

SOLUÇÕES OBMEP 2ª. FASE 2016

N1Q1 – Solução

item a)

Carolina escreveu os números 132 e 231. Esses são os únicos números que cumprem as exigências do enunciado e que possuem o algarismo 3 na posição central.

item b)

Para um número com 7 na casa central estar na lista de Carolina, há 6 possibilidades para a casa das centenas (qualquer um dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pode ser usado) e apenas 5 possibilidades para a casa das unidades, pois não podemos repetir algarismos.

Podemos pensar também em preencher primeiramente a casa das unidades (6 possibilidades) e, a seguir, preencher a casa das centenas (nesse caso, 5 possibilidades).

Logo, há $6 \times 5 = 5 \times 6 = 30$ números da lista de Carolina que têm 7 na casa central.

item c)

Observamos primeiramente que os algarismos 1 e 2 (e, claro, também o 0) não podem ser usados na casa das dezenas para que o número esteja na lista de Carolina. Assim, fazendo a contagem como nos itens b) e c), temos:

- se o algarismo do meio é 3, há $2 \times 1 = 2$ números na lista;
- se o algarismo do meio é 4, há $3 \times 2 = 6$ números na lista;
- se o algarismo do meio é 5, há $4 \times 3 = 12$ números na lista;
- se o algarismo do meio é 6, há $5 \times 4 = 20$ números na lista;
- se o algarismo do meio é 7, há $6 \times 5 = 30$ números na lista;
- se o algarismo do meio é 8, há $7 \times 6 = 42$ números na lista;
- se o algarismo do meio é 9, há $8 \times 7 = 56$ números na lista.

Logo, a lista de Carolina tem exatamente $2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 = 168$ números.

N1Q2 – Solução

item a)

A figura em questão é formada pela junção de duas peças. Ela é formada por oito quadradinhos de 1 cm de lado, e seu contorno contém exatamente 16 lados desses quadradinhos. Logo, o perímetro dessa peça é 16 vezes 1 cm, ou seja, é igual a 16 cm.

item b)

Há muitas soluções, as quais podem diferir no formato ou na posição. Aqui estão dois exemplos:

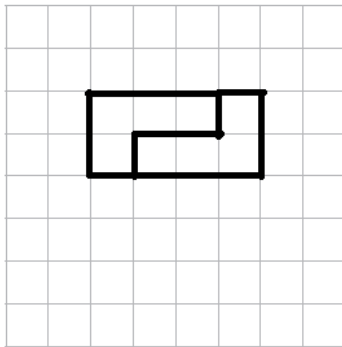


Figura com perímetro igual a 12 cm

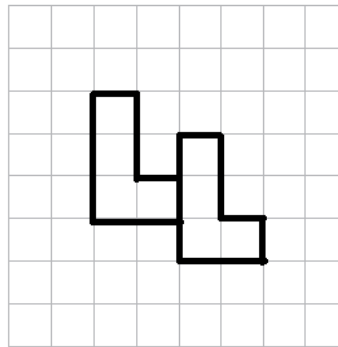
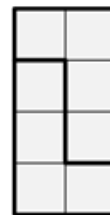
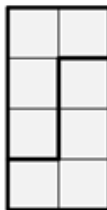
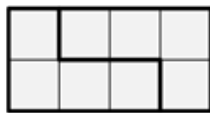
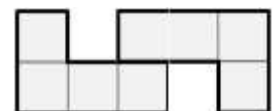
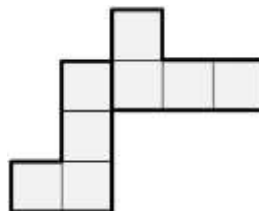
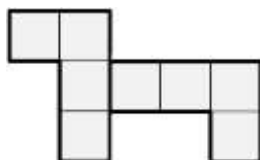
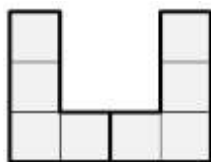


Figura com perímetro igual a 18 cm

Para formar uma figura com perímetro igual a 12 cm, Roberto deve juntar as duas peças de tal modo que o contorno da figura formada tenha somente 12 lados de quadradinhos. Como cada peça contém 10 lados de quadradinhos em seu contorno e como ele junta as peças coincidindo lados de quadradinhos, Roberto terá de fazer coincidir quatro pares de lados de quadradinhos para formar uma figura com perímetro igual a 12 cm. Isso apenas é possível se ele juntar as peças formando um retângulo. Veja algumas outras possibilidades:



Agora, para formar uma figura com perímetro igual a 18 cm, Roberto tem de juntar as duas peças de tal modo que o contorno da figura formada tenha 18 lados de quadradinhos, ou seja, ele terá de fazer coincidir apenas um par de lados de quadradinhos. Como foi dito, existem várias maneiras de formar essas figuras; veja mais alguns exemplos:



