

SOLUÇÕES OBMEP 2ª. FASE 2016 NÍVEL 3

N3Q1 – Solução

item a)

Para facilitar, colocamos letras nas casas vazias:

3	a	19
8	c	d
b	e	f

O número a deve ser a média dos números 3 e 19:

$$a = \frac{3+19}{2} = 11$$

O número 8 deve ser a média entre 3 e b, ou seja,

$$8 = \frac{3+b}{2}$$

Logo, $b = 13$.

O número c deve ser a média entre 19 e 13: $c = \frac{19+13}{2} = 16$

Analogamente,

$$\begin{cases} \frac{d+8}{2} = 16 \Rightarrow d + 8 = 32 \Rightarrow d = 24 \\ \frac{e+11}{2} = 16 \Rightarrow e + 11 = 32 \Rightarrow e = 21 \\ \frac{f+3}{2} = 16 \Rightarrow f + 3 = 32 \Rightarrow f = 29 \end{cases}$$

Portanto, o preenchimento final do quadriculado medimágico é:

3	11	19
8	16	24
13	21	29

item b)

Primeiramente, colocamos letras nas casas vazias, de acordo com a figura abaixo:

Calculando as médias, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{y+20}{2} = x \Rightarrow y + 20 = 2x \Rightarrow y = 2x - 20 \\ \frac{z+7}{2} = x \Rightarrow z + 7 = 2x \Rightarrow z = 2x - 7 \\ \frac{w+9}{2} = x \Rightarrow w + 9 = 2x \Rightarrow w = 2x - 9 \end{cases}$$

y	7	v
9	x	w
t	z	20

Isso nos permite também calcular v e t em função de x:

$$\begin{cases} \frac{v+20}{2} = 2x - 9 \Rightarrow v + 20 = 4x - 18 \Rightarrow v = 4x - 38 \\ \frac{t+2x-20}{2} = 9 \Rightarrow t + 2x - 20 = 18 \Rightarrow t = 38 - 2x \end{cases}$$

$2x-20$	7	$4x-38$
9	x	$2x-9$
$38-2x$	$2x-7$	20

Segue, da terceira linha do quadriculado acima, que:

$$\frac{38 - 2x + 20}{2} = 2x - 7 \Rightarrow 58 - 2x = 4x - 14 \Rightarrow 72 = 6x \Rightarrow x = 12$$

Utilizando esse valor encontrado de x , os outros valores podem ser facilmente calculados e o preenchimento final do quadriculado medimágico, nesse caso, é:

4	7	10
9	12	15
14	17	20

item c)

Consideremos agora um quadrado medimágico qualquer, como o da figura abaixo

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$\Rightarrow \begin{cases} a + i = 2e \\ b + h = 2e \\ c + g = 2e \\ d + f = 2e \end{cases}$$

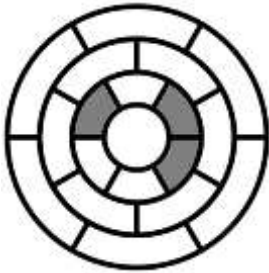
$$\Rightarrow a + b + c + d + e + f + g + h + i = 2e + 2e + 2e + 2e + e = 9e$$

Como o número representado pela letra e é um número inteiro, a soma de todos é múltipla de 9.

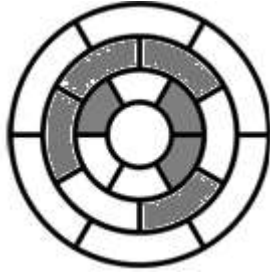
Conclusão: em qualquer quadriculado medimágico a soma de todos os seus números é igual a 9 vezes o termo central.

N3Q2 – Solução

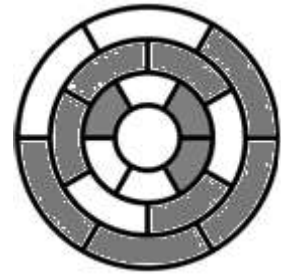
item a)



Pintura do primeiro anel
feita por Joãozinho,
fornecida pelo enunciado.



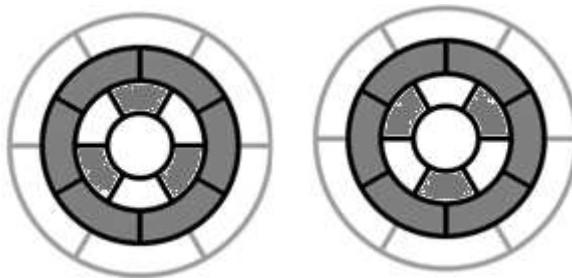
Pintura do segundo anel.



Resultado final da pintura
dos três primeiros anéis.

item b)

