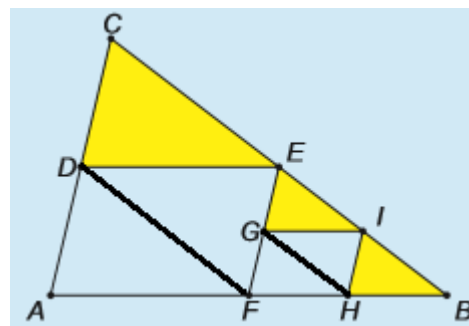


Solução da prova da 1.ª Fase

QUESTÃO 1

ALTERNATIVA B

Os quatro triângulos CDE , DAF , FED e EFB são congruentes e, portanto, têm áreas iguais a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo maior ABC ; sendo assim, a área do triângulo CDE é 12 cm^2 . Por sua vez, o triângulo EFB também pode ser decomposto em quatro triângulos congruentes, como indicado na figura, e, desse modo, os triângulos EGI e IHB têm áreas iguais a $\frac{12}{4} = 3 \text{ cm}^2$. Logo, a área destacada em amarelo, sendo a soma das áreas de CDE com EGI e IHB , é igual a $12 + 3 + 3 = 18 \text{ cm}^2$.



QUESTÃO 2

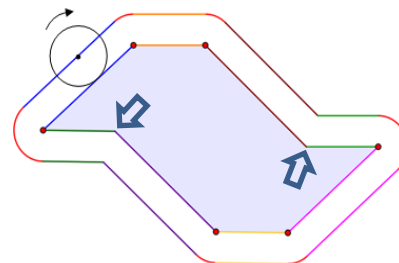
ALTERNATIVA C

Como $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ e como, pelo enunciado, $a - b = 1$ e $ab = 1$, então $1 = a^2 - 2 + b^2$. Portanto, $a^2 + b^2 = 1 + 2 = 3$.

QUESTÃO 3

ALTERNATIVA A

Como a distância de um ponto a uma figura geométrica é a menor distância desse ponto aos pontos da figura, o desenho que Celinha obtém ao traçar os pontos que estão a 1 cm da Figura 3 é a trajetória do centro de um círculo de raio 1 quando este se move pelo contorno da figura tangenciando-o. Nesse caso, as curvas obtidas são segmentos de retas ou arcos de circunferências. Nos vértices em que a figura se lança para fora, aparecem arcos de circunferências, mas isto não ocorre nos dois vértices em que a figura se lança para dentro (marcados com as setas largas).



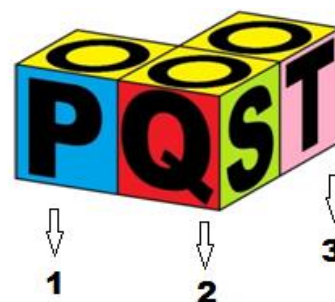
Outra solução: Uma maneira de obter o traço cujos pontos distam 1 cm da Figura 3 é considerar o contorno da figura formada ao considerar a união dos discos (círculos preenchidos) de raio 1 cm centrados em pontos da Figura 3. O contorno dessa união de discos aparece representado na alternativa A.

QUESTÃO 4

ALTERNATIVA A

Como as letras **P**, **Q**, **S** e **T** estão visíveis na ilustração, essas são as faces adjacentes à face com a letra **O**, e a face oposta à letra **O** é a face com a letra **R**. As faces em contato entre os dados 1 e 2 não podem ser **P** (visível na ilustração do dado 1), nem **Q** ou **S** (visíveis na ilustração do dado 2). Portanto, tem que ser **T**. Olhando para o dado 2, concluímos que a face com **S** é oposta à face com **T**.

Outra solução: A letra **O** possui quatro faces vizinhas com as letras **P**, **Q**, **S** e **T**. Primeiramente observe que Zequinha juntou o dado 2 com o dado 3 pela face **P**, pois esta mesma face não pode estar na junção do dado 2 com o dado 1, que possui a face **P** visível. Logo, os dados 1 e 2 foram juntados pela face **T**. Assim, **S** e **T** são faces opostas, o que responde à questão. É claro também que **P** é oposta a **Q**, bem como **R**, que não aparece na ilustração, é oposta a **O**.