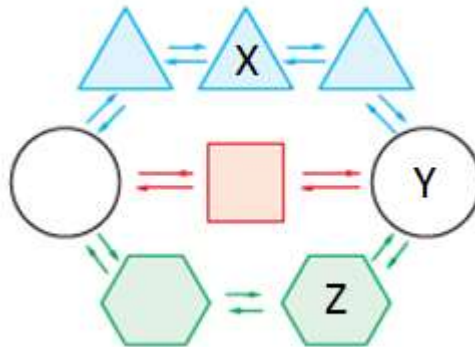
item c)

Quando as duas peças não estão em contato, o perímetro total é 20 cm. Depois de juntar duas peças, o perímetro da figura formada pelas duas peças é diminuído de um número par, já que os lados em contato de quadradinhos não contribuem para o perímetro da figura formada, pois ficam internos a ela. Como duas peças soltas têm perímetro 20 cm, é impossível obter, juntando duas peças de acordo com as condições descritas no enunciado, uma figura com um perímetro ímpar. Mas 15 é ímpar e, assim, não há figuras (como as descritas no enunciado) que têm esse perímetro.

N1Q3 – Solução

item a)

Basta acompanhar o movimento realizado pelas crianças até completarem 10 pulos. O resultado final é:



item b)

Xavier estará na casa A de 8 em 8 pulos, Yara estará em A de 4 em 4 pulos e Zezé estará em A de 6 em 6 pulos. Como o mínimo múltiplo comum de 4, 6 e 8 é 24, após 24 pulos os três estarão em A pela primeira vez após o início da brincadeira.

item c)

Vamos analisar os possíveis encontros em B.

Xavier estará em B após 4 pulos, em seguida, após o 12.^o pulo, depois após o 20.^o pulo e assim por diante, isto é, de 8 em 8 pulos após os primeiros 4 pulos. Ou seja, Xavier estará na casa B imediatamente após (4 + múltiplos de 8) pulos.

Yara estará em B após realizar os pulos 2, 6, 10, etc., isto é, de 4 em 4 pulos após os dois primeiros. Assim, Yara estará na casa B imediatamente após (2 + múltiplos de 4) pulos.

Zezé estará em B imediatamente após os pulos 3, 9, 15, ..., isto é, de 6 em 6 pulos após os 3 primeiros pulos, ou seja, após (3 + múltiplos de 6) pulos.

Assim, eles nunca se encontrarão em B, pois Xavier e Yara estarão na casa B após um número par de pulos, enquanto Zezé estará em B após um número ímpar de pulos.

Na verdade a argumentação acima mostra que Xavier e Yara, Xavier e Zezé ou Yara e Zezé nunca se encontrarão na casa B, quanto mais os três.

N1Q4 – Solução

item a)

A parte em preto é formada por quatro triângulos pretos menores, os quais são retângulos isósceles. Um desses triângulos aparece na figura abaixo:

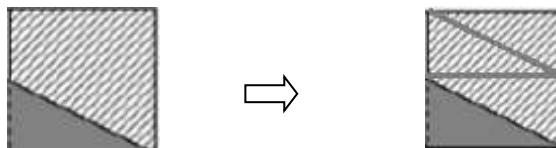


A área de cada um dos triângulos pretos é a metade da área do quadrado do quadriculado, ou seja, é igual à metade de $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$, ou seja, é igual a 2 cm^2 .

Portanto, a área da parte em preto é igual a $4 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$.

item b)

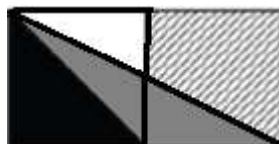
A parte listrada de um quadradinho do quadriculado é um trapézio. Assim, a parte listrada de um quadradinho tem área igual a $\frac{3}{4}$ da área do mesmo. De fato, se considerarmos, por exemplo, a divisão na figura ilustrada abaixo



vemos que a área de cada trapézio é $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3 \text{ cm}^2$ e, portanto, a área total da parte listrada é igual a $4 \times 3 = 12 \text{ cm}^2$.

item c)

Para calcular a área de um pequeno triângulo cinza, podemos destacar da figura o retângulo abaixo, formado por dois quadradinhos do quadriculado.



A área desse retângulo é 8 cm^2 . A diagonal o divide em dois triângulos retângulos de mesma área e um deles é formado por um triângulo preto e um triângulo cinza. A área do triângulo cinza será, portanto, igual à diferença entre a metade da área do retângulo e a área do triângulo preto, isto é, $4 - 2 = 2 \text{ cm}^2$.

