

SOLUÇÕES NÍVEL 1 – 2ª. FASE 2017

N1Q1 – Solução

item a)

Como a casa pintada está na linha 3, Ana sorteou o número 3 e, como ela também está na coluna 4, concluímos que Pedro sorteou o número 1, pois $4 - 3 = 1$.

item b)

Se a casa marcada com X fosse pintada, como ela está na linha 3 e na coluna 10, o número sorteado por Pedro deveria ser $10 - 3 = 7$. Mas, o dado não contém face numerada com 7. Logo, a casa marcada com X no tabuleiro nunca será pintada.

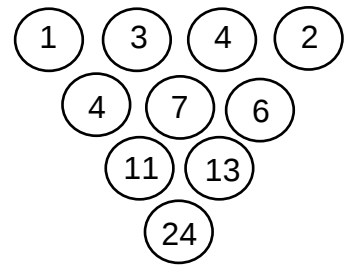
item c)

Raciocinando de modo análogo ao que foi feito no item b), as casas que nunca serão pintadas são as marcadas com X no tabuleiro abaixo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	X							X	X	X	X	X
2	X	X							X	X	X	X
3	X	X	X							X	X	X
4	X	X	X	X							X	X
5	X	X	X	X	X							X
6	X	X	X	X	X	X						

Basta subtrair do número da coluna o número da linha da casa: se o resultado não for um número de 1 a 6, então a casa não pode ser pintada. As demais casas sempre podem ser pintadas.

N1Q2 – Solução



item a) Há uma única maneira de preencher o tabuleiro:

item b)

O número que aparece na primeira casa da segunda linha depende de como são colocados os dois primeiros números da primeira linha. As possibilidades são as seguintes:

$$1 + 2 = 2 + 1 = \mathbf{3}, \quad 1 + 3 = 3 + 1 = \mathbf{4}, \quad 1 + 4 = 4 + 1 = \mathbf{5}, \quad 2 + 3 = 3 + 2 = \mathbf{5}, \\ 2 + 4 = 4 + 2 = \mathbf{6} \quad \text{e} \quad 3 + 4 = 4 + 3 = \mathbf{7}.$$

Logo, na primeira casa da segunda linha somente podem aparecer os seguintes números: 3, 4, 5, 6 ou 7. Observe que o único número que pode aparecer repetido na segunda linha é 5 e que o maior número da segunda linha é 7.

item c)

O maior número que pode aparecer na terceira linha é 13. Ele aparece quando somamos os dois maiores números que podem aparecer na segunda linha, ou seja, o 6 com o 7. Não há, assim, maneira de fazer aparecer na terceira linha um número maior do que 13, já que números de uma linha são sempre a soma de dois números da linha anterior e, somando os maiores de uma linha, obtemos o maior da linha seguinte.

item d)

Primeira solução:

O número 25 nunca aparecerá na última linha, pois o número que aparece na última linha sempre é par. De fato, dentre os números 1, 2, 3 e 4, dois deles são pares e dois são ímpares. Na primeira linha eles podem ser colocados de seis maneiras diferentes:

(par, par, ímpar, ímpar) ou (par, ímpar, par, ímpar) ou (par, ímpar, ímpar, par) ou (ímpar, par, par, ímpar) ou (ímpar, par, ímpar, par) ou, finalmente, (ímpar, ímpar, par, par).

Em qualquer um desses casos, considerando que a soma de dois números pares é par, que a soma de um par com um ímpar é ímpar e que a soma de dois ímpares é par, chegaremos à conclusão de que, usando as regras de preenchimento, o elemento da última linha sempre é par.

