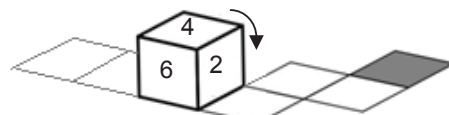
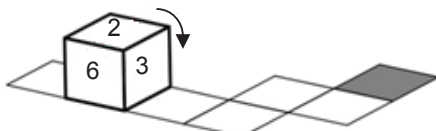
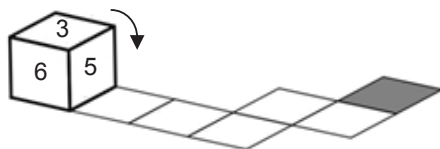


QUESTÃO 1 ALTERNATIVA B

O enunciado da questão mostra o dado em suas duas primeiras posições. Continuando os sucessivos giros, observamos que as faces do dado se comportam da seguinte maneira:

Após o 1º. giro:

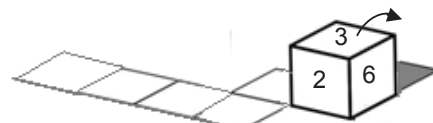
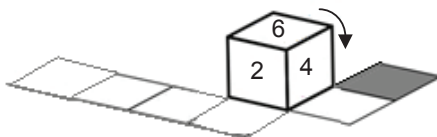
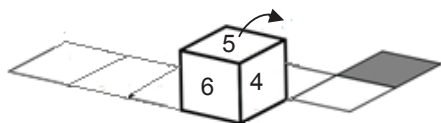
Após o 2º. giro:



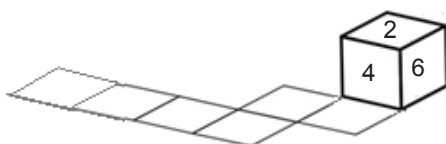
Após o 3º. giro:

Após o 4º. giro:

Após o 5º. giro:



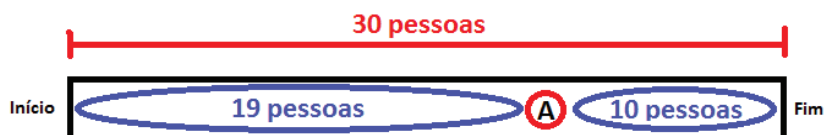
Após o 6º. giro:



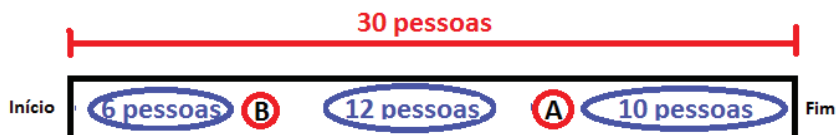
Assim, o número que aparece no topo do dado quando este estiver sobre a casa cinza é 2.

QUESTÃO 2 ALTERNATIVA C

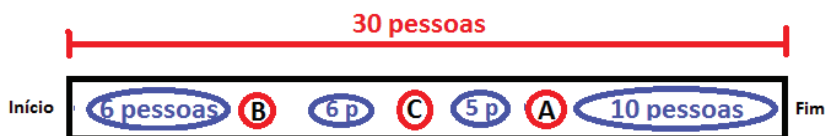
Inicialmente, vamos analisar a posição relativa entre Ana e Beatriz. Observe a posição de Ana na fila:



Como há 12 pessoas entre Ana e Beatriz, Beatriz tem que estar antes de Ana.



Como há uma pessoa a mais entre Beatriz e Carla do que entre Ana e Carla, podemos concluir que Carla está entre Beatriz e Ana.



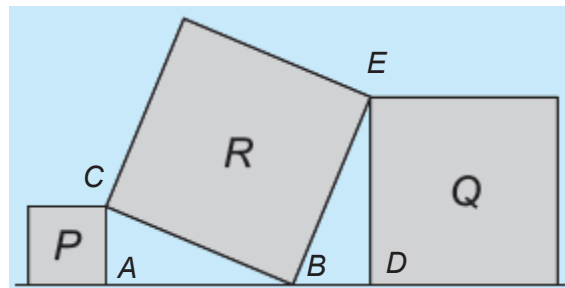
Logo Beatriz está à frente de Carla, que está à frente de Ana.