QUESTÃO 5 ALTERNATIVA C

Chamemos de L o comprimento da pista. Como a velocidade de Ana é o dobro da de Beatriz, quando elas se encontram, Ana terá percorrido $2L/3$, e Beatriz $L/3$.

Para que isso fique mais claro, basta observar que, em um mesmo intervalo de tempo, a distância percorrida por Ana é o dobro da distância percorrida por Beatriz. Assim, quando as duas se encontram, as distâncias percorridas estarão nessa mesma proporção 2:1, e Ana terá percorrido, portanto, $2L/3$.

Um raciocínio análogo mostra que, quando Ana se encontra com Cristina, Ana terá percorrido o triplo de Cristina, pois a velocidade de Ana é o triplo da velocidade de Cristina. Assim, Ana terá percorrido $3L/4$ e Cristina, $L/4$.

Como a distância percorrida por Ana entre os dois encontros é de 20 metros, temos $(3L/4) - (2L/3) = 20$, ou seja, $L = 240$ metros.

QUESTÃO 6 ALTERNATIVA B

Lembramos primeiro que, se a e b são números naturais, dizer que a é múltiplo de b (ou b divide a) é dizer que existe outro número natural c tal que $a = bc$. O algoritmo da divisão nos diz que, se $b \neq 0$, existem únicos inteiros q e r tais que $a = qb + r$ e $0 \leq r < |b|$; os números q e r são ditos, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por b (se $r = 0$, temos o caso em que a é múltiplo de b).

Seja agora n o número natural do enunciado. Como $n + 1$ é múltiplo de 11, existe um número natural t tal que $n + 1 = 11t$; do mesmo modo, existe um número natural s tal que $n - 1 = 8s$. Multiplicando membro a membro essas expressões, temos $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1 = 88ts$, ou seja, $n^2 = 88ts + 1$. Essa última expressão mostra que o resto da divisão de n^2 por 88 é 1.

QUESTÃO 7 ALTERNATIVA B

Se $f(a) = b$ então $5a^2 + a \cdot a + b = 6a^2 + b = b$, logo $a = 0$.

Como $f(b) = 5b^2 + a \cdot b + b = a$, então $5b^2 + b = 0$, ou seja, $b \cdot (5b + 1) = 0$. Portanto, $b = 0$ ou $b = -1/5$ e, como a e b devem ser diferentes, $b = -1/5$.

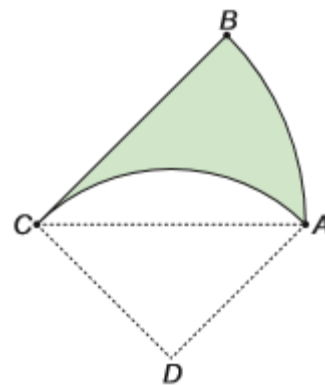
QUESTÃO 8 ALTERNATIVA A

O cálculo da área solicitada pode ser feito em duas etapas. Na primeira, consideramos a figura $ABCD$ formada pela metade do quadrado cujo lado tem comprimento 2 (ou seja, o triângulo ACD) e um oitavo do círculo com centro C e raio CA . A medida de CA é $2\sqrt{2}$, pois coincide com a diagonal do quadrado de lado 2.

A área dessa figura é: $\frac{4}{2} + \frac{1}{8} 8\pi = 2 + \pi$.

Na segunda etapa, para calcular a área da região verde, observamos que ela pode ser obtida a partir da figura completa $ABCD$ retirando um quarto do círculo com centro em D e raio DA , o qual mede 2. A área desse um quarto de círculo é $\frac{1}{4} 4\pi = \pi$.

Fazendo a diferença $(2 + \pi) - \pi = 2$, temos a área da região verde.