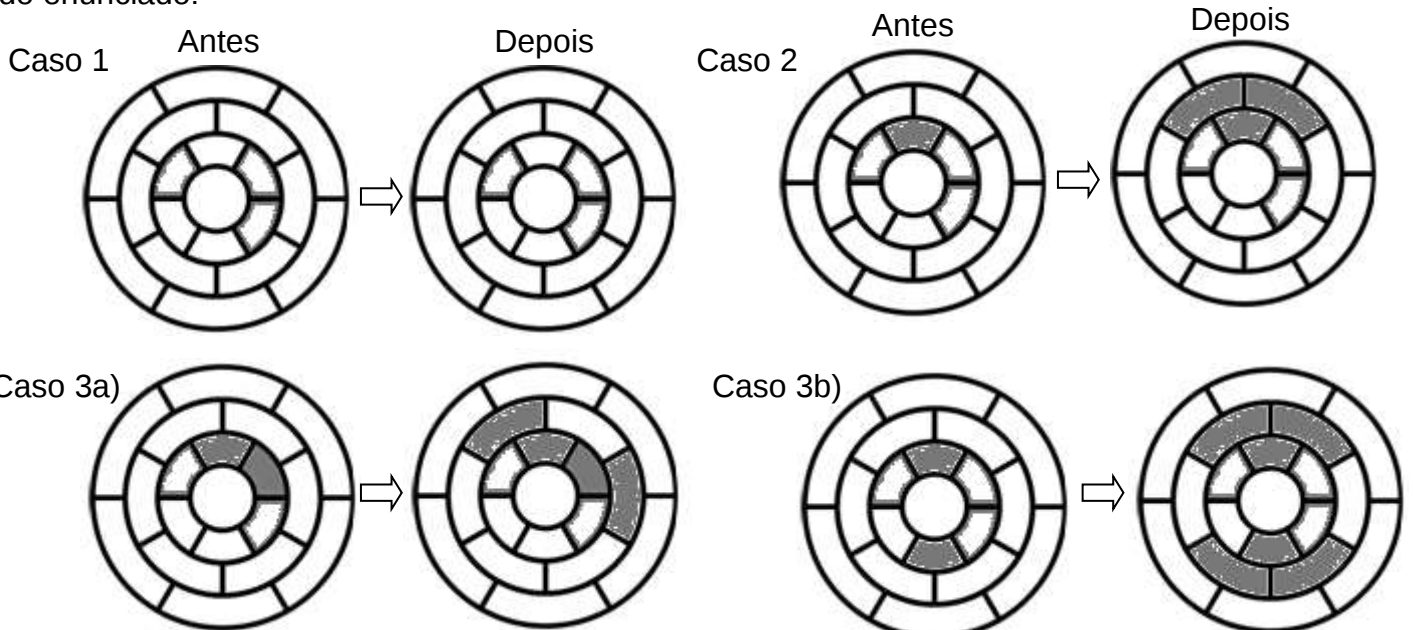
Há duas soluções possíveis para que o segundo anel fique todo cinza; em ambas, as cores do primeiro anel devem se alternar.



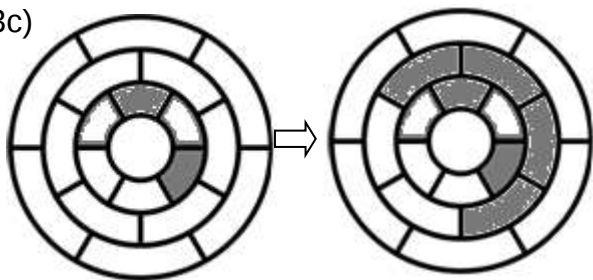
item c)

Solução 1:

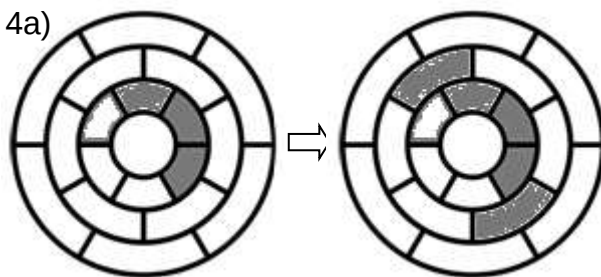
Há $2^6 = 64$ possibilidades de Joãozinho pintar o primeiro anel. Entretanto, devido à simetria, podemos considerar, sem perda de generalidade, somente os 13 casos ilustrados a seguir. Observe o que acontece em cada caso quando pintamos o segundo anel de acordo com as regras do enunciado:



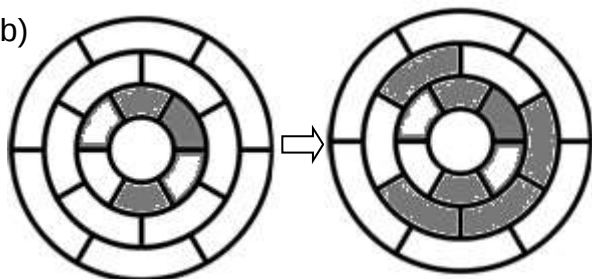
Caso 3c)



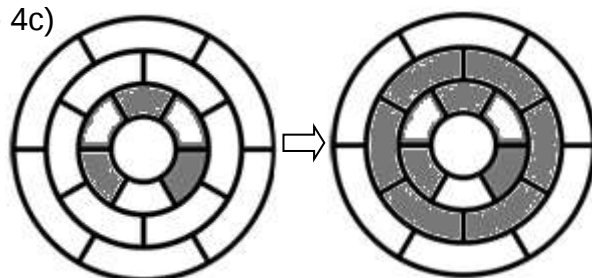
Caso 4a)



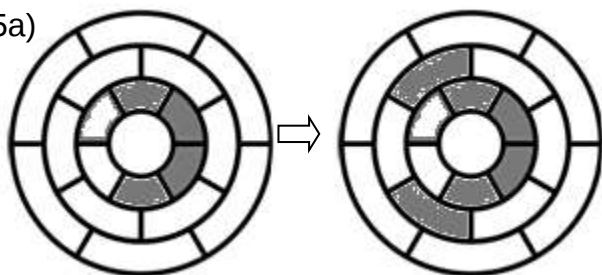
Caso 4b)