QUESTÃO 3

ALTERNATIVA D

Primeiramente observe que os triângulos ABC e DEB são congruentes e, portanto, o segmento AB tem a mesma medida do lado DE do triângulo Q . Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC , temos que área de $R = \text{área de } P + \text{área de } Q$.

Portanto, a área de Q é $168 - 24 = 144 \text{ cm}^2$.



QUESTÃO 4

ALTERNATIVA E

Devemos fazer uma análise das alternativas uma a uma. Inicialmente faremos isto com uma abordagem qualitativa.

a) O aumento percentual do preço de B foi maior do que o de A.

Esta alternativa é incorreta pois há dois patamares de A e B de mesmo tamanho (7%) e um patamar de B menor do que o de A. Logo, A teve o maior aumento percentual de preço.

b) O aumento percentual dos preços dos dois produtos foi o mesmo.

Essa alternativa também é falsa. Como dois dos patamares são iguais e o segundo patamar de A é maior do que o primeiro patamar de B, então o aumento percentual de A foi maior do que o de B.

c) O aumento percentual do preço de A foi de exatamente 13%.

Também é falsa. A segunda taxa de aumento do produto A (6%) incide sobre o preço já acrescido do primeiro aumento (7%). Assim os aumentos percentuais não se somam e, com certeza, o aumento percentual anual do produto A foi maior do que 13%.

d) O preço de A diminuiu e o de B aumentou.

Esta afirmação é claramente falsa. Os preços não diminuíram. O que houve foi a diminuição do percentual de aumento do preço do produto A. Os preços de A e de B com certeza aumentaram.

e) O aumento percentual do preço de B foi maior do que 12%.

Essa é a afirmação verdadeira, já que o segundo percentual de aumento de B incide sobre o preço já acrescido do primeiro aumento.

Todas as conclusões acima também podem ser obtidas quantitativamente.

a) O produto A aumentou 7%, depois, 6%, o que dá um percentual total de 13,42%. De fato, se P_A é o preço inicial de A, o preço final depois dos dois semestres é

$$P_A + (7/100) P_A + (6/100) (P_A + (7/100) P_A) = P_A + (13,42/100) P_A.$$

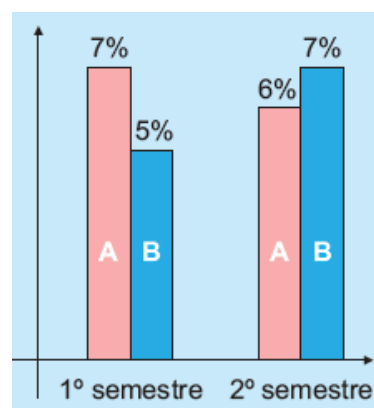
Do mesmo modo, se P_B é o preço inicial do produto B, o preço de B depois dos aumentos nos dois semestres será $P_B + (12,35/100) P_B$.

b) Como vimos acima, o aumento de preços não foi igual para os dois produtos. Portanto, esta alternativa é falsa.

c) Vimos também que o aumento de preço para o produto A foi de 13,42%. Portanto, esta alternativa também é falsa.

d) Pelo exposto acima, os preços de A e de B aumentaram. Houve um decaimento na porcentagem do aumento do produto A de um semestre para o outro.

e) O aumento do preço de B foi de 12,35%, portanto, maior do que 12%. Alternativa correta.



QUESTÃO 5 ALTERNATIVA A

Se considerarmos a soma dos números:

- 130 $\Rightarrow$ alunos que comem carne
 150 $\Rightarrow$ alunos que comem massa
 70 $\Rightarrow$ alunos que não comem carne nem massa,

teremos um total de 350 pessoas.

Nesta soma contamos duas vezes os alunos que comeram carne e macarrão, ou seja, ela é igual ao número total T de alunos, acrescentado de $(1/6)T$, que é o número de estudantes que comeram carne e macarrão, fornecido pelo enunciado. Teremos então $350 = T + (1/6)T = (7/6)T$. Logo $T = 300$ e $(1/6)T = 50$. Assim, comeram apenas carne $130 - 50 = 80$ alunos.

QUESTÃO 6 ALTERNATIVA C

Vamos colocar todas as respostas, identificando suas respectivas autoras, em uma mesma tabela.

