 0,5 = 4 \times 1,0 + 2 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 1,0 + 1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 3 \times 1,0 + 3 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 2 \times 1,0 + 4 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $1,0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1 \times 1,0 + 5 \times 0,5 + 4 \times 0,0$
- $0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 0 \times 1,0 + 6 \times 0,5 + 4 \times 0,0$



item c)

Há 16 possibilidades do aluno obter nota 7,0 ou maior do que 7,0, como está ilustrado na figura ao lado.



N3Q2 – Solução

item a)

Cliente	Horário da chegada	Duração do atendimento (minutos)	Tempo de espera na fila (minutos)	Horário de início do atendimento	Horário de término do atendimento
1	10h 06min	6	0	10:06	10:12
2	10h 15min	6	0	10:15	10:21
3	10h 19min	15	2	10:21	10:36
4	10h 29min	12	7	10:36	10:48
5	10h 34min	7	14	10:48	10:55
6	10h 42min	1	13	10:55	10:56

Item b)

O tempo médio de espera na fila foi de 6 minutos, pois $(0+0+2+7+14+13) \div 6 = 36 \div 6 = 6$.

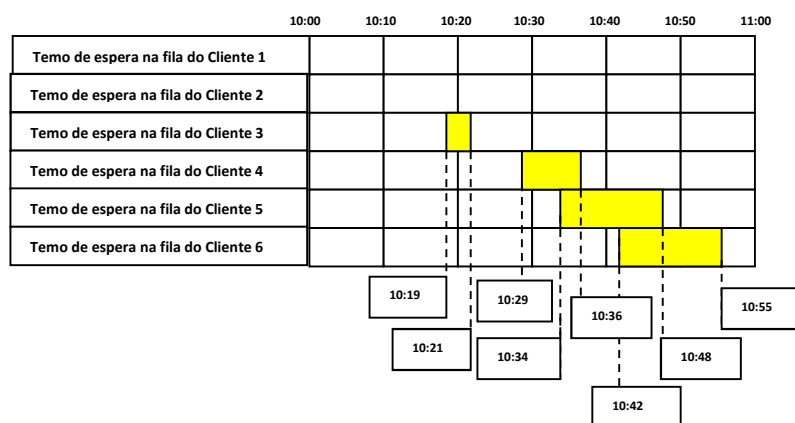
Item c)

Vamos observar, para cada cliente, o tempo de espera na fila:

- O Cliente 1 não ficou esperando na fila;
- O Cliente 2 não ficou esperando na fila;
- O Cliente 3 ficou esperando 2 minutos na fila, das 10:19 às 10:21;
- O Cliente 4 ficou esperando 7 minutos na fila, das 10:29 às 10:36;
- O Cliente 5 ficou esperando 14 minutos na fila, das 10:34 às 10:48;
- O Cliente 6 ficou esperando 13 minutos na fila, das 10:42 às 10:55.

Logo, das 10h 34min até as 10h 36min os clientes 4 e 5 ficaram esperando juntos na fila, e das 10h 42min até as 10h 48min os Clientes 5 e 6 ficaram esperando juntos na fila. Esses são os únicos intervalos em que duas pessoas ficaram esperando juntas na fila.