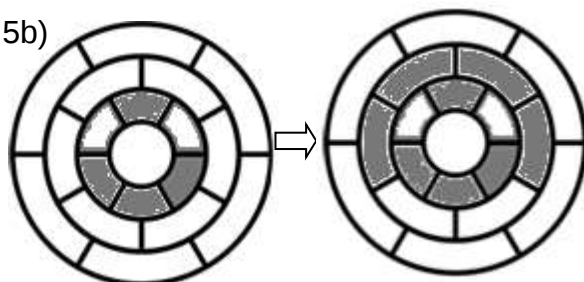
Caso 4c)



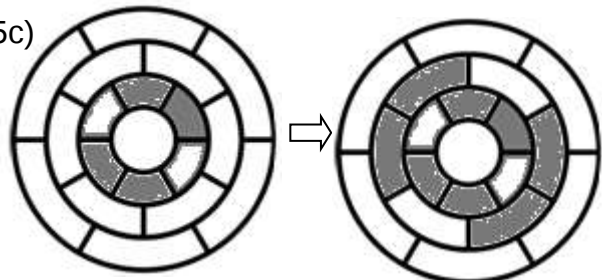
Caso 5a)



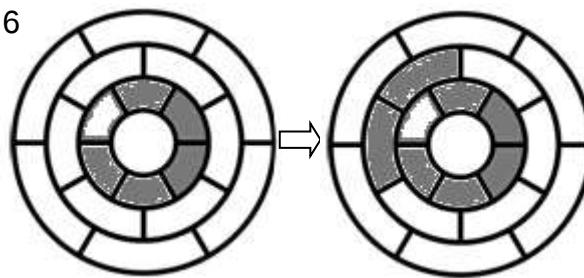
Caso 5b)



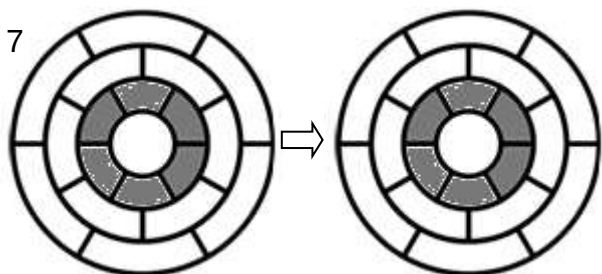
Caso 5c)



Caso 6



Caso 7



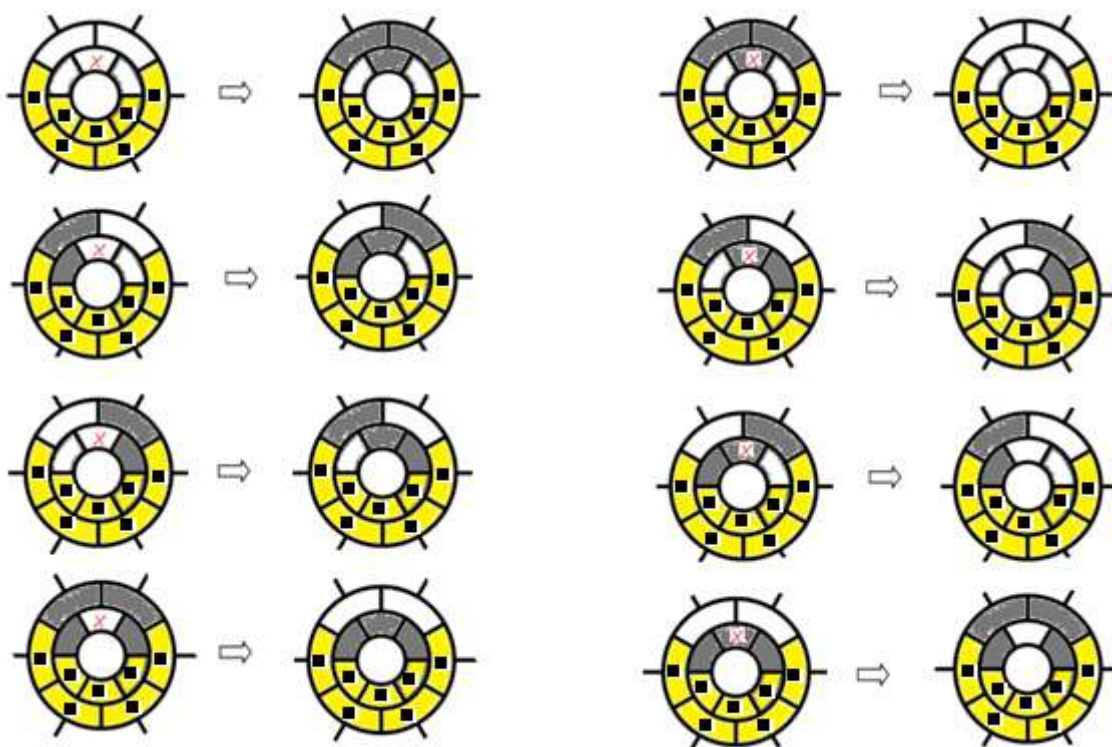
Em cada um desses casos, o segundo anel tem sempre uma quantidade par de partes pintadas de cinza. Para passar do segundo anel para o terceiro, o procedimento é análogo, exceto que os casos análogos a 2, 4a), 4b), 4c) e 6) não mais ocorrerão, pois não há no segundo anel uma quantidade ímpar de partes pintadas de cinza, e exatamente o mesmo que ocorreu da transição do primeiro para o segundo anéis ocorrerá também do segundo para o terceiro. Esse processo continua indefinidamente. Assim, a quantidade de partes pintadas de cinza de um anel, do segundo em diante, será sempre par.