	1	2	3	4	5
A	Ana, Beatriz e Cecília	Ana	Cecília	Beatriz e Cecília	
B		Beatriz e Cecília			Ana e Cecília
C			Beatriz		
D				Ana	
E			Ana		Beatriz

A prova tem cinco questões. Como Ana acertou quatro questões e Cecília três, concluímos que elas devem ter acertado pelo menos duas questões em comum, e a tabela nos mostra que elas acertaram as questões 1 e 5. Mas Beatriz também acertou a questão 1; logo, errou todas as outras. Concluímos que Cecília não acertou as questões 2 e 4, e, logo, ela acertou também a questão 3. Segue que Ana errou a questão 3.

QUESTÃO 7 ALTERNATIVA E



Após Bento ter corrido 1800 metros, ele ficou 90 metros à frente de Carlos. Portanto, quando Bento correr mais $1800 \div 9 = 200$ metros, ele aumentará a distância para Carlos em mais $90 \div 9 = 10$ metros. Logo, ao cruzar a linha de chegada, Bento estará $90 + 10 = 100$ metros à frente de Carlos.

Outra solução: Sejam t_1 e t_2 os tempos que André e Bento demoraram, respectivamente, para completarem a corrida. Vamos calcular quanto Carlos correu decorrido o tempo t_2 . Denotaremos essa distância por $s(t_2)$ e as velocidades de Bento e Carlos por v_B e v_C , respectivamente. Então,

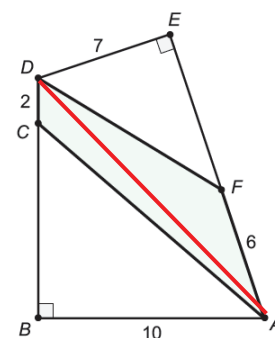
$$s(t_2) = v_C \cdot t_2 = v_C \cdot (2000/v_B).$$

$$\text{Mas, } \frac{v_C}{v_B} = \frac{\frac{1710}{t_1}}{\frac{1800}{t_1}} = \frac{1710}{1800},$$

logo, $s(t_2) = (1710/1800) \cdot 2000 = 1900$ metros. Assim, quando Bento cruzou a linha de chegada, Carlos estava $2000 - 1900 = 100$ metros atrás dele.

QUESTÃO 8 ALTERNATIVA C

A área do quadrilátero $ACDF$ é a soma das áreas dos triângulos ACD e ADF . O triângulo ACD tem base $CD = 2$ e altura $AB = 10$ relativa à base CD , enquanto o triângulo ADF tem base $FA = 6$ e altura $DE = 7$ relativa à base FA . Logo, a área do triângulo ACD é $(2 \times 10) \div 2 = 10$ e a área do triângulo ADF é $(6 \times 7) \div 2 = 21$. Somando essas áreas, obtemos que o quadrilátero $ACDF$ tem área 31.



QUESTÃO 9 ALTERNATIVA D

Como o número total de bolas em cinco caixas consecutivas é sempre o mesmo, a quantidade de bolas da primeira até a quinta caixa deve ser igual à quantidade de bolas da segunda até a sexta caixa:

$$(n^\circ \text{ de bolas na Caixa 1}) + 5 + 9 + 1 + (n^\circ \text{ de bolas na Caixa 5}) =$$

$$5 + 9 + 1 + (n^\circ \text{ de bolas na Caixa 5}) + (n^\circ \text{ de bolas na Caixa 6})$$

Logo, $(n^\circ \text{ de bolas na Caixa 1}) = (n^\circ \text{ de bolas na Caixa 6})$.

Pelo mesmo motivo, começando da segunda caixa e depois na terceira caixa,

$$5 + 9 + 1 + (n^\circ \text{ de bolas na Caixa 5}) + (n^\circ \text{ de bolas na Caixa 6}) =$$

$$9 + 1 + (n^\circ \text{ de bolas na Caixa 5}) + (n^\circ \text{ de bolas na Caixa 6}) + (n^\circ \text{ de bolas na Caixa 7}).$$

Logo, o número de bolas na Caixa 7 é 5.

De modo análogo, vemos que o número de bolas da Caixa 8 é 9, o número de bolas na Caixa 9 é 1, que a Caixa 10 possui o mesmo número de bolas que o da Caixa 5 e a Caixa 11, o mesmo número de bolas que o da Caixa 6, o qual é igual ao número de bolas na Caixa 1, como vimos acima. As quantidades de bolas repetem-se a cada cinco caixas.