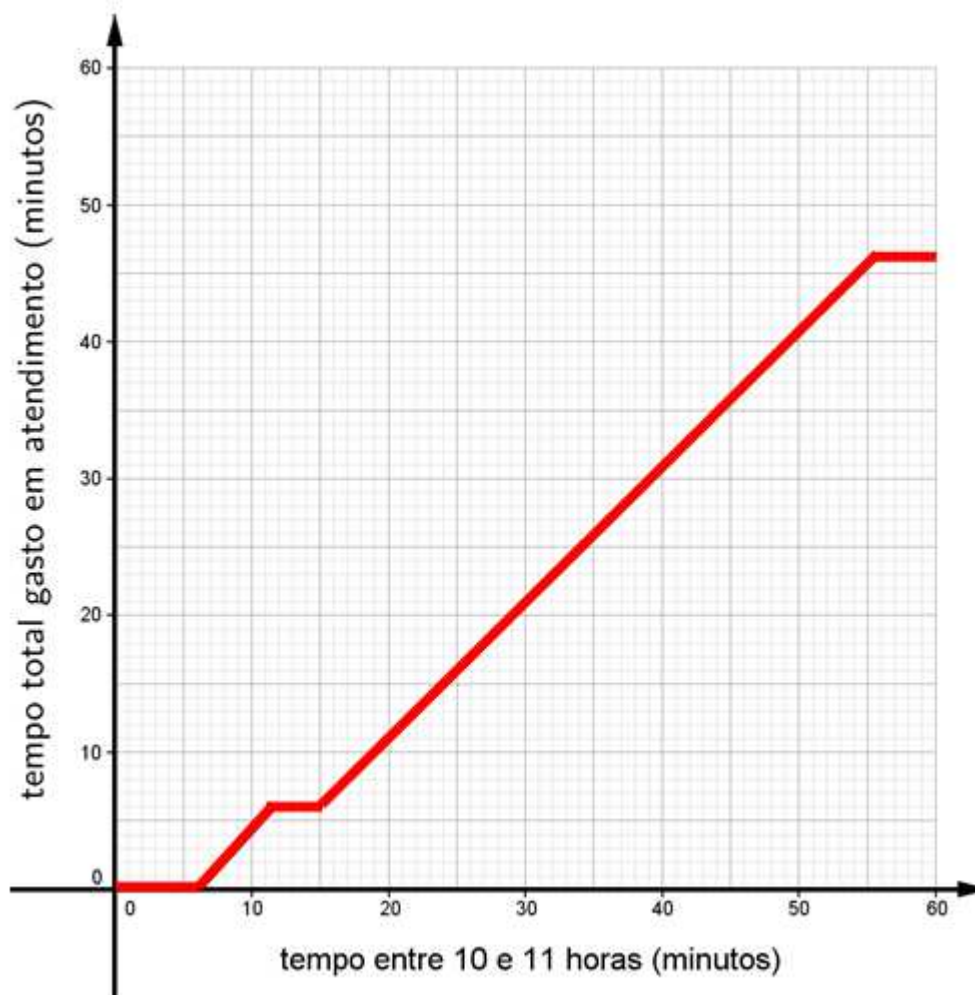
Outra solução.



No instante em que o Cliente 5 chega, ele encontra o Cliente 4 na fila, portanto, a fila terá dois clientes até o instante que o Cliente 3 sai do atendimento. Novamente, quando o Cliente 6 chega ele e o Cliente 5 ficam na fila até que o Cliente 4 sai do atendimento.

Logo, nos períodos das 10h 34min até as 10h 36min e no período das 10h 42min até as 10h 48min a fila ficou com dois clientes.

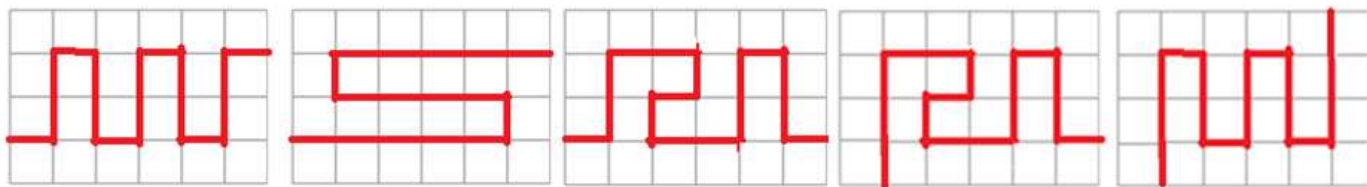
Item d)



N3Q3 – Solução

item a)

Podemos traçar várias linhas poligonais diferentes de comprimento 16 cm, as quais dividem o tabuleiro em duas regiões. Abaixo estão alguns exemplos.



Item b)

O comprimento de qualquer linha poligonal que começa e termina na borda do tabuleiro sempre será igual à quantidade de vértices dos quadradinhos que estão no interior do tabuleiro pelos quais o caminho passa, mais um. Assim, a linha poligonal de maior comprimento deve ter os seus pontos inicial e final no contorno do tabuleiro e passar por todos os vértices dos quadradinhos que estão no seu interior. Sempre é possível fazer um caminho assim, por exemplo serpenteando o interior do tabuleiro como na primeira figura acima. O número de vértices dos quadradinhos que estão no interior do tabuleiro $m \times n$ é $(m - 1)(n - 1)$, pois, nos lados do contorno do tabuleiro

temos $m + 1$ e $n + 1$ pontos. Portanto, o tamanho da linha poligonal de maior comprimento é $(m - 1)(n - 1) + 1$ cm.