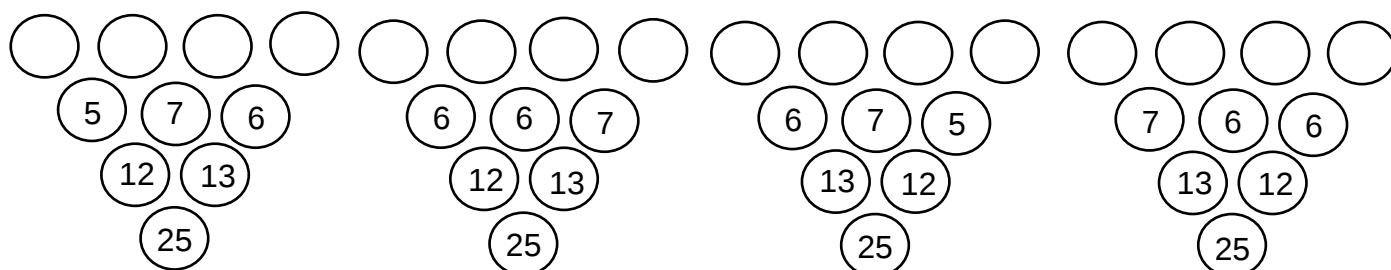
Segunda solução:

Vamos mostrar que o maior número que pode aparecer na última linha é 24. Para obter o maior resultado possível, olhamos para a segunda linha: a casa

central da segunda linha deve conter o número 7 (o maior possível nesta linha), pois ele vai contribuir duas vezes como parcela para formar a terceira linha. Além disso, seus dois vizinhos na segunda linha somam 10, pois $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Logo, para obter o resultado máximo, a soma dos elementos da segunda linha deve ser 17. Olhamos agora para a terceira linha: a soma dos números dessa linha forçosamente será $2 \times 7 + 10 = 24$. E se a soma dos números na terceira linha é 24, então, na última casa o número que aparece é 24. Logo, 24 é o maior valor possível para o elemento da última linha. De fato, 24 pode efetivamente ocorrer na última linha, como foi mostrado no exemplo do item a).

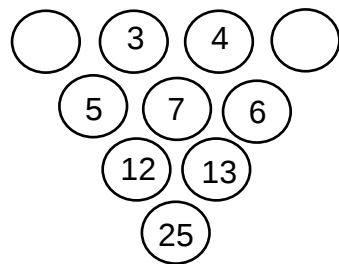
Terceira solução:

Vamos raciocinar de trás para frente. Se 25 aparecesse na última linha, ele deveria ser a soma de duas parcelas da linha anterior. Pelo menos uma dessas parcelas deveria ser maior do que 12 (pois, se ambas fossem iguais ou menores do que 12, sua soma seria, no máximo, 24). Mas, pelo item c), o maior número da terceira linha é 13 (é o único número maior do que 12 que pode aparecer na terceira linha). Logo, as únicas possibilidades seriam $25 = 12 + 13$ ou $25 = 13 + 12$, ou seja, 12 e 13 deveriam aparecer na terceira linha. Veremos, entretanto, que isto é impossível. De fato, 13 só pode ser obtido como a soma de 6 e 7. Assim, de baixo para cima, há apenas as seguintes possibilidades de preenchimento:



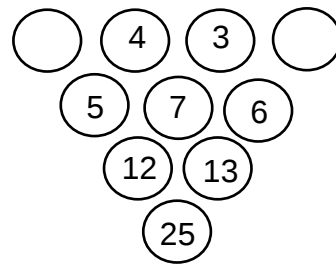
A segunda e a quarta situações acima são impossíveis, pois o número 6 aparece repetido na segunda linha e vimos, no item b), que isto não pode ocorrer; só o 5 pode aparecer repetido na segunda linha. A primeira e terceira das situações acima são simétricas e podem ser tratadas da mesma maneira. Assim, vamos analisar somente a primeira delas e ver que ela também não pode ocorrer. Concluiremos, então, que nenhuma das possibilidades pode acontecer, se 25 ocupar a última linha.

Acima do 7, na primeira linha, só podem aparecer o 3 e o 4 ou o 4 e o 3:



Situação A

ou



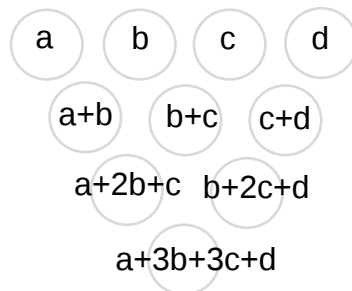
Situação B

Na situação A, para as somas serem corretas na segunda linha, teríamos que repetir o número 2 na primeira linha e, na situação B, teríamos que repetir o número 3 na primeira linha, violando a primeira regra.