QUESTÃO 9 ALTERNATIVA C

Como 2^{2017} é a maior potência de dois que divide o produto $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2023 \times 2024$, podemos escrever esse produto na forma $2^{2017} \times I$, sendo I um número ímpar.

Já o produto $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 4047 \times 4048$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &1 \times (2 \times 1) \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \dots \times (2 \times 2023) \times 4047 \times (2 \times 2024) = \\ &(1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 4047) \times (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times (2 \times 2023) \times (2 \times 2024) = \\ &(1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 4047) \times (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2023 \times 2024) \times 2^{2024} = \\ &(1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 4047) \times I \times 2^{2017} \times 2^{2024} \end{aligned}$$

O primeiro fator da última expressão também é um número ímpar, logo,

$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 4047 \times 4048 = T \times 2^{2017+2024} = T \times 2^{4041}$, sendo T um fator ímpar. Assim, o expoente da maior potência de dois que divide o produto dado é 4041.

QUESTÃO 10 ALTERNATIVA E

Inicialmente definimos as variáveis $AG = x$ e $DF = y$, que são os raios dos semicírculos com centros em G e F , respectivamente. O raio do semicírculo com centro em E é igual a $9/2$. Como ele é tangente ao semicírculo com centro em F , EF é igual a $(9/2) + y$. Como $CE = 9/2$ e $CF = 9 - y$, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CEF , temos:

$$((9/2) + y)^2 = (9/2)^2 + (9 - y)^2 \rightarrow (81/4) + 9y + y^2 = (81/4) + 81 - 18y + y^2 \rightarrow y = 3.$$

Como os semicírculos com centros em F e G são tangentes, $FG = x + y = x + 3$. Além disso, $DG = 9 - x$ e $DF = 3$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo DFG , temos:

$$(3 + x)^2 = 3^2 + (9 - x)^2 \rightarrow 9 + 6x + x^2 = 9 + 81 - 18x + x^2 \rightarrow x = AG = 27/8.$$

QUESTÃO 11 ALTERNATIVA C

Durante a partida foram formadas várias equipes de 5 atletas, até o tempo acabar. Observamos que:

- a quantidade de tempo que o atleta 1 jogou (T_1) é igual à soma dos tempos em jogo de cada uma das equipes de 5 de que ele participou (S_1),
- a quantidade de tempo que o atleta 2 jogou (T_2) é igual à soma dos tempos em jogo de cada uma das equipes de 5 de que ele participou (S_2),

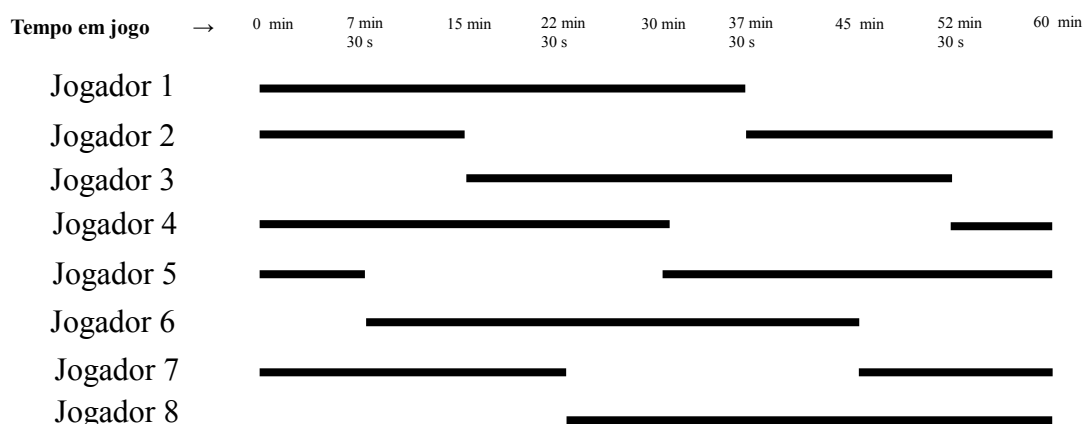
e assim por diante, até o oitavo jogador:

- a quantidade de tempo que o atleta 8 jogou (T_8) é igual à soma dos tempos em jogo de cada uma das equipes de 5 de que ele participou (S_8).