Solução 2: Com exceção do primeiro, as cores das partes de um anel são determinadas de modo único pelas cores das partes do anel anterior. Se, em uma configuração inicial de cores do primeiro anel, modificarmos a cor de uma única de suas partes, trocando branco por cinza ou cinza por branco, essa modificação provocará a mudança de cor em exatamente duas partes do próximo anel, a saber, as duas casas do anel exterior que estão em contato com a casa que foi modificada. As outras quatro casas continuarão com as cores que já tinham.

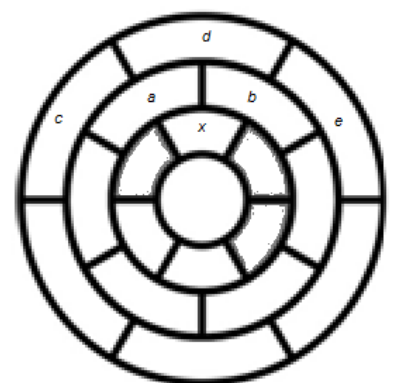
Conclusão: modificar a cor de uma parte de um anel provoca a modificação das cores de exatamente duas partes do anel seguinte e, mais ainda, as cores dessas partes são trocadas (branco vira cinza e vice-versa).

Joãozinho inicia a pintura das partes do primeiro anel a partir do anel totalmente branco (nenhuma parte cinza, lembre-se de que 0 é par); a cada casa que ele escolhe pintar são automaticamente modificadas duas casas (vizinhas) do próximo anel, logo, independentemente de como ele pintar o primeiro anel, o segundo anel sempre terá uma quantidade par de partes pintadas de cinza. Isso porque, a cada casa pintada do primeiro anel, a quantidade de partes cinza do segundo anel continua a mesma, ou é diminuída de 2 ou acrescida de 2.

A título de ilustração, observe o que ocorre quando modificamos somente a cor da casa marcada com **X**. As casas marcadas com um quadradinho (e na cor amarela) podem ter a cor branca ou cinza, elas não são modificadas com a mudança de cor da casa marcada com **X**.



Um processo análogo se repete do segundo para o terceiro anel. Vejamos o motivo: como vimos, uma modificação de cor em uma casa do primeiro anel provoca alterações de cores em duas casas vizinhas do segundo anel, as quais chamaremos de casas *a* e *b*. A modificação de cor da casa *a*, seguida da modificação de cor da casa *b*, tem o mesmo efeito, nas casas do terceiro anel, que primeiro modificar a cor de *b*, depois a de *a*. Podemos então concluir que, no mesmo anel, uma casa após a outra é modificada, sem nos preocuparmos com a mudança simultânea de cores em várias casas, qual casa foi modificada em primeiro lugar ou a ordem em que as modificações aconteceram.



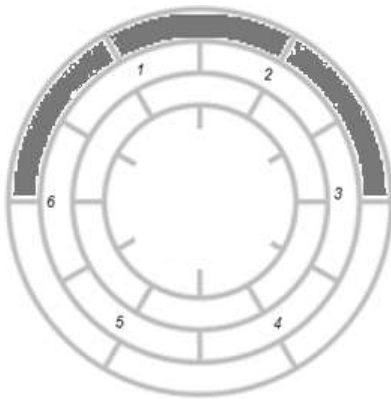
Para ilustrar, veja a figura acima; ao modificarmos a cor da casa x , modificamos as cores das casas a e b , as quais, por sua vez, provocam modificações de cores nas casas c , d e e . Ao mudarmos a cor da casa x , a casa c ficará com cor oposta à que tinha, a casa d ficará com a mesma cor que tinha e a casa e terá sua cor trocada. Disso segue que, se a quantidade de casas pintadas de cinza for par antes da modificação da cor na casa x , então ela continuará sendo par depois da modificação. Como vimos acima, no segundo anel teremos sempre uma quantidade par de casas pintadas de cinza e, daí para a frente, como a paridade é conservada, todos os demais anéis deverão ter uma quantidade par de casas coloridas de cinza.

Solução 3: Suponhamos, primeiramente, que haja somente uma parte pintada de cinza em um anel e que esse anel não seja o primeiro. Vejamos o que pode acontecer com o anel imediatamente anterior, que está em contato com ele. Para ilustrar, observe a figura abaixo, em que as partes do anel anterior são numeradas de 1 a 6.

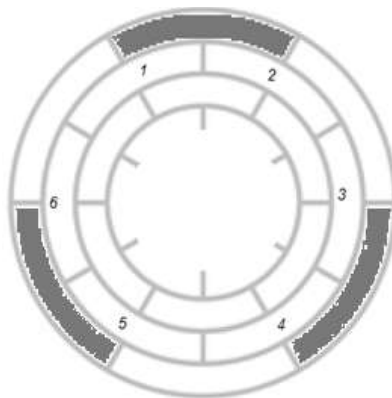
Se a casa com o número 1 fosse branca, a de número 2 seria cinza, bem como as casas numeradas com 2, 3, 4, 5 e 6, pois as partes do anel externo em contato com essas últimas são todas brancas. Assim, as casas 1 e 6 teriam cores diferentes e, portanto, a parte do anel externo em contato com essas duas casas deveria ser cinza, mas não é (isto é uma contradição). De modo análogo, chegaremos a uma situação contraditória se a casa com o número 1 fosse da cor cinza.