Conclusão: supor que 25 aparece na última linha nos leva a preenchimentos incorretos nas linhas anteriores. Logo, ele nunca aparecerá na última linha.

Quarta solução: (Esta solução utiliza rudimentos de álgebra)

Vamos representar os números da primeira linha por a , b , c e d . Com isto, o preenchimento fica:



Como $a + 3b + 3c + d = (a + b + c + d) + 2(b + c) = 10 + 2(b + c)$, o valor máximo da expressão na última casa ocorre quando b e c são máximos (isto é, quando $c = 3$ e $b = 4$ ou $c = 4$ e $b = 3$) e, assim, os valores de a e d devem ser iguais a 1 ou 2. Desse modo, o valor máximo de $a + 3b + 3c + d$ é $1 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 2 = 24$. Portanto, 25 nunca poderá aparecer na última casa.

N1Q3 – Solução

Primeira Solução:

item a)

Para comparar as frações, vamos escrevê-las como frações equivalentes, todas com o mesmo denominador 14, para depois comparar os numeradores.

André retirou $\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$ do pacote, Bernardo retirou $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$ do pacote e Carlos retirou $\frac{1}{14}$ do pacote. Logo, quem retirou o menor número de doces foi Carlos.

item b)

A fração que representa o total de doces no pacote é $1 = \frac{14}{14}$. Portanto, a fração que representa a quantidade dos doces que restaram no pacote com relação ao total de doces é

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{7} + \frac{1}{14} \right) = 1 - \left(\frac{7}{14} + \frac{4}{14} + \frac{1}{14} \right) = \frac{14}{14} - \frac{12}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

item c)

O número de doces de André (que é $\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$ do pacote) menos 15 doces é igual ao número de doces de Bernardo (que é $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$ do pacote). Logo, o número de doces de André é igual ao número de doces de Bernardo somado a 15. Portanto, a diferença entre o número de doces de André e o número de doces de Bernardo é igual a 15, ou seja,

$\frac{1}{2} - \frac{2}{7} = \frac{7}{14} - \frac{4}{14} = \frac{3}{14}$ corresponde a 15 doces. Se $\frac{3}{14}$ do pacote corresponde a 15 doces, então a terça parte desta quantidade, isto é, $\frac{1}{14}$ do pacote, corresponde a 5 doces, já que $\frac{1}{3} \times 15 = 5$.

Deste modo, o número de doces no pacote é $14 \times 5 = 70$.

Segunda Solução:

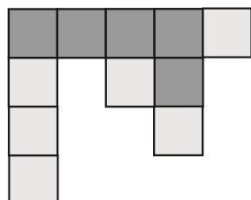
Nesta solução, representamos as frações $1/2$, $2/7$ e $1/14$ como partes de um mesmo todo (o pacote de doces), que será representado por



N1Q4 – Solução

item a)

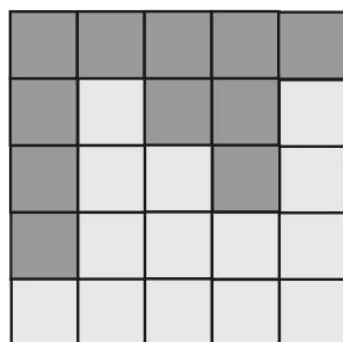
Ao juntar novos cubinhos à peça, Janaína percebeu que somente aqueles em contato com a mesa mudaram a marca original. No caso em questão, seis novos cubinhos foram colocados diretamente sobre a mesa, e a marca passou a ter seis novos quadradinhos (os mais claros na figura abaixo).