Na ilustração há a informação de que as caixas contendo 3 e 7 bolas são vizinhas; para que isto ocorra, a Caixa 1 deve conter 7 bolas e as caixas 5 e 6 devem conter, respectivamente, 3 e 7 bolas. Assim, os conteúdos das caixas formam a sequência 7, 5, 9, 1, 3, 7, 5, 9, 1, 3

De fato, não pode ocorrer que a primeira caixa contenha 3 bolas, pois isto geraria a sequência 3, 5, 9, 1, 7, 3, 5, 9, 1, 7, ... e a ordem entre 3 e 7 seria incompatível com o que aparece na ilustração no enunciado.

Para descobrir o conteúdo da Caixa 2016, fazemos a divisão de 2016 por 5; o resto é 1 e isto nos diz que o conteúdo da Caixa 2016 é o mesmo que o da Caixa 1, ou seja, que a Caixa 2016 contém 7 bolas.

Solução 2: (utilizando Álgebra)

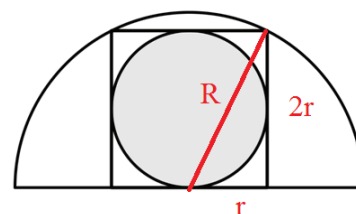
Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 os números de bolas distribuídas em seis caixas consecutivas, respectivamente. Como o número total de bolas em cinco caixas consecutivas é sempre o mesmo, segue que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ e, conseqüentemente, $x_1 = x_6$. Assim, caixas cujos números diferem por cinco unidades contêm o mesmo número de bolas. Como em duas caixas consecutivas aparecem 3 e 7 bolas, concluímos que os conteúdos das caixas formam a sequência 7, 5, 9, 1, 3, 7, 5, 9, 1, 3 ..., pois a outra possibilidade, 3, 5, 9, 1, 7, 3, 5, 9, 1, 7 ..., é incompatível com a informação da ilustração. Assim, a caixa de número 2016 contém a mesma quantidade de bolas que a Caixa 1, a saber, 7 bolas.

QUESTÃO 10 ALTERNATIVA A

Vamos chamar de r e R o raio da circunferência inscrita no quadrado e o raio do semicírculo, respectivamente. Como a circunferência está inscrita no quadrado, temos que o lado do quadrado mede $2r$. Observando o triângulo retângulo destacado na figura e usando o teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$R^2 = 4r^2 + r^2 = 5r^2$$

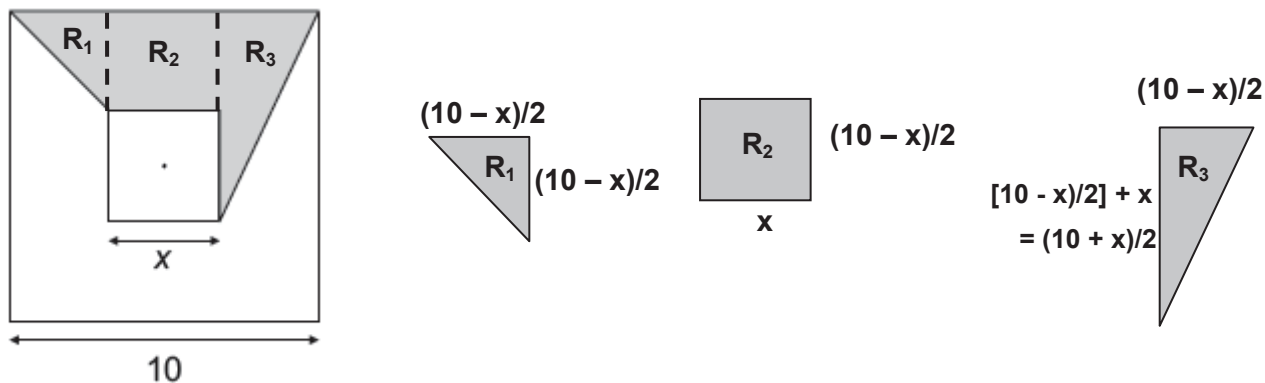
Assim, a área do semicírculo é $\frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{5}{2} \pi r^2 = \frac{5}{2} \cdot 10 = 25 \text{ cm}^2$.