Item c)

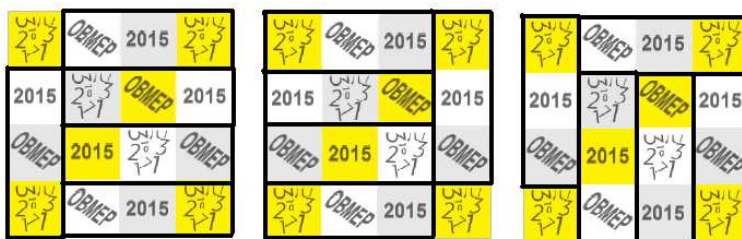
Dentre todos os tabuleiros possíveis com 100 casas, o comprimento da maior linha poligonal que Mônica traçou é 82 cm, pois para os comprimentos dos lados de tabuleiros retangulares com 100 quadradinhos temos as possibilidades listadas no quadro abaixo.

Comprimentos dos lados $m \times n$	Comprimento da maior poligonal $(m - 1)(n - 1) + 1$
1×100	$0 \times 99 + 1 = 1$ cm
2×50	$1 \times 49 + 1 = 50$ cm
4×25	$3 \times 24 + 1 = 73$ cm
5×20	$4 \times 19 + 1 = 77$ cm
10×10	$9 \times 9 + 1 = 82$ cm

N3Q4 – Solução

item a)

Abaixo estão algumas maneiras de se cobrir o tabuleiro, todas elas diferentes da que aparece na Figura 1.



Item b)

Primeiro, observemos que cinco peças cobrem exatamente $5 \times 3 = 15$ casas do tabuleiro. Consequentemente, quando cobrimos o tabuleiro com cinco peças, sobrá uma casa descoberta. Por outro lado, observemos que o tabuleiro apresentado possui 5 casas brancas, 5 casas cinzas e 6 casas amarelas. Também vemos que ele possui 5 casas marcadas com a palavra OBMEP, 5 com o ano 2015 e, finalmente, 6 com o logotipo . Como cada peça cobre sempre três cores e três marcas diferentes, concluímos que a única casa descoberta deve ser amarela e marcada com o logo . Mas somente as casas dos cantos têm estas características (amarela e marcada com ). Portanto, a única casa descoberta sempre será uma casa localizada em um dos cantos.

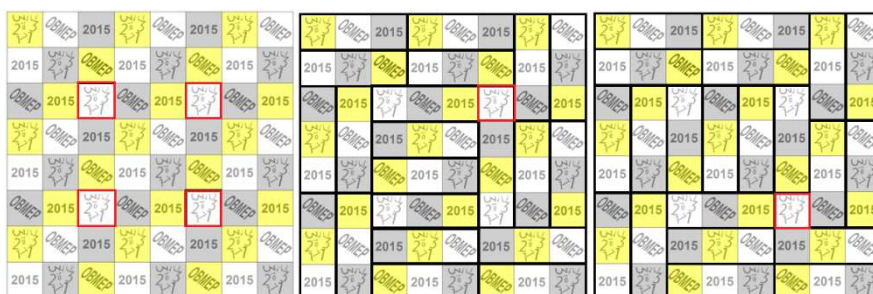
Outra solução. Se forem colocadas quatro peças no tabuleiro cobrindo os quatro cantos então as quatro casas centrais do tabuleiro ficarão descobertas, e a quinta peça nunca irá cobrir essas casas, pois não há possibilidade de encaixe para essa peça. Logo, a única forma de se cobrir um tabuleiro 4x4 com 5 peças é deixar uma das casas do canto descoberta. Isso é sempre possível, como visto no item a).