Cada atleta jogou a mesma quantidade de tempo ($T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = T_7 = T_8$); logo, o tempo que cada um jogou é $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8) \div 8$.

Agora, notamos que na soma $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8$ o tempo de jogo de cada equipe de 5 formada é somado 5 vezes. Por exemplo, se os atletas 1, 2, 3, 4 e 5 formaram uma equipe em campo, o tempo que essa equipe jogou foi considerado nas somas S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5 . Assim, $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 = 5 \times 60 = 300$, de onde concluímos que o tempo que cada um jogou é $300 \div 8$ minutos, o que corresponde a 37 minutos e 30 segundos.

Como curiosidade, observe no diagrama abaixo como poderia ter sido realizada uma partida nos moldes do enunciado:



Outra solução: Imagine que pagamos, em dinheiro, cada atleta proporcionalmente ao tempo que ele jogou. Se ele jogou um tempo T recebe $k \times T$. Como, a cada instante, temos 5 atletas em campo, no fim do jogo, teremos que pagar no total $k \times 5 \times 60 = 300k$. Se cada um deles jogou o mesmo tempo, então receberá o mesmo pagamento que os demais. Como são 8 atletas, o soldo de cada um será $300 \times k/8$. Para saber quanto tempo ele jogou, basta dividir por k , o que nos fornece $(300 \times k) / (8 \times k) = 300/8$ minutos.

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA D

Observe que a soma dos números das seis faces de um dado é 21. Assim, a soma de todos os números dos três dados é 63. Consequentemente, a maior soma que Benício pode obter é igual a 57, quando as faces em contato corresponderem aos números 1 e 2. De fato, a menor soma possível para os números das faces em contato garante a maior soma possível para os números das faces que não ficam em contato: $57 = 63 - 6 = 63 - (1 + 1 + 2 + 2)$.

Analogamente, a menor soma possível para Benício obter é igual a 41, quando as faces em contato corresponderem aos números 5 e 6: $41 = 63 - 22 = 63 - (5 + 5 + 6 + 6)$.

Como $16 = 57 - 41$, ou seja, 16 é o resultado da diferença entre a maior soma e a menor soma possíveis, essa foi a situação observada por Benício. De fato, as demais diferenças entre as possíveis somas são menores que 16, uma vez que esse é o resultado entre as duas situações extremas. Consequentemente, as faces que não ficaram em contato nas duas observações de Benício correspondem aos números 3 e 4.

Outra solução:

A soma dos números de cada dado é 21. Se, na primeira montagem, os números em contato são a e b , a soma dos números que não ficaram em contato é $S_1 = 3 \times 21 - (2a + 2b) = 63 - 2(a + b)$. O fator 2 se explica notando que são sempre pares de faces em contato. Além disso, temos que a e b são necessariamente distintos.

Da mesma forma, na segunda montagem, se os números das faces em contato são c e d , a soma dos números que não ficaram em contato será $S_2 = 63 - 2(c + d)$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $S_1 \geq S_2$.

A diferença entre esses números é 16, ou seja:

$$(63 - 2(a + b)) - (63 - 2(c + d)) = 16 \rightarrow (c + d) - (a + b) = 8.$$

Vamos analisar as possíveis soluções dessa equação, com a, b, c e d inteiros entre 1 e 6, e $a \neq b$ e $c \neq d$.

O valor máximo de $(c + d) - (a + b)$ é obtido quando $c + d$ é máximo e $a + b$ é mínimo. Isso ocorre com $c + d = 5 + 6 = 11$ e $a + b = 1 + 2 = 3$. Assim, a diferença que Benício encontrou é, justamente, a máxima possível. Isso implica que os números que nunca estiveram em contato são 3 e 4.