Observamos que, no total, foram acrescentados dez novos cubinhos, mas só seis deles em contato direto com a mesa.

item b)

Para poder usar a menor quantidade possível de cubinhos e obter uma marca quadrada sobre a mesa, Janaína deve acrescentar cubinhos somente na camada inferior da peça, ou seja, cubinhos em contato com a mesa. Como já existem cinco quadradinhos alinhados na marca da peça do item a), o comprimento do lado da marca quadrada deverá ser igual ao comprimento de cinco quadradinhos alinhados, no mínimo. Portanto, a marca deverá ter mais quatro linhas de cinco quadradinhos, totalizando $5 \times 5 = 25$ quadradinhos. Logo, falta acrescentar $25 - 11 = 14$ cubinhos à peça do item a). Representamos ao lado a marca quadrada da nova peça.



Obs.: Como a peça do item a) tinha originalmente 17 cubinhos, depois dos acréscimos a nova peça com a marca quadrada passou a ter $17 + 14 = 31$ cubinhos.

item c)

O menor cubo que pode ser montado a partir da peça obtida no item a) deverá ter uma altura correspondente a uma coluna de cinco cubinhos. Esse cubo será composto de $5 \times 5 \times 5 = 125$ cubinhos. Para obter esse cubo, Janaína terá que usar mais $125 - 31 = 94$ cubinhos.

Obs.: Se Janaína fosse completar um cubo a partir da peça do item b), ela necessitaria de $125 - 31 = 94$ cubinhos, pois 14 cubinhos já teriam sido acrescentados à peça do item a) para deixar a marca sobre a mesa com a forma de uma região quadrada.

N1Q5 – Solução

item a)

a) As possibilidades restantes são dadas a seguir:

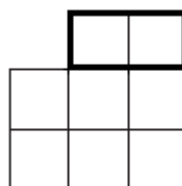


Note que não é possível ter as três peças retangulares na horizontal. Assim, ou temos duas na horizontal e uma na vertical (que pode estar à direita ou à esquerda) ou as três na vertical.

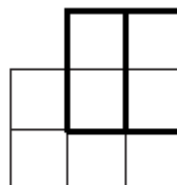
item b)

Começemos por cobrir os quadradinhos superiores. Temos duas possibilidades:

- Cobri-los com uma peça horizontal



- Cobri-los com duas peças verticais



No primeiro caso, resta um quadriculado igual ao do item a) para ser coberto; como vimos, ele pode ser coberto de 3 modos. No segundo caso, só há uma forma possível de terminar a cobertura. Logo, o número de possibilidades é $3 + 1 = 4$.

item c)

1ª solução:

Começemos cobrindo o quadrado 2×2 central. Há 3 possibilidades:

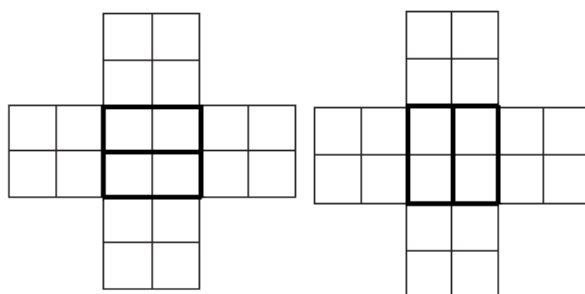
- O quadrado central é coberto de modo que as peças retangulares usadas não invadam as regiões vizinhas.

Isto ocorre quando são usadas duas peças horizontais ou duas verticais para cobrir o quadrado central (como ilustrado nas figuras ao lado).

Em ambos os casos, cada um dos outros quadrados pode ser coberto de dois modos (com peças horizontais ou verticais).

Logo, o número de coberturas deste tipo é:

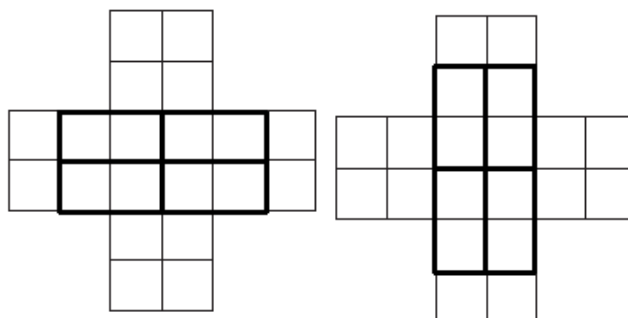
$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$$



- O quadrado central é coberto de modo a invadir dois quadrados opostos. Isto acontece quando são usadas quatro peças horizontais ou quatro verticais para cobrir suas casas (como ilustrado nas figuras ao lado).

