

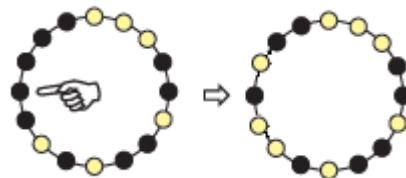
SOLUÇÕES NÍVEL 2 – 2ª. FASE 2017

N2Q1 – Solução

item a)

Há 10 botões pretos na figura do item a).

Quando apertarmos o botão indicado, os dois botões vizinhos que são inicialmente pretos passarão a ser amarelos. Com isso, teremos dois botões pretos a menos. Portanto, após apertarmos o botão indicado, teremos 8 botões pretos.



item b)

Quando apertamos um botão, há apenas três possibilidades para os dois vizinhos:

i) ambos são pretos – neste caso os dois passarão a ser amarelos e a quantidade de botões pretos diminuirá 2 unidades (foi o que ocorreu no item a)).

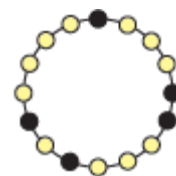
ii) ambos são amarelos – neste caso os dois passarão a ser pretos e a quantidade de botões pretos aumentará 2 unidades.

iii) um é preto e outro é amarelo – neste caso ambos mudarão de cor e a quantidade de botões pretos ficará inalterada.

Logo, a quantidade de botões pretos, a cada toque, aumenta ou diminui 2 unidades ou não se altera e, portanto, a paridade do número que representa esta quantidade não se altera (se for par continua par e, se for ímpar, continua ímpar). Portanto, se começarmos com 10 botões pretos, a quantidade de botões pretos sempre será par.

item c)

Na figura do item c) há 5 botões pretos e, portanto, usando o raciocínio do item b), podemos concluir que a quantidade de botões pretos sempre será ímpar. Para que, em algum momento, haja 16 botões amarelos, a quantidade de botões pretos teria que ser zero, que é um número par. Poderíamos pensar também a partir dos 11 botões amarelos; como a quantidade deles sempre será ímpar, é impossível que todos os 16 botões fiquem amarelos, pois 16 é par.



Portanto, é impossível, partindo da figura do item c), obter uma configuração com os 16 botões amarelos.

N2Q2 – Solução

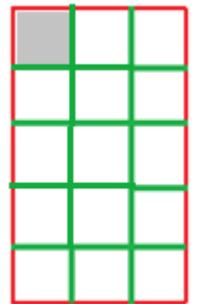
item a)

Observamos inicialmente que o comprimento do lado do quadrado sombreado é 2 cm, uma vez que sua área é 4 cm^2 . A partir dessa informação e da disposição dos quadrados na figura, teremos a decomposição do retângulo em dois quadrados iguais de lado 2 cm (portanto, ambos de área 4 cm^2), um quadrado de lado 4 cm (portanto, de área 16 cm^2) e um quadrado de lado 6 cm (portanto, de área 36 cm^2).

Assim, a área do retângulo contornado em vermelho é: $2 \times 4 + 16 + 36 = 60 \text{ cm}^2$.

Outra solução:

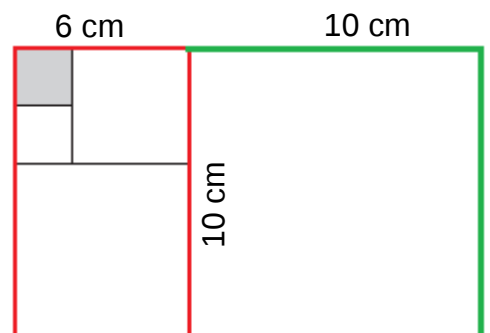
Uma outra maneira de se obter a área é decompor o retângulo destacado em vermelho em 15 quadrados idênticos ao quadrado sombreado. Como $15 \times 4 = 60$, a área do retângulo contornado em vermelho é 60 cm^2 .



item b)

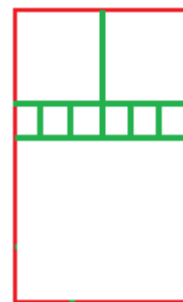
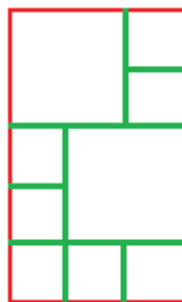
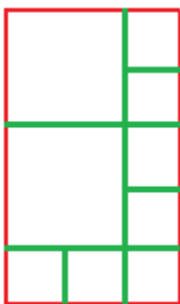
Os lados do retângulo contornado em vermelho medem 10 cm e 6 cm. Para formar um novo retângulo, o quadrado a ser juntado deverá ter como lado um dos lados do retângulo original. O quadrado que tornará a área do novo retângulo a maior possível será o quadrado cujo lado mede 10 cm. Observe a figura ao lado:

A área do novo retângulo será $60 + 100 = 160 \text{ cm}^2$.



item c)

Há várias soluções para a decomposição do retângulo em nove quadrados; três delas estão exibidas nas figuras a seguir.