A área total da parte em cinza é $4 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$.

Outra forma de chegar a esse resultado é observar que a metade do quadrado do reticulado (o triângulo preto) é equivalente ao triângulo cinza, ou seja, eles têm a mesma área, pois têm mesmas medidas de base e de altura.

N1Q5 – Solução

item a)

Podemos ir simplesmente completando o tabuleiro até a coluna 9, como mostrado na figura abaixo.

Mas, observando melhor, as casas amarelas estão distribuídas de modo que, a cada 4 colunas, a disposição dessas casas se repete. Portanto, a distribuição das casas amarelas na coluna 9 é a mesma da coluna 1, uma vez que $9 = 4 + 4 + 1$. Além disso, observamos que os números escritos em linhas ímpares, a partir da coluna 4, são obtidos somando-se 7 aos respectivos números escritos na mesma linha e na quarta coluna anterior. Consequentemente, o maior número que Joana escreveu na coluna 9 é igual a $2 + 7 + 7 = 16$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1				8				15
	3		6		10		13	
		5				12		
	4		7		11		14	
2				9				16

item b)

Concentremos nossa atenção na terceira linha. Na terceira coluna aparece o número 5 e, a partir desta, a cada 4 colunas o número existente é obtido do anterior somando-se 7, como já observado no item anterior. Por exemplo, na coluna $7 = 3 + 4$, temos o número $12 = 5 + 7$; na coluna $11 = 3 + 4 \times 2$, temos o número $19 = 5 + 7 \times 2$. Para descobrir o padrão, vamos organizar as informações acima em uma tabela:

Número da coluna	Número que aparece na coluna
$3 = 0 \times 4 + 3$	$5 = 0 \times 7 + 5$
$7 = 1 \times 4 + 3$	$12 = 1 \times 7 + 5$
$11 = 2 \times 4 + 3$	$19 = 2 \times 7 + 5$
$15 = 3 \times 4 + 3$	$26 = 3 \times 7 + 5$
...	...
$2015 = 503 \times 4 + 3$	$3526 = 503 \times 7 + 5$

logo, na coluna 2016 temos os números 3527 e 3528. Assim, o maior número escrito por Joana foi 3528.

Uma maneira algébrica de explicitar o padrão acima é a seguinte:

Na terceira linha e na coluna $3 + 4 \times n$ aparece o número $5 + 7 \times n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Assim, na coluna $2015 = 3 + 2012 = 3 + 4 \times 503$, aparece o número $5 + 7 \times 503 = 3526$. Consequentemente, na coluna 2016 temos os números 3527 e 3528 e o maior número escrito por Joana nessa coluna foi 3528.

Uma segunda solução:

Observamos que na coluna 4 temos: na linha 2, o número 6 e, na linha 4, o número 7. A cada 4 colunas, a partir desta, os números das respectivas linhas, são esses somados de um mesmo múltiplo de 7. Por exemplo, na coluna 8, temos os números $13 = 6 + 7 \times 1$ e $14 = 7 + 7 \times 1$; na coluna 12, temos $20 = 6 + 7 \times 2$ e $21 = 7 + 7 \times 2$, e assim sucessivamente. Como $2016 = 504 \times 4$,

nessa coluna estarão os números $6 + 7 \times 503 = 3527$ e $7 + 7 \times 503 = 3528$. Logo, o maior número escrito por Joana foi 3528.

Uma terceira solução:

Observemos que nas primeiras 4 colunas são escritos todos os números de 1 a 7 e as demais colunas são cópias destas, acrescentando 7 unidades, respectivamente, a cada número. Como o quadriculado completo tem $2016 = 504 \times 4$ colunas, concluímos que Joana repetiu esse procedimento 504 vezes. Consequentemente, o maior número que ela escreveu foi $504 \times 7 = 3528$.

item c)

Olhando apenas para a linha 5, temos que, a partir do número 2 disposto na primeira coluna, a cada 4 colunas, o número seguinte é o anterior somado de 7 unidades. Ou seja, na coluna $5 = 1 + 4$ temos o número $9 = 2 + 7$; na coluna $9 = 1 + 4 \times 2$, temos o número $16 = 2 + 7 \times 2$, e assim concluímos indutivamente que na coluna $1 + 4 \times n$ aparece o número $2 + 7 \times n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Como $597 = 2 + 7 \times 85$, ele aparece na quinta linha e na coluna $1 + 4 \times 85 = 341$.