QUESTÃO 13
ALTERNATIVA A

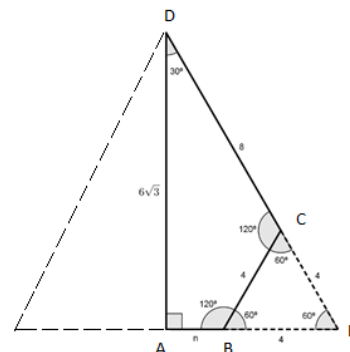
Prolongando-se dois lados do quadrilátero, obtemos um triângulo equilátero de lado 4 cm e um triângulo retângulo grande DAE que é metade de um triângulo equilátero de lado 12 cm, como indicado na figura.

Pelo Teorema de Pitágoras, a altura de um triângulo equilátero de lado l é $h =$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ l. Logo,}$$

área de $ABCD = (\text{área do triângulo retângulo } DAE) - (\text{área do triângulo})$

$$\text{área do } \triangle CBE = \frac{6.6\sqrt{3}}{2} - \frac{16\sqrt{3}}{4} = 14\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$



QUESTÃO 14

ALTERNATIVA E

Observamos primeiro que Joãozinho pode escolher 22 bolas sem que nenhum grupo de 7 delas satisfaça as condições do enunciado; por exemplo, ele pode escolher 10 bolas verdes, 10 amarelas, 1 azul e 1 amarela. Por outro lado, se ele escolher 23 bolas haverá, necessariamente, um grupo de 7 delas que satisfará a condição do enunciado. Podemos ver isso como segue.

Ao escolher 23 bolas, pelo menos 6 delas serão de uma mesma 1.ª cor. De fato, se isso não acontecesse, então haveria no máximo 5 bolas de cada cor, ou seja, Joãozinho teria escolhido no máximo $5 + 5 + 5 + 5 = 20$ bolas, o que não é o caso, já que estamos supondo que ele escolheu 23. O maior número possível de bolas dessa cor entre as escolhidas é 10; sobram, então, no mínimo $23 - 10 = 13$ bolas para as outras três cores. O mesmo raciocínio aqui mostra que há pelo menos 5 bolas de uma 2.ª cor e que sobram no mínimo $13 - 10 = 3$ bolas para as duas cores restantes; finalmente, outra vez o mesmo raciocínio mostra que há pelos menos 2 bolas de uma 3.ª cor.

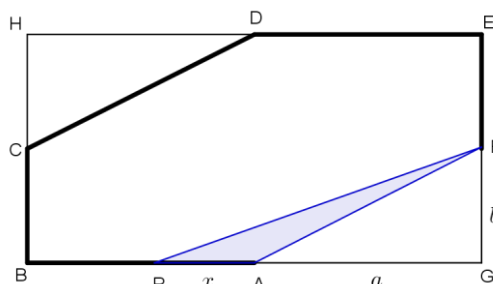
Mostramos, assim, que, se Joãozinho escolher 23 bolas, entre elas haverá um grupo de 13 bolas com 6 de uma 1.ª cor, 5 de uma 2.ª cor e 2 de uma 3.ª cor; em particular, entre essas bolas aparecerão 3 da 1.ª cor, 2 da 2.ª e 2 da 3.ª. Segue que 23 é o menor número de bolas que ele deve escolher para garantir a condição do enunciado.

Observação geral: O argumento empregado nessa solução pode ser formalizado como segue: se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais e sua média aritmética é m , isto é, $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = m$, então, ou $a_1 = a_2 = \dots = a_n = m$ ou existe pelo menos um índice i tal que $a_i < m$ e pelo menos um índice j tal que $a_j > m$. No nosso caso, fizemos uma escolha de a_1 bolas verdes, a_2 bolas amarelas, a_3 bolas azuis e a_4 bolas vermelhas tal que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 23$; temos $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{23}{4} > 5$. Segue que existe pelo menos um i tal que $a_i > 5$, e, como a_i é um número inteiro, temos $a_i \geq 6$; em outras palavras, entre as 23 bolas existem pelo menos 6 de uma mesma cor, e analogamente para o restante da solução. A demonstração do fato geral do início desse parágrafo é inteiramente análoga à do caso particular que acabamos de analisar.