Item c)

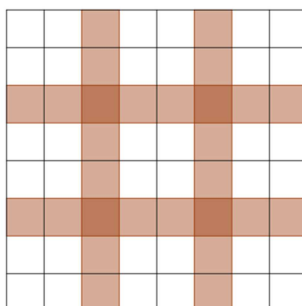
Analogamente ao que vimos no item anterior, com 21 peças podemos cobrir 63 casas. Portanto, pelo menos uma casa ficará descoberta, uma vez que o tabuleiro 8×8 tem 64 casas. Usando o mesmo raciocínio aplicado no item anterior, observemos que o tabuleiro apresentado possui 21 casas amarelas, 21 casas cinzas e 22 casas brancas. Por outro lado, possui 21 casas demarcadas com a palavra OBMEP,

21 casas com o ano 2015 e 22 com o logo . Consequentemente, se a cobertura deixar apenas uma

casa descoberta, esta deve ser branca e marcada com o logo . Dentre todas as casas do tabuleiro, existem apenas 4 com essas características, destacadas em vermelho na figura abaixo à esquerda. Na figura abaixo, ao centro, exibimos uma possível cobertura com a correspondente casa descoberta. A partir dessa, “rodando” a cobertura sobre o tabuleiro, obtemos uma nova cobertura exibida na figura à direita, cuja casa descoberta é diferente da anterior. Seguindo esta ideia, podemos exibir 4 coberturas diferentes, cada uma correspondendo a uma das casas indicadas na figura à esquerda.



Outra solução. Pinte 28 casas do tabuleiro 8×8 , dispostas em duas faixas horizontais e duas faixas verticais, conforme a figura abaixo.



Suponha, por absurdo, que exista uma cobertura do tabuleiro com 21 peças do tipo 3×1 que cobrem as quatro casas situadas na interseção de duas faixas pintadas. Cada peça que cobre uma casa da interseção obrigatoriamente cobre 3 casas pintadas e não cobre duas casas da interseção de duas faixas. Portanto há 4 peças, cada uma cobrindo exatamente uma casa da interseção, logo, juntas cobrem ao todo 12 das casas pintadas. Pela disposição da pintura (das faixas estarem afastadas de 2 casas entre si), cada uma das 17 peças restantes cobre exatamente 1 casa pintada. Logo o número de casas pintadas no tabuleiro é maior do que ou igual a $12 + 17 = 29$, absurdo, pois apenas há 28 delas. Portanto qualquer cobertura do tabuleiro com 21 peças deixa descoberta uma das casas de interseção de duas faixas. A existência de coberturas do tabuleiro com 21 peças deixando descoberta uma casa da interseção de duas faixas é exibida na solução anterior.

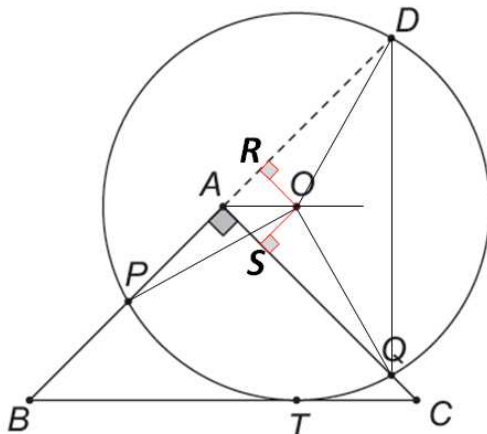
N3Q5 – Solução

item a)

A medida do arco determinado por P e Q e que contém o ponto T é igual à medida do ângulo central $\widehat{PAQ} = 90^\circ$.

Item b)

Os pontos A e O são equidistantes da reta BC e, portanto, na situação em que A e O não são coincidentes, eles definem a reta AO paralela à reta BC .



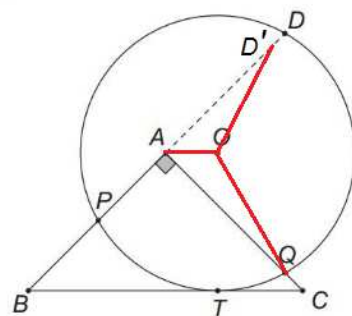
Vamos mostrar que os triângulos ADO e AQO são congruentes e disto seguirá o resultado esperado, isto é, que $AD = AQ$. Não podemos utilizar o falso caso de congruência “lado-lado-ângulo”, embora ele seja válido neste caso.