Uma segunda solução:

Vamos fixar nossa atenção na terceira linha, como fizemos na primeira solução do item b). Observemos que $597 = 5 + 592 = 5 + (7 \times 84 + 4)$. Como $593 = 5 + 7 \times 84$, o número 593 está na linha 3 e coluna $339 = 3 + 4 \times 84$. Assim, na coluna 340 estão os números 594 e 595 e, na coluna 341, os números 596 e 597.

item d)

Devido ao método de preenchimento descrito no enunciado, notamos que 713 deve ser a soma de dois números consecutivos. Há várias maneiras de descobrir quem são essas parcelas; uma delas é a seguinte; os números consecutivos são próximos e, portanto, devem estar perto da metade de 713, mas, sendo este um número ímpar, calculamos a metade de 712 que está perto de 713 e é par. Como $712 \div 2 = 356$, é agora fácil ver que $713 = 356 + 357$. Outra maneira, mais algébrica, é escrever que $713 = x + (x+1)$, x a determinar. Assim sendo, $2x + 1 = 713$, ou seja, $x = 356$.

Em suma, $713 = 356 + 357$ e essa decomposição é única como soma de dois números naturais consecutivos. Portanto, a soma 713 ocorre apenas na coluna em que estão os números 356 e 357.

Para localizar a coluna em que estão esses números, há muitas maneiras de seguir o padrão em uma determinada linha. Um bom método é procurar números próximos que estejam sozinhos em colunas e isso só ocorre na terceira linha, para a qual dirigimos novamente nossa atenção. Observamos que $355 = 5 + 350 = 5 + 7 \times 50$. Logo, 355 está na terceira linha e na coluna $3 + 4 \times 50 = 203$. Consequentemente, 356 e 357 estão na coluna 204.

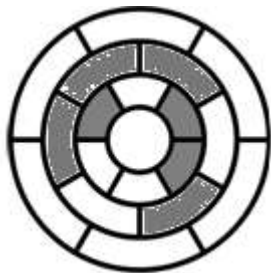
Observação: o número 713 não pode aparecer sozinho em uma coluna, pois os números que aparecem sozinhos em colunas são os que deixam resto 5 quando divididos por 7.

N1Q6 – Solução

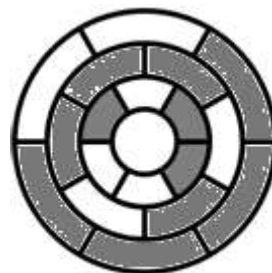
item a)



Pintura do primeiro anel feita por Joãozinho, fornecida pelo enunciado.



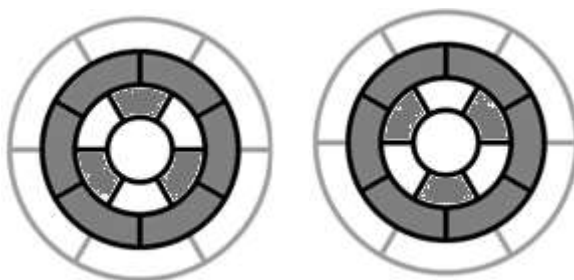
Pintura do segundo anel.



Resultado final da pintura dos três primeiros anéis.

item b)

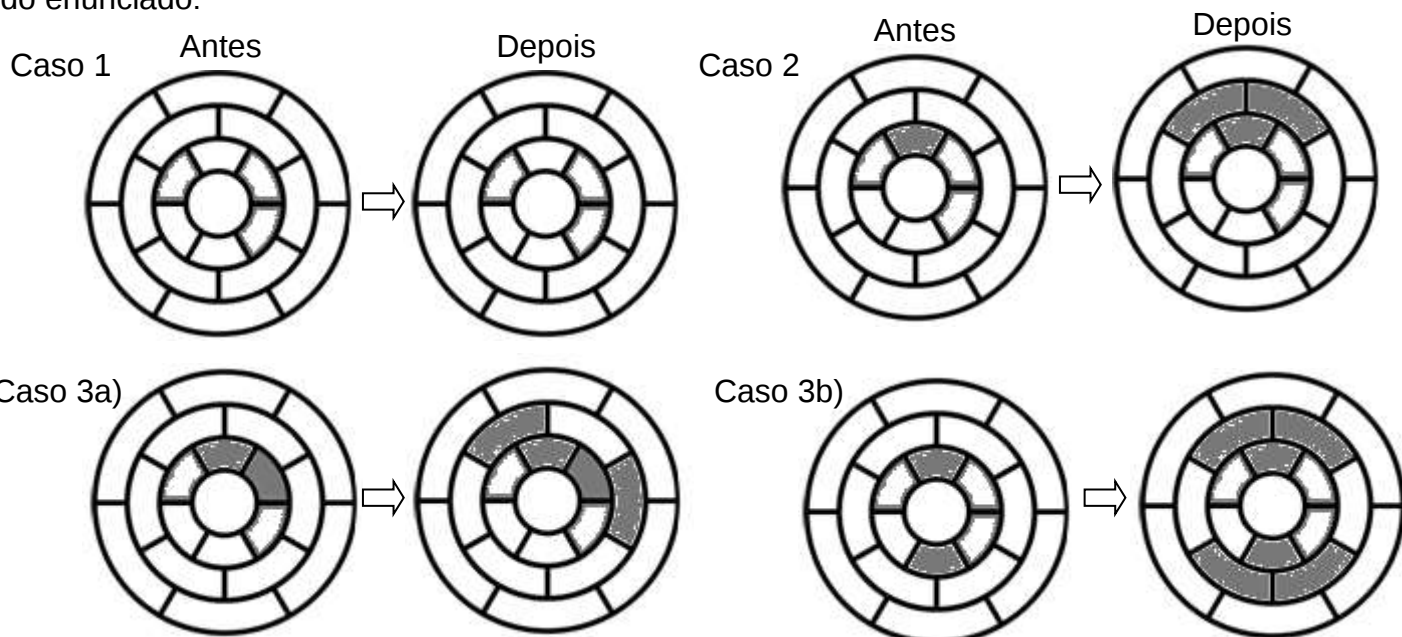
Há duas soluções possíveis para que o segundo anel fique todo cinza; em ambas, as cores do primeiro anel devem se alternar.