QUESTÃO 15 ALTERNATIVA E

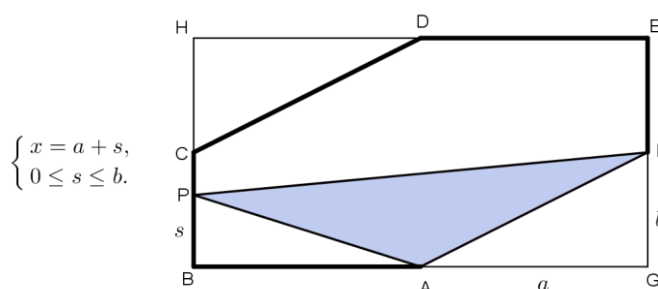
Sejam $\overline{AB} = \overline{AG} = a$ e $\overline{EF} = \overline{FG} = b$. Estudaremos separadamente a função $R(x)$, dependendo da posição do ponto P na poligonal $ABCDEF$.

Caso 1) P está no segmento AB : $0 \leq x \leq a$.



Como mostra a figura, nesse caso a altura do triângulo relativa à base AP é sempre $\overline{FG} = b$. Assim, $R(x) = \frac{b}{2}x$.

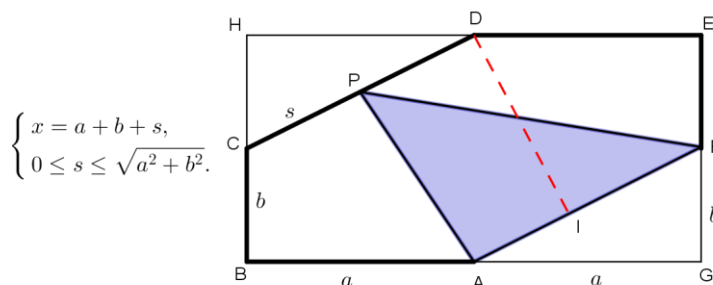
Caso 2) P está no segmento BC : $a \leq x \leq a + b$.



De acordo com a figura, segue que

$$R(x) = \frac{(b+s)}{2}2a - \frac{as}{2} - \frac{ab}{2} = a \frac{a+s}{2} + \frac{ab}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{a}{2}x + \frac{a(b-a)}{2}.$$

Caso 3) P está no segmento CD : $a + b \leq x \leq a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$.



Na figura, o segmento auxiliar DI é perpendicular aos segmentos paralelos CD e AF . A altura do triângulo AFP relativa à base AF permanece constante, com medida $\overline{DI}$, logo, a área do triângulo AFP é constante e seu valor é determinado no momento em que P está em C , ou seja,

$$R(x) = R(a+b) = \frac{a(a+b)}{2} + \frac{a(b-a)}{2} = ab.$$

Com as informações coletadas nos casos 1, 2 e 3, percebe-se que os únicos gráficos que podem representar a área $R(x)$ são os apresentados em B) e E). No entanto, observamos que, quando o ponto P chega ao final do percurso (ponto F), ou seja, quando $x = 2(a+b) + \sqrt{a^2 + b^2}$, o triângulo AFP degenera no segmento AF , sendo sua área igual a zero. Assim, o gráfico que melhor representa $R(x)$ é o apresentado em E).

QUESTÃO 16

ALTERNATIVA D

De acordo com a maneira com que João reduza a quantidade de copos da fila,

- após a 1.ª etapa teremos $\frac{148}{2} = 74$ copos na fila;
- após a 2.ª etapa teremos $\frac{74}{2} = 37$ copos na fila;
- após a 3.ª etapa teremos $\frac{37+1}{2} = 19$ copos na fila;
- após a 4.ª etapa teremos $\frac{19+1}{2} = 10$ copos na fila;
- após a 5.ª etapa teremos $\frac{10}{2} = 5$ copos na fila;
- após a 6.ª etapa teremos $\frac{5+1}{2} = 3$ copos na fila;
- após a 7.ª etapa teremos $\frac{3+1}{2} = 2$ copos na fila.