N2Q3 – Solução

item a)

O resultado de Júlia com o número 3 é $3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$.

item b)

Utilizando as formas de fatoração, temos que

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = 1320$$

Isto nos diz que o produto de três números consecutivos é 1320. Usando cálculos mentais, por aproximação, como $10^3 = 1000$ e como a unidade do número 1320 é 0, testamos $n = 11$. Nesse caso, como $11 \times 10 \times 12 = 1320$, concluimos que, de fato, $n = 11$ deve ter sido o número escolhido por Júlia para que ela tenha obtido 1320 como resultado. Observe que outro teste natural seria $14 \times 13 \times 15$, que também tem unidade 0, mas é maior do que 1320.

item c)

Para um número ser múltiplo de 6, ele deve ser múltiplo de 2 e de 3. Como vimos no item b), o resultado é o produto de três números inteiros positivos consecutivos. Como dentre os três números consecutivos pelo menos um deles é par, temos que o resultado é par. Para mostrar que o número encontrado é múltiplo de 3, basta verificar que um dos três números: n , $(n - 1)$ ou $(n + 1)$, é múltiplo de 3. Observe que:

- se o resto da divisão de $n - 1$ por 3 for 1, então $n + 1$ será múltiplo de 3;
- se o resto da divisão de $n - 1$ por 3 for 2, então n será múltiplo de 3;
- se o resto da divisão de $n - 1$ por 3 for 0, então ele mesmo será múltiplo de 3.

Em qualquer um dos casos, o resultado de Júlia, isto é, $n(n - 1)(n + 1)$, será sempre um múltiplo de 2 e de 3; portanto, um múltiplo de 6.

N2Q4 – Solução

item a)

a) As possibilidades restantes são dadas a seguir:

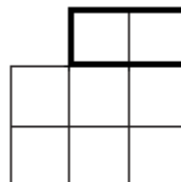


Note que não é possível ter as três peças retangulares na horizontal. Assim, ou temos duas na horizontal e uma na vertical (que pode estar à direita ou à esquerda) ou as três na vertical.

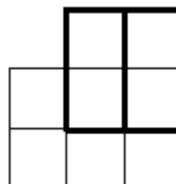
item b)

Começemos por cobrir os quadradinhos superiores. Temos duas possibilidades:

- Cobri-los com uma peça horizontal



- Cobri-los com duas peças verticais



No primeiro caso, resta um quadriculado igual ao do item a) para ser coberto; como vimos, ele pode ser coberto de 3 modos. No segundo caso, só há uma forma possível de terminar a cobertura. Logo, o número de possibilidades é $3 + 1 = 4$.

item c)

1ª solução:

Começemos cobrindo o quadrado 2×2 central. Há 3 possibilidades:

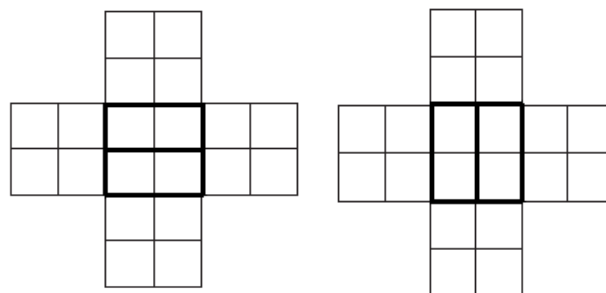
- O quadrado central é coberto de modo que as peças retangulares usadas não invadam as regiões vizinhas.

Isto ocorre quando são usadas duas peças horizontais ou duas verticais para cobrir o quadrado central (como ilustrado nas figuras ao lado).

Em ambos os casos, cada um dos outros quadrados pode ser coberto de dois modos (com peças horizontais ou verticais).

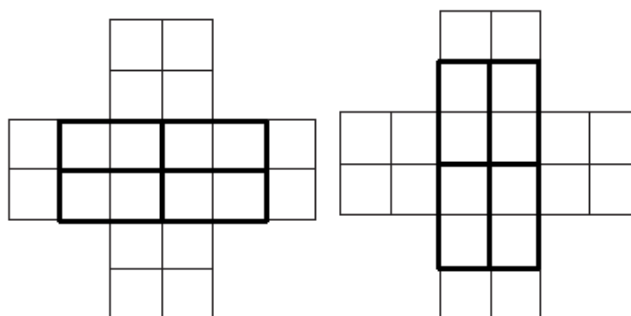
Logo, o número de coberturas deste tipo é:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$$



- O quadrado central é coberto de modo a invadir dois quadrados opostos. Isto acontece quando são usadas quatro peças horizontais ou quatro verticais para cobrir suas casas (como ilustrado nas figuras ao lado).

Neste caso, os quadrados invadidos só podem ter sua cobertura completada de 1 modo, enquanto os outros dois podem ser cobertos de 2 modos. Logo, o número de coberturas deste tipo é $2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 8$.