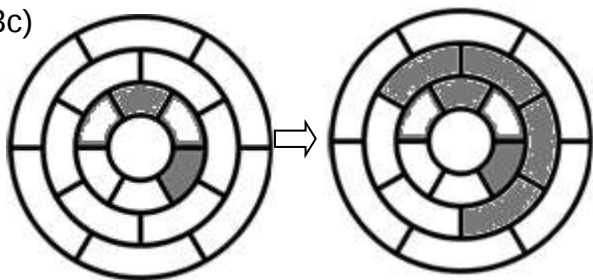
item c)

Solução 1:

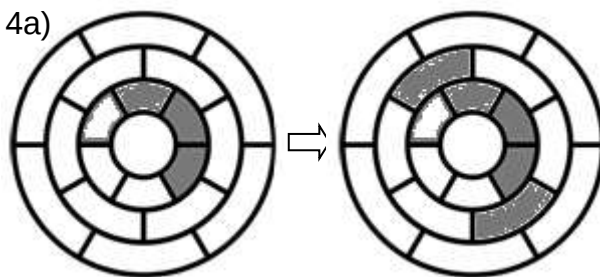
Há $2^6 = 64$ possibilidades de Joãozinho pintar o primeiro anel. Entretanto, devido à simetria, podemos considerar, sem perda de generalidade, somente os 13 casos ilustrados a seguir. Observe o que acontece em cada caso quando pintamos o segundo anel de acordo com as regras do enunciado:



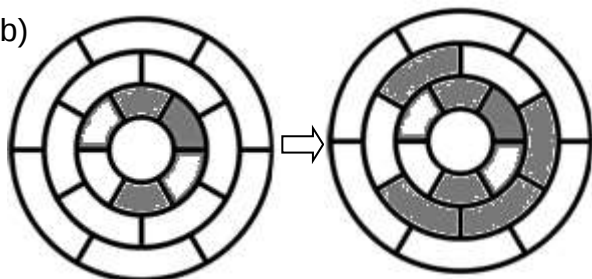
Caso 3c)



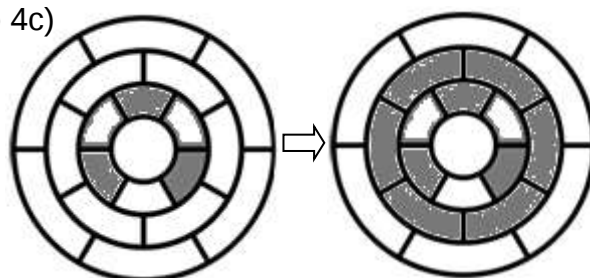
Caso 4a)



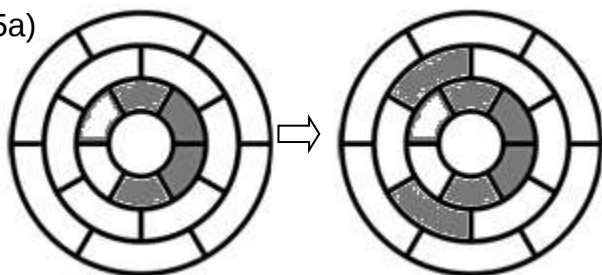
Caso 4b)