Em cada etapa, a quantidade de feijões no segundo copo sempre dobra. Assim, após a 7.ª etapa, a quantidade de feijões no segundo copo será $2^7 = 128$. Todos os demais feijões estarão no primeiro copo. Portanto, a quantidade de feijões no primeiro copo quando a fila se reduz a dois copos é $148 - 128 = 20$.

QUESTÃO 17

ALTERNATIVA D

Ana garantirá o empate quando a quantidade de votos que ainda não tiverem sido apurados for igual à diferença entre os votos já apurados em favor da Ana e os votos já apurados em favor de Beto. De fato, para que o empate ocorra ninguém mais deve votar em Ana e todos os votos válidos devem ir para Beto.

Votos já apurados = N

Votos válidos = 80% de N

Votos apurados a favor de Ana = 60% de 80% de $N = \frac{60}{100} \times \frac{80}{100} \times N = 0,48N$

Votos apurados a favor de Beto = 40% de 80% de $N = \frac{40}{100} \times \frac{80}{100} \times N = 0,32N$

Votos que ainda serão apurados = $1450 - N$

Portanto, $0,48N - 0,32N = 1450 - N \Rightarrow 0,16N = 1450 - N \Rightarrow 1,16N = 1450$

$$\Rightarrow N = \frac{1450}{1,16} = 1250$$

QUESTÃO 18 ALTERNATIVA E

Como $\{a, b, c\}$ é um conjunto de três elementos, devemos contar quantas são as formas de expressar 2310 como um produto de três fatores distintos, não importando a ordem. A decomposição em fatores primos de 2310 é $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$.

Há 4 tipos de decomposição possíveis: $1 \times (abcd) \times e$, $1 \times (abc) \times (de)$, $(abc) \times d \times e$, $(ab) \times (cd) \times e$.

Vamos contar separadamente as possibilidades em cada caso.

1º caso: $1 \times (abcd) \times e$

Basta escolher o número correspondente a e . Há, portanto, 5 possibilidades.

2º caso: $1 \times (abc) \times (de)$

Basta escolher os números d e e . O número d pode ser escolhido de 5 modos e, a seguir, e pode ser escolhido de 4 modos, para um total de $5 \times 4 = 20$ modos. No entanto, como a ordem dos fatores não afeta o produto dos dois números (ou seja, $de = ed$), cada possibilidade aparece duas vezes nesta contagem. Portanto, o fator de (em consequência o fator abc) pode ser escolhido de 10 modos.

3º caso: $(abc) \times d \times e$

Basta escolher os fatores d e e . Como no caso anterior, temos $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ possibilidades.

4º caso: $(ab) \times (cd) \times e$

O fator e pode ser escolhido de 5 modos. Para os demais fatores, basta escolher o par cd , o que pode ser feito de $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ modos, para um total de $5 \times 6 = 30$ modos. Como não importa a ordem entre os fatores (ab) e (cd) , cada possibilidade está contada em dobro. O número de possibilidades, neste caso, é, portanto, $\frac{30}{2} = 15$.

Logo, o número total de possibilidades é $5 + 10 + 10 + 15 = 40$.

Outra solução: Vamos contar quantas são as possibilidades para colocar cada um dos 5 fatores primos em um dos termos a , b , ou c . Temos três possibilidades para cada fator primo, para um total de $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ casos. Três dessas possibilidades não são válidas ($1 \times 1 \times 2310$, $1 \times 2310 \times 1$ e $2310 \times 1 \times 1$), pois correspondem a produtos com termos 1 repetidos. Por outro lado, cada decomposição aparece 6 vezes nas 240 possibilidades restantes (já que são contados separadamente os 6 modos de escrever o produto abc). Assim, o número de possibilidades é $240/6 = 40$.

QUESTÃO 19 ALTERNATIVA A

O espaço amostral desse experimento é formado pelas trincas (a, b, c) com a , b e c variando de 1 a 9, ou seja, $9 \times 9 \times 9 = 729$ pontos equiprováveis.