QUESTÃO 11

ALTERNATIVA B

A região cinza pode ser dividida em três regiões, indicadas nas figuras abaixo:



Assim, a área $A(x)$ da região cinza é dada por

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 + x \cdot \left(\frac{10-x}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10-x}{2}\right) \cdot \left(\frac{10+x}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{10-x}{2}\right) \cdot \left[\left(\frac{10-x}{4}\right) + x + \left(\frac{10+x}{4}\right)\right] \\
 &= \frac{-1}{2}(x-10) \cdot (x+5)
 \end{aligned}$$

Logo, $A(x)$ é representada graficamente, para $0 \leq x \leq 10$, por uma parábola com concavidade voltada para baixo com raízes $x_1 = -5$ e $x_2 = 10$ e abscissa do vértice

$$x_v = \frac{-5+10}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Logo, o gráfico que expressa a área $A(x)$ da região cinza em função de x é o da alternativa B.

QUESTÃO 12 ALTERNATIVA E

Na figura, os segmentos auxiliares FG e FB são perpendiculares aos catetos AH e AC , respectivamente. Usaremos a notação AB tanto para indicar o segmento, como para sua medida.

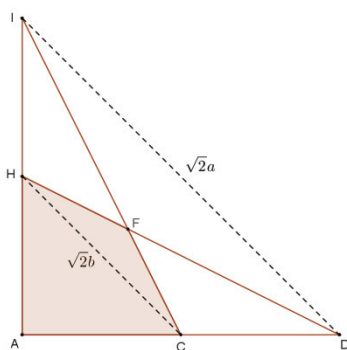
Usando a simetria da figura, se $FG = FB = x$, então, $ABFG$ é um quadrado de lado x , logo, $FG = FB = AB = AG = x$. Além disso, dos dados do problema temos que $AC = AH = b$ e $AI = AD = a$.

Por outro lado, os triângulos BDF e ADH são semelhantes; logo, vale a seguinte relação:

$$\frac{a-x}{a} = \frac{x}{b}.$$

Concluimos que $x = \frac{ab}{a+b}$. Finalmente, a área do quadrilátero $ACFH$ (ele pode ser decomposto nos triângulos AFH e AFC) é dada por

$$\text{área}(ACFH) = 2 \frac{bx}{2} = bx = \frac{ab^2}{a+b}.$$



Outra solução: Construímos os segmentos auxiliares CH e DI . Os triângulos DFI e CFH são semelhantes com razão de semelhança $\frac{DI}{CH} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}b} = \frac{a}{b}$. Denotando por X e por Y as áreas dos triângulos CFH e DFI , respectivamente, temos que $Y = \frac{a^2}{b^2} X$.

Por outro lado, temos que $\text{área}(CDF) = \frac{(a-b)a}{2} - Y = \frac{(a-b)b}{2} - X$, ou seja,

$$Y - X = \frac{(a-b)a}{2} - \frac{(a-b)b}{2} = \frac{(a-b)^2}{2}. \text{ Usando que } Y = \frac{a^2}{b^2} X \text{ temos a igualdade}$$

$$\left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) X = \frac{(a-b)^2}{2}, \text{ de onde obtemos que } X = \frac{(a-b)^2}{2} \frac{b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a-b)b^2}{2(a+b)}.$$
 Finalmente,

$$\text{área}(ACFH) = \frac{b^2}{2} + \frac{(a-b)b^2}{2(a+b)} = \frac{2ab^2}{2(a+b)} = \frac{ab^2}{a+b}.$$

QUESTÃO 13 ALTERNATIVA B

Tomando $x = 0$, obtemos $f(1) + 2f(0) = 3 \times 0 = 0$. Logo, $f(1) = -2f(0)$. Tomando $x = 1$, obtemos $f(0) + 2f(1) = 3 \times 1 = 3$. Substituindo $f(1) = -2f(0)$, nessa equação, obtemos $f(0) + 2(-2f(0)) = 3$. Equivalentemente, $-3f(0) = 3$, ou seja, $f(0) = -1$.

QUESTÃO 14 ALTERNATIVA B

Sejam x o lado menor do retângulo $ABEF$, b o lado maior de $ABEF$ e h a altura do triângulo BIC com relação ao lado BC . A área do triângulo BHE é $\frac{1}{4}$ da área do retângulo $ABEF$, ou seja, é igual a $\frac{b \cdot x}{4}$. A área do retângulo $ABEF$ será denotada por A_{ABEF} e notações análogas serão utilizadas para outras figuras geométricas.