Neste caso, os quadrados invadidos só podem ter sua cobertura completada de 1 modo, enquanto os outros dois podem ser cobertos de 2 modos. Logo, o número de coberturas deste tipo é:

$$2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 8.$$

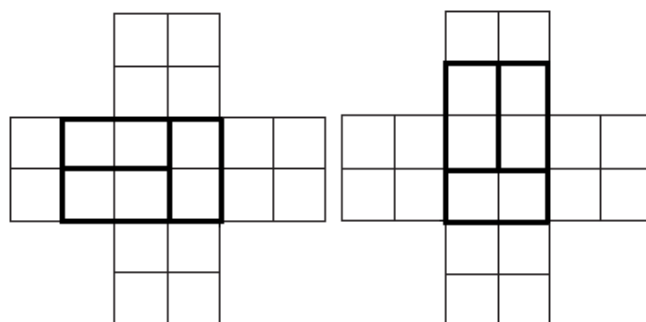


- O quadrado central é coberto de modo a invadir somente um dos outros dois quadrados. Isto ocorre quando são usadas 2 peças horizontais e 1 vertical ou duas verticais e uma horizontal (como ilustrado nas figuras ao lado).

Há quatro possibilidades para o quadrado a ser invadido. O quadrado invadido só pode ser coberto de 1 modo, e cada um dos demais, de 2 modos.

Logo, o número de coberturas deste tipo é:

$$4 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$$

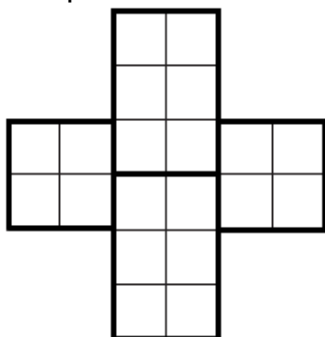


O número total de possibilidades de cobertura é, portanto, igual a $32 + 8 + 32 = 72$.

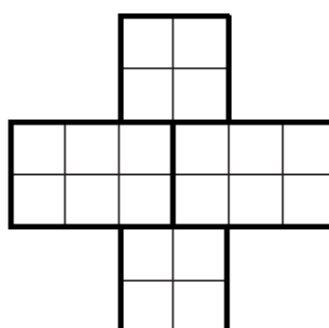
2ª solução

Olhe para o tabuleiro vazio e enxergue nele as seguintes possibilidades de dividi-lo em regiões retangulares disjuntas:

Forma de preenchimento “vertical”



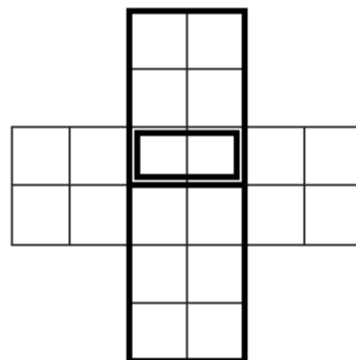
Forma de preenchimento “horizontal”



É notável que qualquer preenchimento do tabuleiro com peças retangulares siga o padrão de cobertura descrito por uma dessas duas possibilidades e, como veremos, não é possível que um mesmo recobrimento pertença simultaneamente aos dois padrões por regiões descritos acima. Assim, podemos

contar separadamente cada caso e, no final, somar o número de possibilidades. Observe também que o número de preenchimentos na forma “vertical” é igual ao número de preenchimentos na forma “horizontal”.