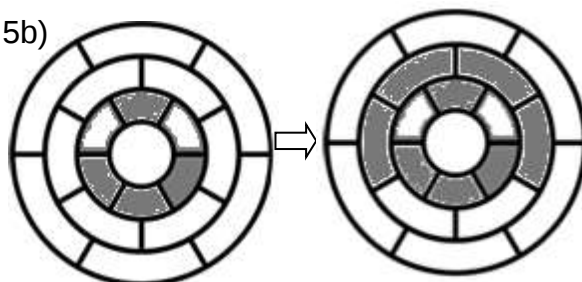
Caso 4c)



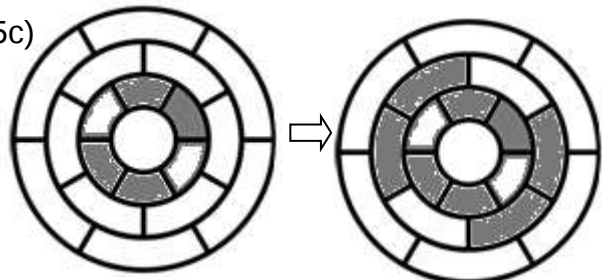
Caso 5a)



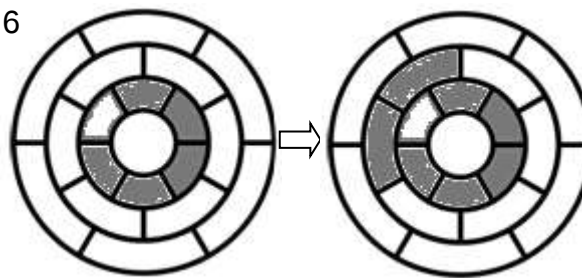
Caso 5b)



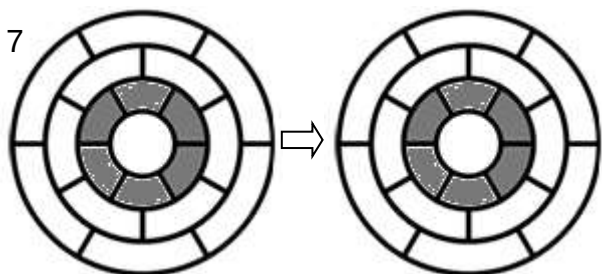
Caso 5c)



Caso 6



Caso 7



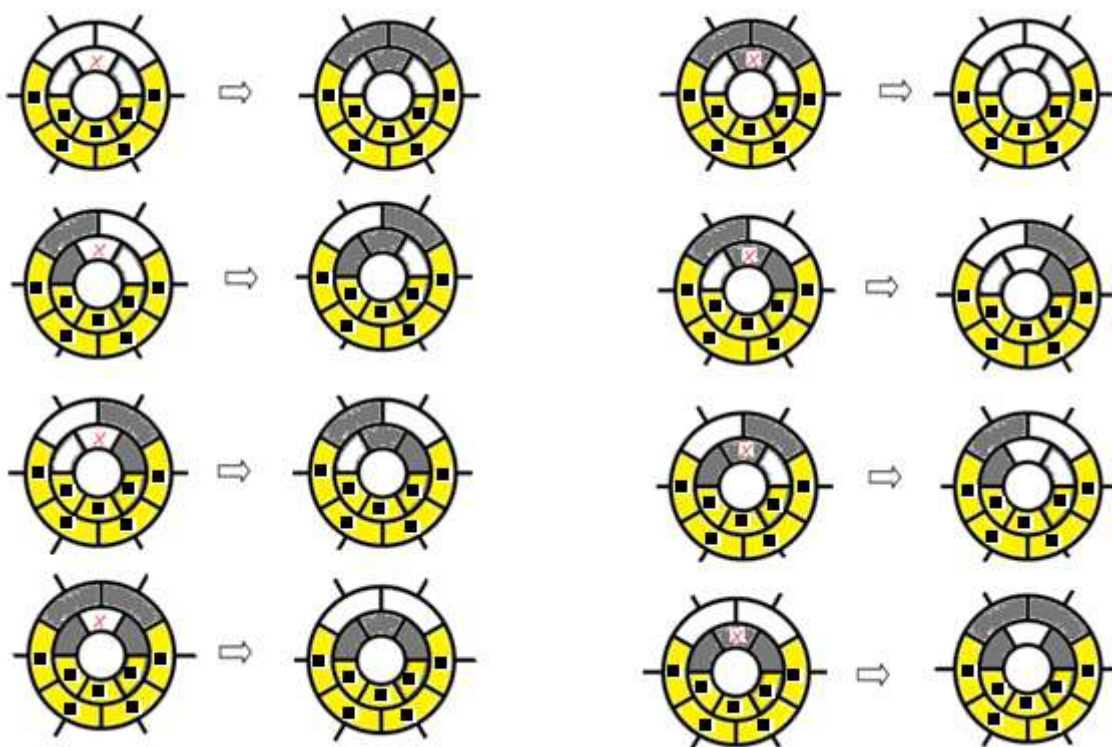
Em cada um desses casos, o segundo anel tem sempre uma quantidade par de partes pintadas de cinza. Para passar do segundo anel para o terceiro, o procedimento é análogo, exceto que os casos análogos a 2, 4a), 4b), 4c) e 6) não mais ocorrerão, pois não há no segundo anel uma quantidade ímpar de partes pintadas de cinza, e exatamente o mesmo que ocorreu da transição do primeiro para o segundo anéis ocorrerá também do segundo para o terceiro. Esse processo continua indefinidamente. Assim, a quantidade de partes pintadas de cinza de um anel, do segundo em diante, será sempre par.