Como os triângulos BIC e FIA são semelhantes,

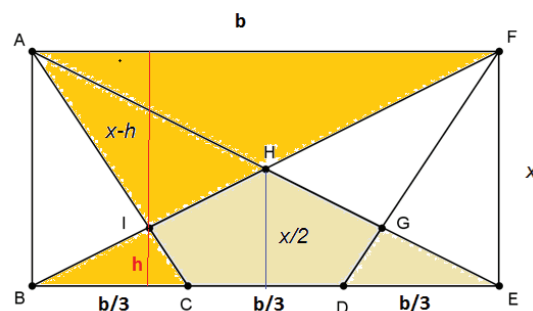
$$\frac{h}{x-h} = \frac{b/3}{b} \Rightarrow 3h = x-h \Rightarrow h = \frac{x}{4}$$

$$A_{BIC} = A_{GDE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{x}{4} = \frac{b \cdot x}{24} = \frac{A_{ABEF}}{24}$$

Portanto,

$$A_{CDGHI} = \frac{A_{ABEF}}{4} - \frac{A_{ABEF}}{24} - \frac{A_{ABEF}}{24} = \frac{4A_{ABEF}}{24} = \frac{A_{ABEF}}{6}$$

Logo, $\frac{A_{CDGHI}}{A_{ABEF}} = \frac{1}{6}$.



QUESTÃO 15 ALTERNATIVA C

1ª solução: O perímetro do retângulo maior $ABCD$ é igual ao perímetro da figura em forma de cruz formada pelos cinco retângulos (os que possuem números marcados em seu interior e o retângulo cinza), como na ilustração ao lado. O perímetro dessa figura é igual à soma das medidas de todos os lados dos quatro retângulos externos, menos as de cada um de seus lados que coincidem com os lados do retângulo cinza. A soma das medidas de todos os lados desses quatro retângulos externos é $16 + 18 + 26 + 14 = 74$ e o perímetro da figura em forma de cruz é 54, pois ele é igual ao perímetro do retângulo $ABCD$. Logo, o perímetro do retângulo cinza é $74 - 54 = 20$ cm.

2ª solução (exige alguns conhecimentos de Álgebra):

As letras de a até f na figura são as medidas dos lados dos retângulos menores. Calculando o perímetro de cada um dos retângulos menores, temos:

$$2b + 2d = 16$$

$$2a + 2e = 18$$

$$2c + 2e = 14$$

$$2b + 2f = 26$$

$$2b + 2e = ?$$

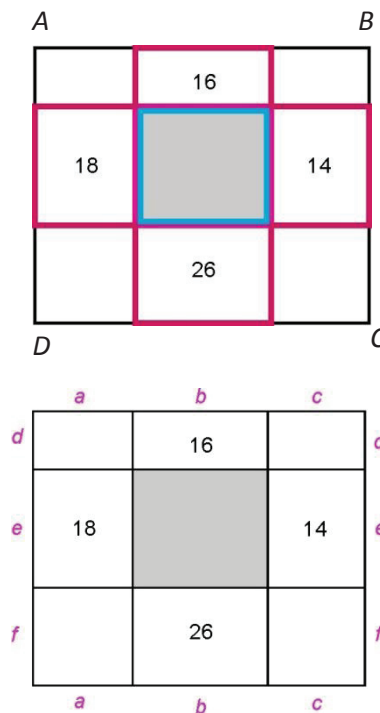
O perímetro do retângulo maior $ABCD$ é $2(a + b + c) + 2(d + e + f) = 2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f = 54$.

Somando os perímetros dos quatro retângulos ao redor do retângulo central cujas medidas são dadas, temos:

$$2b + 2d + 2a + 2e + 2c + 2e + 2b + 2f = \underbrace{2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f}_{\text{perímetro do retângulo maior}} + 2b + 2e$$

Assim, $16 + 18 + 14 + 26 = 54 + 2b + 2e \Leftrightarrow 2b + 2e = 74 - 54 = 20$.

Portanto, o perímetro do retângulo cinza é 20 cm.



QUESTÃO 16 ALTERNATIVA A

Como a bolinha que caiu não foi encontrada, nada se pode afirmar sobre ela, isto é, se ela era de João ou não era, então, tudo se passa como se ela ainda estivesse na caixa. Portanto, a probabilidade de João vencer é de 2 chances em 20, ou seja, $2/20 = 1/10$.