Como OD e OQ são raios da circunferência, eles têm a mesma medida. Devido ao paralelismo descrito acima, obtemos as congruências de ângulos: $\widehat{OAC} = \widehat{ACB}$ e $\widehat{ABC} = \widehat{DAO}$, mas então esses quatro ângulos medem 45° , pois ABC é isósceles retângulo em A . Assim O está sobre a bissetriz do ângulo $\widehat{DAQ}$. Projetamos ortogonalmente O sobre as retas AB e AC , como na figura, obtendo respectivamente os pontos R e S ; o quadrilátero $AROS$ é um quadrado.

Os triângulos RDO e SQO são congruentes, pois são retângulos e possuem pares de lados correspondentes com mesma medida ($OR = OS$ e $OD = OQ$). Logo $\widehat{ADO} = \widehat{AQO}$. Como consequência todos os ângulos dos triângulos ADO e AQO são, respectivamente, congruentes. Como esses triângulos têm dois pares de lados correspondentes congruentes, eles são, de fato, congruentes. Logo $AD = AQ$.

Outra solução. Os pontos A e O são equidistantes da reta BC e, portanto, na situação em que A e O não são coincidentes, eles definem a reta AO paralela à reta BC .

Suponha que $AD > AQ$ e considere o ponto D' no segmento AD com $AD' = AQ$, como na figura ao lado. Então os triângulos OAD' e OAQ são semelhantes, pelo caso LAL. Como o lado AO é comum, esses triângulos são congruentes. Logo $OQ = OD'$, o que é impossível, pois OQ é um raio e D' é um ponto interior ao círculo. Analogamente, não podemos ter $AD < AQ$. Consequentemente, $AD = AQ$.



Item c)

No item anterior vimos que o triângulo ADQ é isósceles e, portanto, o ângulo $\widehat{PDQ}$ mede 45° . Logo, como o ângulo central $\widehat{POQ}$ tem o dobro da medida de $\widehat{PDQ}$, concluímos que a medida em graus do arco PQ passando por T é também 90° . Deste modo, o comprimento do arco PQ que contém o ponto de tangência T é sempre o mesmo, igual a $\frac{1}{4}$ da medida da circunferência.

N3Q6 – Solução

item a)

Fixada uma equipe, todas as demais 7 equipes têm a mesma probabilidade (igual a $1/7$) de ser sua adversária na próxima fase. Logo, a probabilidade de que uma equipe francesa enfrente a outra na primeira fase é $1/7$.

Outra solução: Um modo de definir os confrontos consiste em ordenar, por sorteio, as 8 equipes e determinar os quatro jogos: Equipe 1 x Equipe 2, Equipe 3 x Equipe 4, Equipe 5 x Equipe 6 e Equipe 7 x Equipe 8. Procedendo deste modo, há $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ sorteios possíveis para as equipes. Para produzir um caso favorável devemos:

- Escolher a partida em que as equipes francesas vão se enfrentar (4 possibilidades);
- Escolher a ordem dessas equipes no sorteio (2 possibilidades);
- Definir a posição das demais equipes ($6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilidades).

Logo, o número de casos favoráveis é $4 \times 2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ e a probabilidade de que duas equipes francesas se enfrentem na primeira fase é

$$\frac{4 \times 2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{7}$$

Outra solução: O número de emparelhamentos possíveis entre duas equipes é $8 \times 7/2 = 28$ (seleciona-se a primeira equipe dentre 8, depois a segunda dentre 7 e divide-se o resultado do produto por 2 devido à simetria dentro de cada par, pois a ordem das equipes em uma partida não deve ser levada em conta na contagem). Desses 28 emparelhamentos, há um só entre equipes francesas, mas isto pode ocorrer em qualquer dos quatro jogos da primeira fase. Logo, a probabilidade de duas equipes francesas se enfrentarem é $(1/28) \times 4 = 1/7$.

Item b)

Há três confrontos possíveis entre equipes espanholas. A probabilidade de cada confronto na primeira fase é $1/7$. Como esses confrontos são mutuamente excludentes (isto é, no máximo um dos confrontos pode ocorrer), a probabilidade de que duas equipes espanholas se enfrentem na primeira fase é $1/7 + 1/7 + 1/7 = 3/7$.