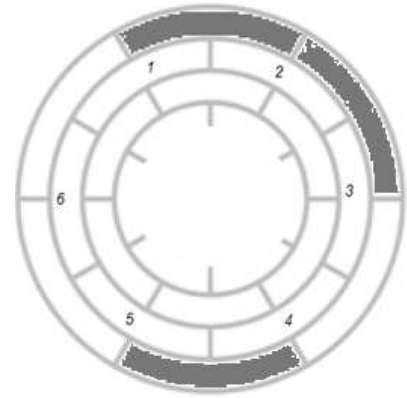
Vamos considerar agora o caso em que exatamente três casas são da cor cinza. Devido à simetria, há apenas três casos a considerar. Eles estão ilustrados nas figuras a seguir:



Três casas cinzas
juntas



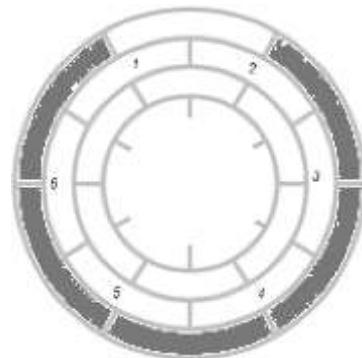
Três casas cinzas separadas
entre si



Duas casas cinzas juntas e uma
separada

Essas configurações também geram contradições quando analisarmos as cores das partes do anel interior que estão em contato com o que já está pintado. Como os casos são completamente análogos, analisaremos somente a terceira configuração. Neste caso, se a cor da parte 1 fosse branca, então a parte 2 deveria ser cinza, a parte 3 branca, a parte 4 branca, a parte 5 cinza e a parte 6 também cinza. Logo, as partes numeradas com 1 e 6 teriam cores opostas, o que entra em conflito com a cor da parte branca do anel exterior que faz fronteira com elas. Analogamente, se iniciarmos admitindo que a parte 1 fosse cinza, também chegaríamos a uma contradição.

Finalmente, vejamos o que ocorre quando 5 partes estão pintadas de cinza, como ilustra a figura ao lado. A análise é similar às anteriores: se a parte 1 fosse branca, 2 deveria ser branca, a casa 3, cinza, a casa 4 deveria ser branca, a casa 5 cinza e, a casa 6, branca. Nesse caso, as casas 1 e 6 teriam a mesma cor, mas isso é impossível, pois a parte do anel exterior em contato com elas é cinza, denunciando que elas deveriam ter cores diferentes. Contradição análoga aparece se iniciarmos supondo que a casa 1 é cinza.



Esses casos esgotam todas as possibilidades e mostram que nenhum anel, a partir do segundo, terá uma quantidade ímpar de partes pintadas de cinza.

item d)

Se um anel, a partir do terceiro, fosse pintado todo de cinza, o anel imediatamente anterior teria cores alternadas (três partes pintadas de cinza e três partes brancas, como ocorreu no item b)). Como 3 é ímpar, isto é impossível, devido ao item c). Logo, a partir do terceiro, nenhum anel será pintado todo de cinza.

N3Q3 – Solução

item a)

O lado AE é a hipotenusa do triângulo retângulo AEH . Observemos que $AH = AB - HB = AB - DC = 5 - 2 = 3$ e $EH = DH - DE = CB - DE = 6 - 2 = 4$. Portanto, utilizando o Teorema de Pitágoras, segue que $AE = \sqrt{AH^2 + EH^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. De acordo com o enunciado, $f(3)$ é a medida do perímetro do triângulo retângulo AEH , ou seja, $f(3) = 3 + 4 + 5 = 12$.

item b)

$f(5)$ é a medida do perímetro do polígono $ABCDE$, ou seja, $f(5) = 5 + 6 + 2 + 2 + 5 = 20$.

item c)

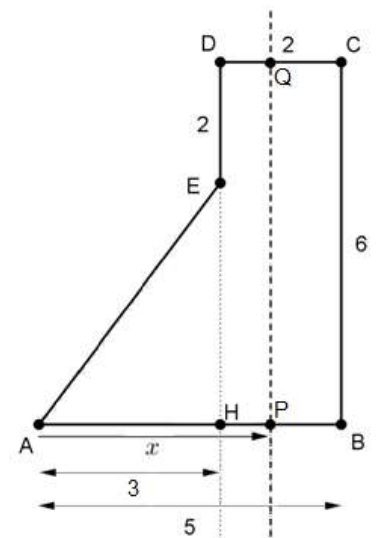
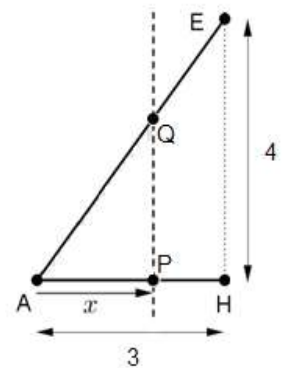
Primeiro vamos obter a expressão de $f(x)$, para $0 < x \leq 3$. Consideremos P e Q os pontos de intersecção da reta vertical com o polígono, conforme a figura ao lado. Segue que os triângulos APQ e AHE são semelhantes. Consequentemente, $\frac{x}{3} = \frac{PQ}{4}$ e $\frac{x}{3} = \frac{AQ}{5}$, ou seja, $PQ = \frac{4}{3}x$ e $AQ = \frac{5}{3}x$. Assim, para $0 < x \leq 3$, obtemos que

$$f(x) = AP + PQ + QA = x + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}x = \frac{12}{3}x = 4x$$