Uma outra maneira de resolver o problema é dividi-lo em casos:

Caso 1. A bolinha que caiu era a de João. Neste caso, a probabilidade de João ganhar é 0, sua bolinha nunca será sorteada.

Caso 2. A bolinha que caiu não é a de João. Neste caso, a probabilidade de João ganhar é

$$\frac{19}{20} \cdot \left(\frac{1}{19} + \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} \right) = \frac{1}{10}$$

De fato, a probabilidade da bolinha não ser a de João é $19/20$. Para João ter ganhado, ou isto ocorreu já na primeira retirada (1 bola entre 19 no total) ou isto não ocorreu da primeira vez (com probabilidade $18/19$) e a segunda bola retirada foi a de João (com probabilidade $1/18$).

QUESTÃO 17 ALTERNATIVA D

Podemos reescrever a expressão somando e subtraindo 40 no denominador, como abaixo:

$$\frac{5n - 12}{n - 8} = \frac{5n - 40 + 40 - 12}{n - 8} = \frac{5n - 40}{n - 8} + \frac{28}{n - 8} = \frac{5(n - 8)}{n - 8} + \frac{28}{n - 8} = 5 + \frac{28}{n - 8}$$

Logo, os números inteiros n tais que $(5n - 12) / (n - 8)$ é um número natural são aqueles tais que $28 / (n - 8)$ é um número inteiro igual ou maior do que -5 .

Para $28 / (n - 8)$ ser um número inteiro, $n - 8$ deve dividir 28 e segue que

$$(n - 8) = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14 \text{ ou } \pm 28$$

E, dentre esses números, para $28 / (n - 8)$ ser um número inteiro igual ou maior que -5 , segue que

$$(n - 8) = +1, +2, +4, \pm 7, \pm 14 \text{ ou } \pm 28$$

Logo, os possíveis inteiros n são

$$n = +9, +10, +12, +15, +1, +22, -6, +36 \text{ ou } -20$$

Desses, sete são números naturais.

QUESTÃO 18 ALTERNATIVA D

Numerando os anéis como na figura e iniciando a contagem pelas possibilidades de pintura do anel I, dividimos o problema em 3 casos.

1) O anel III deve ser pintado com a mesma cor que o anel II, o que garante que os anéis III e IV tenham cores diferentes. Então, pelo princípio multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	2	1	2	→24

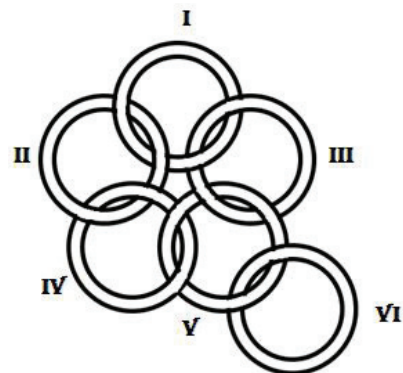
2) O anel III deve ser pintado com cor diferente do anel II e o anel IV com a mesma cor que o anel III. Então, pelo princípio multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	1	2	2	→24

3) O anel III deve ser pintado com cor diferente do anel II e o anel IV com cor diferente do anel III. Então, pelo princípio multiplicativo, temos as seguintes possibilidades de escolha das cores:

I	II	III	IV	V	VI	
3	2	1	1	1	2	→12

Logo, o número de maneiras possíveis de pintar o símbolo é $24 + 24 + 12 = 60$.



QUESTÃO 19 **ALTERNATIVA C**

Vamos primeiro contar quantos pacotes distintos é possível fazer com qualquer número de figurinhas, incluindo o pacote sem nenhuma figurinha. Para fazer um pacote, Bruno pode, por exemplo, escolher primeiramente quantas figurinhas da Alemanha, depois quantas do Brasil e finalmente quantas da Colômbia ele deseja colocar no pacote. Pelo princípio multiplicativo, isso pode ser feito de $6 \times 7 \times 5 = 210$ maneiras diferentes; observemos que o fator 6 nessa expressão corresponde ao fato de que Bruno tem 6 escolhas (a saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5) para o número de figurinhas da Alemanha; já o fator 7 é o número de escolhas para o número de figurinhas do Brasil e 5 é o número de escolhas para o número de figurinhas da Colômbia que ele pode colocar no pacote.