Solução 2: Com exceção do primeiro, as cores das partes de um anel são determinadas de modo único pelas cores das partes do anel anterior. Se, em uma configuração inicial de cores do primeiro anel, modificarmos a cor de uma única de suas partes, trocando branco por cinza ou cinza por branco, essa modificação provocará a mudança de cor em exatamente duas partes do próximo anel, a saber, as duas casas do anel exterior que estão em contato com a casa que foi modificada. As outras quatro casas continuarão com as cores que já tinham.

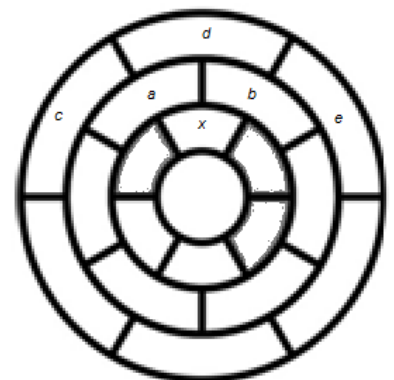
Conclusão: modificar a cor de uma parte de um anel provoca a modificação das cores de exatamente duas partes do anel seguinte e, mais ainda, as cores dessas partes são trocadas (branco vira cinza e vice-versa).

Joãozinho inicia a pintura das partes do primeiro anel a partir do anel totalmente branco (nenhuma parte cinza, lembre-se de que 0 é par); a cada casa que ele escolhe pintar são automaticamente modificadas duas casas (vizinhas) do próximo anel, logo, independentemente de como ele pintar o primeiro anel, o segundo anel sempre terá uma quantidade par de partes pintadas de cinza. Isso porque, a cada casa pintada do primeiro anel, a quantidade de partes cinza do segundo anel continua a mesma, ou é diminuída de 2 ou acrescida de 2.

A título de ilustração, observe o que ocorre quando modificamos somente a cor da casa marcada com **X**. As casas marcadas com um quadradinho (e na cor amarela) podem ter a cor branca ou cinza, elas não são modificadas com a mudança de cor da casa marcada com **X**.



Um processo análogo se repete do segundo para o terceiro anel. Vejamos o motivo: como vimos, uma modificação de cor em uma casa do primeiro anel provoca alterações de cores em duas casas vizinhas do segundo anel, as quais chamaremos de casas *a* e *b*. A modificação de cor da casa *a*, seguida da modificação de cor da casa *b*, tem o mesmo efeito, nas casas do terceiro anel, que primeiro modificar a cor de *b*, depois a de *a*. Podemos então concluir que, no mesmo anel, uma casa após a outra é modificada, sem nos preocuparmos com a mudança simultânea de cores em várias casas, qual casa foi modificada em primeiro lugar ou a ordem em que as modificações aconteceram.



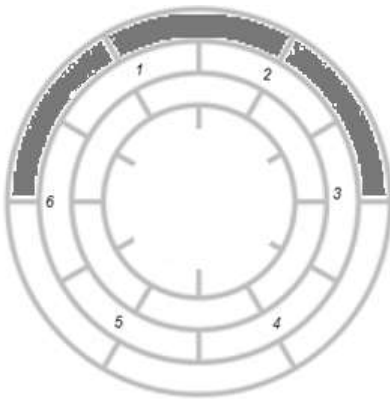
Para ilustrar, veja a figura acima; ao modificarmos a cor da casa x , modificamos as cores das casas a e b , as quais, por sua vez, provocam modificações de cores nas casas c , d e e . Ao mudarmos a cor da casa x , a casa c ficará com cor oposta à que tinha, a casa d ficará com a mesma cor que tinha e a casa e terá sua cor trocada. Disso segue que, se a quantidade de casas pintadas de cinza for par antes da modificação da cor na casa x , então ela continuará sendo par depois da modificação. Como vimos acima, no segundo anel teremos sempre uma quantidade par de casas pintadas de cinza e, daí para a frente, como a paridade é conservada, todos os demais anéis deverão ter uma quantidade par de casas coloridas de cinza.