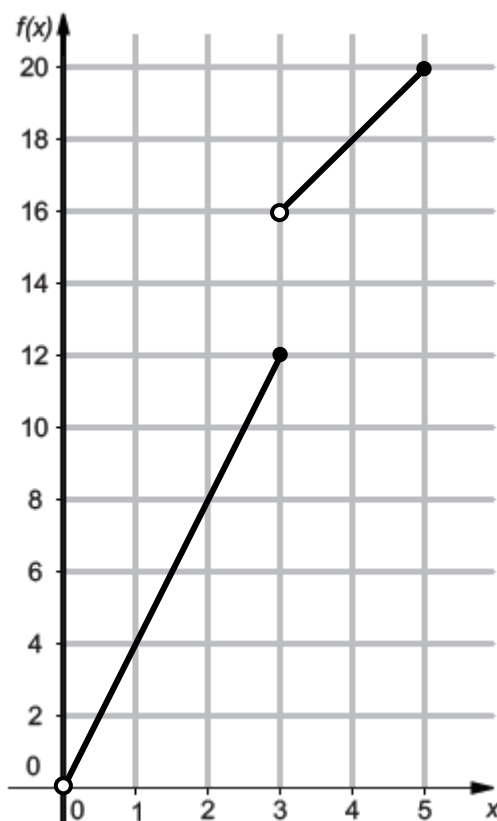
Como acima, consideremos agora P e Q os pontos de intersecção da reta vertical com o polígono, conforme a figura ao lado.

Para $3 < x \leq 5$,

$$f(x) = AP + PQ + QD + DE + EA = x + 6 + (x - 3) + 2 + 5 = 2x + 10.$$



item d)



N3Q4 – Solução

item a)

Como a base da figura tem 13 quadradinhos, o segundo nível deverá ter 11 quadradinhos, o terceiro nível deverá ter 9 quadradinhos e assim por diante, até o último nível, que terá apenas 1 quadradinho. Logo, o número de quadradinhos necessário para montar essa figura é

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 \text{ quadradinhos.}$$

Assim, a área da figura é 49. Por inspeção direta podemos verificar que o perímetro da figura é 40. Isto pode ser confirmado facilmente, pois o perímetro da figura é formado por 13 unidades na base, 13 unidades horizontais paralelas à base em cada camada, 7 unidades verticais à esquerda e 7 unidades verticais à direita, totalizando $13 + 13 + 7 + 7 = 40$.

item b)

Observamos que todo número natural ímpar é da forma $2n-1$ para algum n natural; por exemplo, $1 = 2 \times 1 - 1$, $3 = 2 \times 2 - 1$, $5 = 2 \times 3 - 1$, e assim por diante. Desse modo, 1 é o primeiro número ímpar, 3 é o segundo, 5 o terceiro e, em geral, o n -ésimo número ímpar é $2n-1$.

O número de quadradinhos de uma figura de base com $2n-1$ quadradinhos é a soma de todos os números ímpares de 1 até $2n-1$. As primeiras somas desse tipo são

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

$\vdots$

e é natural conjecturar que o número de quadradinhos de uma figura de base com $2n-1$ quadradinhos é n^2 , isto é, que

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$$

O que precisamos fazer, então, para resolver o item b), é mostrar a validade da fórmula acima. Há muitas maneiras de fazer isso.

Primeira maneira:

Escrevendo $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1)$, temos

$$2S = S + S$$

$$= [1 + 3 + 5 + \dots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1)] + [(2n-1) + (2n-3) + (2n-5) + \dots + 5 + 3 + 1]$$

$$= [1 + (2n-1)] + [3 + (2n-3)] + \dots + [(2n-5) + 5] + [(2n-3) + 3] + [(2n-1) + 1]$$

$$= \underbrace{2n + 2n + 2n + \dots + 2n + 2n + 2n}_{n \text{ vezes}}$$

$$= 2n \cdot n$$

$$= 2n^2$$

e segue que $S = n^2$.

Segunda maneira:

Podemos utilizar a fórmula

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética $a_1 = a$, $a_2 = a + r$, ..., $a_n = a + nr$ de termo inicial a e razão r . No nosso caso, a progressão tem termo inicial 1 e razão 2; o n -ésimo termo é $2n-1$ e a fórmula nos dá

$$S = \frac{n \cdot [1 + (2n - 1)]}{2} = \frac{n \cdot (2n)}{2} = n^2$$

Terceira maneira:

Podemos utilizar o Princípio de indução Finita para mostrar que a afirmativa $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$ é verdadeira para todo n natural não nulo. Primeiro verificamos que ela é verdadeira para $n = 1$; isto é imediato, pois $1 = 1^2$. Supondo agora que ela é verdadeira para algum natural n , isto é, que

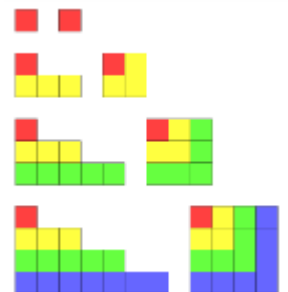
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$$

temos:

$$\begin{aligned} & 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + [2(n+1) - 1] \\ &= [1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)] + (2n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

Segue que a afirmativa é verdadeira para $n + 1$. Por indução, a afirmativa é verdadeira para todo n .

É claro que existem outras maneiras de se demonstrar que a soma dos primeiros n números ímpares é n^2 . Por exemplo, a figura ao lado pode inspirar uma outra demonstração de tal fato.