Por outro lado, o número de pacotes com menos que três figurinhas é 10, como vemos na tabela abaixo (na segunda coluna, usamos letras A, B e C para denotar Alemanha, Brasil e Colômbia, respectivamente):

Quantidade de figurinhas escolhidas para colocar no pacote	O que fica dentro do pacote	Quantidade de pacotes
0 figurinha	nada	1
1 figurinha	A ou B ou C	3
2 figurinhas	AA ou BB ou CC ou AB ou AC ou BC	6
Total		$1 + 3 + 6 = 10$

Segue, então, que o número de pacotes distintos com pelo menos três figurinhas é $210 - 10 = 200$.

Outra solução: Um pacote com pelo menos três figurinhas poderá conter figurinhas com as três bandeiras diferentes, ou figurinhas com somente duas das bandeiras ou ainda figurinhas com apenas uma das bandeiras. Vamos fazer a contagem do número de pacotes distintos que podem ser feitos em cada um desses casos, com atenção para que sempre os pacotes contenham, no mínimo, três figurinhas.

1. Pacotes de figurinhas com as três bandeiras diferentes

Bruno tem 5 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira da Alemanha que poderá colocar em um pacote: A, AA, AAA, AAAA, AAAAA. Da mesma forma, terá 6 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira do Brasil e 4 para figurinhas com a bandeira da Colômbia.

O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas com as três bandeiras diferentes será $5 \times 6 \times 4 = 120$.

2. Pacotes de figurinhas com todas as figurinhas com a mesma bandeira

O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas e todas as figurinhas no pacote com a mesma bandeira é $3 + 4 + 2 = 9$ (AAA, AAAA, AAAAA, BBB, BBBB, BBBB, BBBB, CCC e CCCC).

3. Pacotes de figurinhas com bandeiras de exatamente dois países

Se os países forem, por exemplo, Alemanha e Brasil, teremos $5 \times 6 - 1$ possibilidades, já que os pacotes devem conter pelo menos três figurinhas, e precisamos desconsiderar o pacote que tem apenas uma figurinha com a bandeira da Alemanha e uma do Brasil. A mesma contagem para as outras duplas (Alemanha-Colômbia e Brasil-Colômbia) nos dará, neste caso, o número de pacotes procurado:

$$(5 \times 6 - 1) + (5 \times 4 - 1) + (6 \times 4 - 1) = 29 + 19 + 23 = 71.$$

Somando os valores obtidos nas três contagens parciais, teremos $120 + 9 + 71 = 200$ pacotes distintos.

QUESTÃO 20 ALTERNATIVA B

Vamos representar o número de balas em cada saquinho pelas letras x , y , z , p , e q . Após somar as balas de quatro saquinhos escolhidos, temos cinco possibilidades para o total de balas, indicadas abaixo:

$$(*) \begin{cases} x + y + z + p = 23 \\ x + y + z + q = 24 \\ x + y + p + q = 26 \\ x + z + p + q = 29 \\ y + z + p + q = T \end{cases}$$

Com $T = 23$, ou $T = 24$, ou $T = 26$, ou $T = 29$. Consequentemente, somando os termos de $(*)$,

$$4 \cdot [x + (y + z + p + q)] = 4 \cdot [x + T] = 23 + 24 + 26 + 29 + T = 102 + T$$

Equivalentemente, $4x + 4T = 102 + T$, ou seja, $x = \frac{102 - 3T}{4}$. Como x é um número inteiro, observando os quatro

possíveis valores para T , concluímos que $T = 26$. Portanto, $x = 6$. De $(*)$, subtraindo cada uma das quatro primeiras identidades da última, obtemos os valores de y , z , p , e q :

$$\begin{cases} q - x = T - 23 \Leftrightarrow q - 6 = 3 \Leftrightarrow q = 9 \\ p - x = T - 24 \Leftrightarrow p - 6 = 2 \Leftrightarrow p = 8 \\ z - x = T - 26 \Leftrightarrow z - 6 = 0 \Leftrightarrow z = 6 \\ y - x = T - 29 \Leftrightarrow y - 6 = -3 \Leftrightarrow y = 3 \end{cases}$$

Logo, há um saquinho com 3 balas, dois saquinhos com 6 balas, um saquinho com 8 e outro com 9. Assim, o maior número de balas em um saquinho é 9.