Outra solução: Como na segunda solução do item a), há $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ sorteios possíveis. Para produzir um caso favorável devemos:

- Escolher duas das três equipes espanholas para se enfrentarem (3 possibilidades);
- Escolher a partida em que essas equipes vão se enfrentar (4 possibilidades);
- Escolher a ordem dessas equipes no sorteio (2 possibilidades);
- Definir a posição das demais equipes ($6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilidades).

Logo, o número de casos favoráveis é $3 \times 4 \times 2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ e a probabilidade de que duas equipes espanholas se enfrentem na primeira fase é

$$\frac{3 \times 4 \times 2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{3}{7}$$

Outra solução: O número de emparelhamentos entre as três equipes espanholas é igual a 3. Qualquer um desses emparelhamentos pode ocorrer em qualquer um dos quatro jogos da primeira fase e assim a probabilidade de duas equipes espanholas se enfrentarem nessa fase é $(3/28) \times 4 = 3/7$.

Item c)

Há $8 \times 7/2 = 28$ possibilidades para o par de equipes que se enfrentarão na final. Como as chances de vitória são iguais em cada confronto, todos estes 28 possíveis encontros são equiprováveis. Deles, um é entre duas equipes francesas e três são entre equipes espanholas. Logo, a probabilidade de que a final seja entre equipes do mesmo país é $4/28 = 1/7$.

Outra solução: A final será entre duas equipes: Equipe A x Equipe B. Como todas as equipes têm a mesma probabilidade de chegar a final, a probabilidade da Equipe A ser espanhola é $\frac{3}{8}$, pois são três equipes espanholas dentre oito equipes participantes do torneio. Se a Equipe A for espanhola, a probabilidade da Equipe B ser também espanhola é $\frac{2}{7}$. Logo a probabilidade de uma final entre duas equipes espanholas é $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$. De forma análoga, a probabilidade de uma final francesa é $\frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$. Logo a probabilidade de uma final entre duas equipes de um mesmo país é $\frac{3}{28} + \frac{1}{28} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

Outra solução: Para que haja dois times franceses na final é necessário que eles estejam presentes na 2ª fase, que não disputem jogos entre si e que vençam seus jogos da 2ª fase. Para que estejam na 2ª fase é necessário que não disputem partidas entre si e que vençam seus jogos da 1ª fase. A probabilidade de dois times franceses disputarem a final é, portanto,

$$\left(\frac{6}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{28}.$$

Analogamente, há três possibilidades da final ser realizada com dois times espanhóis e, como caso dos times franceses descrito acima, cada uma das duplas de times espanhóis tem probabilidade igual a $\frac{1}{28}$ de disputar a final. Logo a probabilidade de dois times do mesmo país disputarem a final é $4 \cdot \left(\frac{1}{28}\right) = \frac{1}{7}$.

Outra solução: Como vimos acima, a probabilidade dos dois times franceses disputarem a final é $\frac{1}{28}$. Para calcular a probabilidade de uma dupla de times espanhóis disputar a final, vamos dividir em casos mutuamente excludentes:

1) Três times espanhóis disputam a 2ª fase

2a) Dois times espanhóis disputam a 2ª fase e não há dois times espanhóis que se enfrentam na 1ª fase.

2b) Dois times espanhóis disputam a 2ª fase e dois times espanhóis se enfrentam na 1ª fase.

No caso 1), nenhum dos times espanhóis disputou com outro espanhol jogos da 1ª fase, todos eles venceram seus jogos e, na segunda fase, o time espanhol que não disputou com outro time de seu país venceu o jogo. A probabilidade, neste caso, é $\left(\frac{6}{7}\right) \cdot \left(\frac{4}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{28}$.

No caso 2a), $\left(\frac{6}{7}\right) \cdot \left(\frac{4}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{28}$

No Caso 2b) $\left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{28}$

Logo a probabilidade de dois times do mesmo país disputarem a final é $\frac{1}{28} + 3 \cdot \left(\frac{1}{28}\right) = \frac{1}{7}$.