Observação:

Se N é o número de quadradinhos da primeira fileira, N é ímpar e, de acordo com a notação introduzida acima, $N = 2n-1$. Nesse caso, a igualdade $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ pode ser expressa como

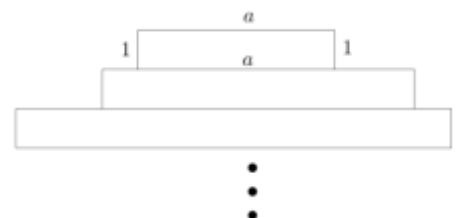
$$1 + 3 + 5 + \dots + N = \left[\frac{(N+1)}{2}\right]^2$$

O que mostra, de uma outra maneira, que o número total de quadradinhos é o quadrado de um número natural. Nesse caso, a área total da figura é $\left[\frac{(N+1)}{2}\right]^2$, ou seja, os quadradinhos podem ser rearranjados de modo a formarem um quadrado maior de lado $(N+1)/2$.

item c)

Solução 1:

Vamos observar o que acontece com o perímetro de uma pilha de retângulos quando colocamos um retângulo $a \times 1$ em cima dessa pilha, nos moldes descritos no enunciado (como na figura ao lado). O perímetro original (isto é, antes de colocar o retângulo $a \times 1$) “perde” a no contato entre os dois retângulos, mas “ganha” a no lado superior do retângulo $a \times 1$, e também “ganha” $1 + 1 = 2$ por conta dos dois lados verticais. Desse modo, a contribuição do retângulo adicional $a \times 1$ para o perímetro da figura é $a - a + 2 = 2$.



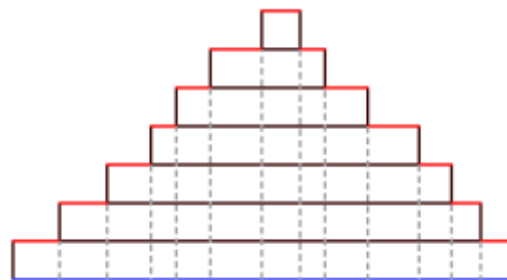
Concluimos que, ao fazer pilhas de retângulos como na figura, cada camada contribui com 2 para o perímetro da figura, com exceção da base, que contribui com seu próprio perímetro.

No nosso caso, a figura possui $2n - 1$ quadradinhos na base e, portanto, tem um retângulo de perímetro $(2n - 1) \times 2 + 2$ na base e $n - 1$ camadas adicionais, de modo que seu perímetro é

$$\underbrace{2 \cdot (2n - 1) + 2}_{\text{perímetro da base}} + \underbrace{2 \cdot (n - 1)}_{\text{contribuição das } n-1 \text{ camadas superiores}} = 6n - 2$$

Solução 2:

Outra maneira de deduzir a fórmula acima é observar a figura ao lado, formada pelo empilhamento de retângulos de bases cada vez menores. Seu perímetro é a soma do comprimento da base da figura (o segmento azul); com a soma dos comprimentos dos segmentos horizontais vermelhos que se encontram nas partes superiores das camadas (a soma das medidas desses segmentos é igual ao comprimento da base) e com a soma dos comprimentos dos segmentos verticais pretos, que é igual a duas vezes o número de camadas.



No nosso caso, a primeira camada da figura é um retângulo de base $2n - 1$ e ela tem um total de n camadas, logo, seu perímetro é

$$2 \cdot (2n - 1) + 2n = 6n - 2,$$

exatamente como na primeira solução.

Em resumo, o perímetro de uma figura com $2n - 1$ quadradinhos na base é $p = 6n - 2$ e sua área é $A = n^2$. Temos então

$$(p+2)^2 = [(6n-2)+2]^2 = (6n)^2 = 36 n^2 = 36 A.$$

Observação:

Se N for o número de quadradinhos da primeira fileira, N é ímpar e portanto da forma $2n - 1$. Nesse caso, a expressão do perímetro da figura é $p = 6n - 2 = 6 \left[\frac{(N+1)}{2} \right] - 2 = 3N + 1$.

O perímetro poderia também ser calculado diretamente em função de N observando-se que uma figura com N quadradinhos na primeira fileira é constituída por $n = (N+1)/2$ fileiras. Assim, seu contorno é formado por $2N$ segmentos horizontais e $2[(N+1)/2]$ segmentos verticais, o que totaliza

$$2N + 2 \left[\frac{(N+1)}{2} \right] = 3N + 1$$

segmentos. Logo, o perímetro é, de fato, $p = 3N + 1$.

N3Q5 – Solução

item a)

O ângulo $B\hat{D}E$ é externo ao triângulo ABD , logo, $B\hat{D}E = B\hat{A}D + A\hat{B}D = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$.

item b)

O lado AE é comum aos triângulos ACE e AFE e da figura sabemos que $C\hat{A}E = F\hat{A}E = 20^\circ$. Como EF é perpendicular a DB e $B\hat{D}E = D\hat{B}E = 30^\circ$, concluímos que $A\hat{E}F = F\hat{E}B = 60^\circ$; consequentemente,

$$A\hat{E}C = 180^\circ - (A\hat{E}F + F\hat{E}B) = 60^\circ.$$

Resumindo, AE é lado comum aos triângulos ACE e AFE e os ângulos adjacentes a esse lado são iguais ($C\hat{A}E = F\hat{A}E = 20^\circ$ e $A\hat{E}C = A\hat{E}F = 60^\circ$). Portanto, os triângulos ACE e AFE são congruentes pelo caso de congruência ALA (ângulo-lado-ângulo).

item c)

Denotemos por P o ponto de interseção dos segmentos EF e BD . De acordo com os itens anteriores, os triângulos DEP e BEP são congruentes com $DP = PB$. Os triângulos DFP e BFP também são congruentes pelo caso de congruência LAL (lado-ângulo-lado), pois $DP = PB$, FP é lado comum e $F\hat{P}D = B\hat{P}F = 90^\circ$, em particular o ângulo $D\hat{F}P = D\hat{F}E = 80^\circ$. Finalmente, a congruência entre os triângulos ACE e AFE , obtida no item b), implica a congruência entre os triângulos DCE e DFE , de onde concluímos que $E\hat{C}D = D\hat{F}E = 80^\circ$; logo, $B\hat{C}D = E\hat{C}D = 80^\circ$.