Observe que um número natural pode ser múltiplo de 3 ou estar a uma distância 1 ou 2 do próximo múltiplo de 3. Por exemplo, 4 está a uma distância 2 de 6, e 5 a uma distância 1 de 6.

Assim, a pode ser escolhido de 9 maneiras, e b não pode assumir 3 dos 9 valores, isto é, ou não pode assumir 3, 6 e 9, ou não pode assumir 1, 4 e 7, ou não pode assumir 2, 5 e 8. Assim, b pode assumir 6 valores.

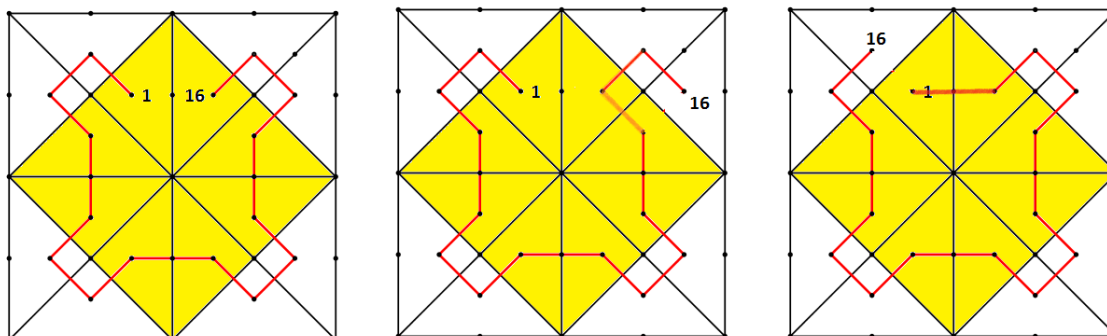
Para a escolha de c , utilizamos o mesmo argumento, só que agora queremos que assuma um dos três valores que tornem o resultado da soma $a + b + c$ um múltiplo de 3.

Portanto, o número de pontos que satisfazem o enunciado é $9 \times 6 \times 3 = 162$, e a probabilidade é $162/729 = 2/9$.

QUESTÃO 20 ALTERNATIVA D

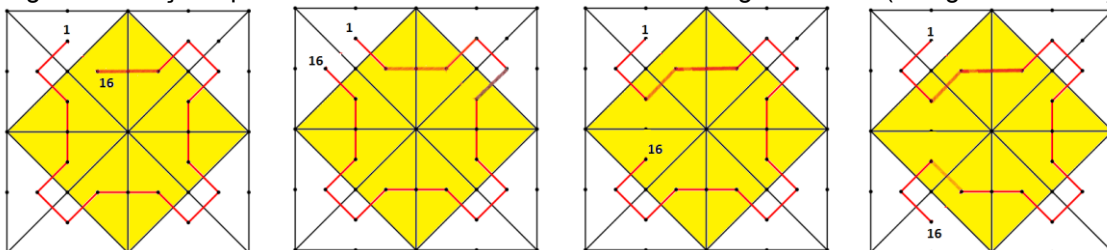
Vamos dividir o problema em duas situações.

Primeira situação: quando o número 1 é colocado em um dos 8 triângulos indicados na figura abaixo pela cor amarela (triângulos centrais).



Escolhido qualquer um dos 8 triângulos amarelos para colocar o número 1, haverá 3 caminhos para se preencherem os números de 1 a 16 atendendo as condições do problema. Portanto, há 8×3 maneiras de fazer o preenchimento começando em um triângulo amarelo.

Segunda situação: quando o número 1 é colocado em um triângulo branco (triângulo de canto).



Escolhido qualquer um dos 8 triângulos brancos para colocar o número 1, haverá 4 caminhos para se preencherem os números de 1 a 16 atendendo as condições do problema. Portanto, há 8×4 maneiras de fazer o preenchimento começando em um triângulo amarelo.

Somando-se as quantidades obtidas nas duas hipóteses, obtemos que o número de maneiras é $8 \times 3 + 8 \times 4 = 24 + 32 = 56$.