Em outras palavras, em todas as possibilidades de preenchimento, haverá sempre exatamente uma direção (vertical ou horizontal) em que o braço da cruz nesta direção é preenchido como se fosse composto de dois retângulos 2×3 (modo horizontal) ou 3×2 (modo vertical). De fato, se isto não fosse verdade, por exemplo, para a direção horizontal, haveria uma peça horizontal cobrindo duas casas do quadrado central (representada no exemplo da figura



ao lado pelo retângulo menor dentro do quadrado central da cruz). Mas, neste caso, na direção vertical o preenchimento poderia ser feito independentemente para os dois retângulos maiores 2×3 destacados na figura.

Portanto, podemos contar separadamente os preenchimentos que seguem o padrão vertical (como acima) ou horizontal. Em cada um destes casos, cada retângulo 2×3 (ou 3×2) pode ser preenchido, como visto no item a), de 3 modos, e cada quadrado, de 2 modos. Logo, há para cada forma de preenchimento (horizontal ou vertical), $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ possibilidades. Assim, o número total de preenchimentos do tabuleiro em forma de cruz é $2 \times 36 = 72$.

N1Q6 – Solução

item a)

Existem vários passeios da formiguinha nos quais ela obtém o número 45. Ela deve necessariamente visitar duas vezes a bolinha com o número 3 e uma vez a bolinha com o número 5, em uma ordem correta. Eis alguns exemplos:

- $3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5$
- $5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- $3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- $5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

item b)

A fatoração do número 52 em produtos de números primos é $52 = 2 \times 2 \times 13$. A formiguinha nunca vai conseguir obter o número 52 em um passeio pois, no objeto, não há uma bolinha com o número 13 para ela visitar.

item c)

A fatoração do número 40 em produtos de números primos é $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$. Assim, para obter o número 40 em um passeio, a formiguinha deve passar somente pelas bolinhas 1, 2 e 5, passando exatamente três vezes pela bolinha 2 e uma vez pela bolinha 5. Como não há vareta ligando as bolinhas 1 e 2, para passar três vezes pela bolinha 2 a formiguinha é obrigada a passar pelo menos três vezes pela vareta que liga as bolinhas 2 e 5 e, ao fazer isso, ela passa pelo menos duas vezes pela bolinha 5. Assim, é impossível para a formiguinha fazer um passeio passando somente pelas bolinhas 1, 2 e 5, passando exatamente três vezes pela bolinha 2 e uma vez pela bolinha 5.

item d)

A fatoração do número 30 em produto de números primos é $30 = 2 \times 3 \times 5$. Para obter o número 30 no final de um passeio, a formiguinha deve passar somente pelas bolinhas 1, 2, 3 e 5, passando uma única vez pelas bolinhas 2, 3 e 5. A formiguinha não pode passar mais de duas vezes pela bolinha 1, pois, se isso acontecesse, ela passaria mais de uma vez pelas bolinhas 3 ou 5. Assim, temos as seguintes situações:

- obter 30 sem passar pela bolinha 1;
- obter 30 passando somente uma vez pela bolinha 1;
- obter 30 passando duas vezes pela bolinha 1;

Na primeira situação, a formiguinha tem duas possibilidades para iniciar seu passeio (bolinhas 3 ou 5) e, em cada uma delas, uma única direção a seguir. Temos, então, $2 \times 1 = 2$ possibilidades. São as seguintes:

- $3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$
- $5 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

Na segunda situação, a formiguinha tem quatro possibilidades para iniciar seu passeio (bolinhas 1, 2, 3 ou 5) e, em cada uma delas, duas direções a seguir. Temos, então, $4 \times 2 = 8$ possibilidades. São elas:

- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5$
- $2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- $3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2$
- $3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$
- $5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$
- $5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

Na terceira situação, a formiguinha tem três possibilidades: iniciar e terminar na bolinha 1, iniciar na bolinha 1 e terminar na bolinha 2, ou iniciar na bolinha 2 e terminar na bolinha 1; em cada uma delas, ela tem duas direções a seguir. Temos, então, $3 \times 2 = 6$ possibilidades. São as seguintes:

- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2$
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1$
- $2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

No total, temos $2 + 8 + 6 = 16$ passeios diferentes em que a formiguinha obtém, ao final, o número 30.