N3Q6 – Solução

item a)

O número de retiradas possíveis é $6 \times 5 \times 4 \times 3$. Para que 1 seja o menor número observado, basta que ele saia. Isso pode ocorrer em qualquer das 4 bolas retiradas (4 possibilidades). Nas demais posições, podem ocorrer quaisquer das bolas restantes, para um total de $5 \times 4 \times 3$ possibilidades. Logo, a probabilidade de que 1 seja o menor número observado é

$$\frac{4 \times 5 \times 4 \times 3}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{2}{3}$$

Outra solução:

Como argumentado acima, para que 1 seja o menor número observado, basta que ele saia. Em cada bola retirada, a probabilidade de que saia 1 é $1/6$. Logo, a probabilidade de que saia 1 em alguma bola é $1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 2/3$.

Outra solução:

É irrelevante se as bolas são retiradas uma a uma ou todas de uma vez. Considerando que as bolas são retiradas simultaneamente, o número de retiradas possíveis é C_6^4 . O número de retiradas em que aparece o 1 é C_5^3 . Logo, a probabilidade de que 1 seja o menor número observado é

$$\frac{C_5^3}{C_6^4} = \frac{C_5^2}{C_6^2} = \frac{\frac{5 \times 4}{2}}{\frac{6 \times 5}{2}} = \frac{2}{3}$$

item b)

O número de retiradas possíveis é, como no item anterior, $6 \times 5 \times 4 \times 3$. Para que 5 seja o maior número observado, é preciso que ele saia e que o 6 não saia. A posição em que o 5 ocorre pode ser escolhida de 4 modos. Nas demais 3 posições, podem sair quaisquer dos números de 1 a 4; há, assim, $4 \times 3 \times 2$ para essas escolhas. Logo, a probabilidade de que 5 seja o maior número observado é

$$\frac{4 \times 4 \times 3 \times 2}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{4}{15}$$

Outra solução:

Como no item anterior, é irrelevante se as bolas são retiradas uma a uma ou todas de uma vez. Considerando que as bolas são retiradas simultaneamente, o número de retiradas possíveis é C_6^4 . O número de retiradas em que aparece o 5 mas não aparece o 6 é C_4^3 . Logo, a probabilidade de que 5 seja o maior número observado é

$$\frac{C_4^3}{C_6^4} = \frac{C_4^1}{C_6^2} = \frac{4}{\frac{6 \times 5}{2}} = \frac{4}{15}$$

item c)

O número de retiradas possíveis é, como nos itens anteriores, $6 \times 5 \times 4 \times 3$. Para que o 1 seja o menor número observado e 5 seja o maior, é preciso que ambos saiam e que o 6 não saia. A posição em que o 1 ocorre pode ser escolhida de 4 modos; aquela em que o 5 ocorre, de 3 modos. Nas demais 2 posições, podem sair quaisquer dos números de 2 a 4; há, assim, 3×2

possibilidades para essas escolhas. Logo, a probabilidade de que 1 seja o menor e 5 seja o maior número observado é

$$\frac{4 \times 3 \times 3 \times 2}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{5}$$

Outra solução:

Como nos itens anteriores, é irrelevante se as bolas são retiradas uma a uma ou todas de uma vez. Considerando que as bolas são retiradas simultaneamente, o número de retiradas possíveis é C_6^4 . O número de retiradas em que aparecem o 1 e o 5 mas não aparece o 6 é C_3^2 (de fato, precisamos escolher dois dentre os três números: 2, 3 e 4). Logo, a probabilidade de que 1 seja o menor número observado e de que 5 seja o maior número observado é

$$\frac{C_3^2}{C_6^4} = \frac{C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{\frac{6 \times 5}{2}} = \frac{1}{5}$$

item d)

O número de retiradas possíveis é, como nos itens anteriores, $6 \times 5 \times 4 \times 3$. As possibilidades para o menor e o maior número retirado e o número de retiradas em que eles ocorrem na primeira e última posições, respectivamente, são listados na tabela abaixo:

Menor	Maior	Número de retiradas em que aparecem na primeira e na última posição respectivamente.	Possibilidades em cada caso
1	4	2	(1234) e (1324)
1	5	$3 \times 2 = 6$	(1235), (1325), (1245), (1425), (1345) e (1435)
1	6	$4 \times 3 = 12$	(1236), (1326), (1246), (1426), (1256), (1526), (1346), (1436), (1356), (1536), (1456) e (1546)
2	5	2	(2345) e (2435)
2	6	$3 \times 2 = 6$	(2346), (2436), (2356), (2536), (2456) e (2546)
3	6	2	(3456) e (3546)

Logo, a probabilidade de que o menor número saia na primeira posição e o maior na última é

$$\frac{2 + 6 + 12 + 2 + 6 + 2}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{30}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{12}$$

Outra solução:

Quaisquer que tenham sido as 4 bolas retiradas, as diversas ordenações dos números das bolas têm todas a mesma chance de ocorrer. O número de ordenações possíveis é $4 \times 3 \times 2 \times 1$. As ordenações em que o menor número aparece na primeira posição e o maior na última são apenas duas (correspondentes às duas possíveis ordenações dos números do meio). Logo, a probabilidade de que o menor número saia na primeira posição e o maior na última é:

$$\frac{2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{12}$$