Solução 3: Suponhamos, primeiramente, que haja somente uma parte pintada de cinza em um anel e que esse anel não seja o primeiro. Vejamos o que pode acontecer com o anel imediatamente anterior, que está em contato com ele. Para ilustrar, observe a figura abaixo, em que as partes do anel anterior são numeradas de 1 a 6.

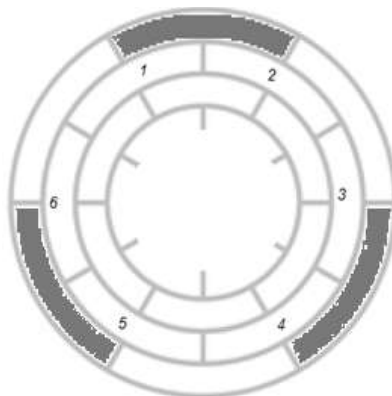
Se a casa com o número 1 fosse branca, a de número 2 seria cinza, bem como as casas numeradas com 2, 3, 4, 5 e 6, pois as partes do anel externo em contato com essas últimas são todas brancas. Assim, as casas 1 e 6 teriam cores diferentes e, portanto, a parte do anel externo em contato com essas duas casas deveria ser cinza, mas não é (isto é uma contradição). De modo análogo, chegaremos a uma situação contraditória se a casa com o número 1 fosse da cor cinza.



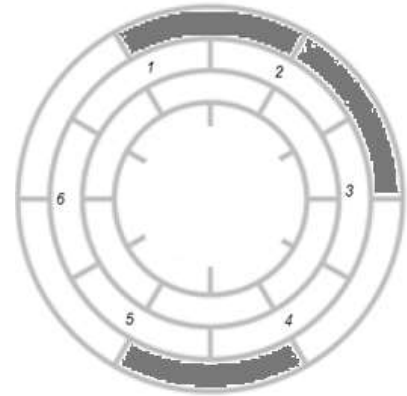
Vamos considerar agora o caso em que exatamente três casas são da cor cinza. Devido à simetria, há apenas três casos a considerar. Eles estão ilustrados nas figuras a seguir:



Três casas cinzas
juntas



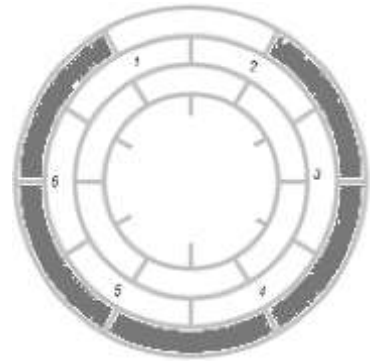
Três casas cinzas separadas
entre si



Duas casas cinzas juntas e uma
separada

Essas configurações também geram contradições quando analisarmos as cores das partes do anel interior que estão em contato com o que já está pintado. Como os casos são completamente análogos, analisaremos somente a terceira configuração. Neste caso, se a cor da parte 1 fosse branca, então a parte 2 deveria ser cinza, a parte 3 branca, a parte 4 branca, a parte 5 cinza e a parte 6 também cinza. Logo, as partes numeradas com 1 e 6 teriam cores opostas, o que entra em conflito com a cor da parte branca do anel exterior que faz fronteira com elas. Analogamente, se iniciarmos admitindo que a parte 1 fosse cinza, também chegaríamos a uma contradição.

Finalmente, vejamos o que ocorre quando 5 partes estão pintadas de cinza, como ilustra a figura ao lado. A análise é similar às anteriores: se a parte 1 fosse branca, 2 deveria ser branca, a casa 3, cinza, a casa 4 deveria ser branca, a casa 5 cinza e, a casa 6, branca. Nesse caso, as casas 1 e 6 teriam a mesma cor, mas isso é impossível, pois a parte do anel exterior em contato com elas é cinza, denunciando que elas deveriam ter cores diferentes. Contradição análoga aparece se iniciarmos supondo que a casa 1 é cinza.



Esses casos esgotam todas as possibilidades e mostram que nenhum anel, a partir do segundo, terá uma quantidade ímpar de partes pintadas de cinza.

item d)

Se um anel, a partir do terceiro, fosse pintado todo de cinza, o anel imediatamente anterior teria cores alternadas (três partes pintadas de cinza e três partes brancas, como ocorreu no item b)). Como 3 é ímpar, isto é impossível, devido ao item c). Logo, a partir do terceiro, nenhum anel será pintado todo de cinza.