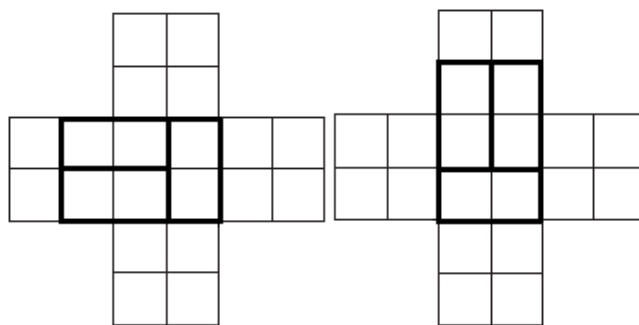


- O quadrado central é coberto de modo a invadir somente um dos outros dois quadrados. Isto ocorre quando são usadas 2 peças horizontais e 1 vertical ou duas verticais e uma horizontal (como ilustrado nas figuras ao lado).

Há quatro possibilidades para o quadrado a ser invadido. O quadrado invadido só pode ser coberto de 1 modo, e cada um dos demais, de 2 modos.

Logo, o número de coberturas deste tipo é:

$$4 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$$

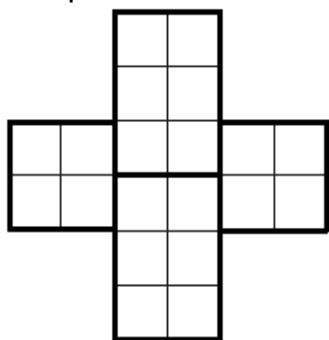


O número total de possibilidades de cobertura é, portanto, igual a $32 + 8 + 32 = 72$.

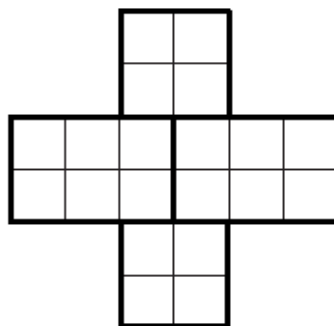
2ª solução

Olhe para o tabuleiro vazio e enxergue nele as seguintes possibilidades de dividi-lo em regiões retangulares disjuntas:

Forma de preenchimento “vertical”

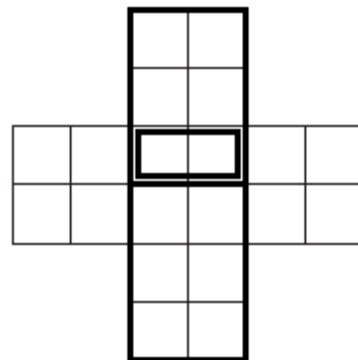


Forma de preenchimento “horizontal”



É notável que qualquer preenchimento do tabuleiro com peças retangulares siga o padrão de cobertura descrito por uma dessas duas possibilidades e, como veremos, não é possível que um mesmo recobrimento pertença simultaneamente aos dois padrões por regiões descritos acima. Assim, podemos contar separadamente cada caso e, no final, somar o número de possibilidades. Observe também que o número de preenchimentos na forma “vertical” é igual ao número de preenchimentos na forma “horizontal”.

Em outras palavras, em todas as possibilidades de preenchimento, haverá sempre exatamente uma direção (vertical ou horizontal) em que o braço da cruz nesta direção é preenchido como se fosse composto de dois retângulos 2×3 (modo horizontal) ou 3×2 (modo vertical). De fato, se isto não fosse verdade, por exemplo, para a direção horizontal, haveria uma peça horizontal cobrindo duas casas do quadrado central (representada no exemplo da figura ao lado pelo retângulo menor dentro do quadrado central da cruz). Mas, neste caso, na direção vertical o preenchimento poderia ser feito independentemente para os dois retângulos maiores 2×3 destacados na figura.



Portanto, podemos contar separadamente os preenchimentos que seguem o padrão vertical (como acima) ou horizontal. Em cada um destes casos, cada retângulo 2×3 (ou 3×2) pode ser preenchido, como visto no item a), de 3 modos, e cada quadrado, de 2 modos. Logo, há para cada forma de preenchimento (horizontal ou vertical), $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ possibilidades. Assim, o número total de preenchimentos do tabuleiro em forma de cruz é $2 \times 36 = 72$.

N2Q5 – Solução

item a)

Existem vários passeios da formiguinha nos quais ela obtém o número 45. Ela deve necessariamente visitar duas vezes a bolinha com o número 3 e uma vez a bolinha com o número 5, em uma ordem correta. Eis alguns exemplos:

- $3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5$
- $5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- $3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- $5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

item b)

A fatoração do número 52 em produtos de números primos é $52 = 2 \times 2 \times 13$. A formiguinha nunca vai conseguir obter o número 52 em um passeio pois, no objeto, não há uma bolinha com o número 13 para ela visitar.

item c)

A fatoração do número 40 em produtos de números primos é $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$. Assim, para obter o número 40 em um passeio, a formiguinha deve passar somente pelas bolinhas 1, 2 e 5, passando exatamente três vezes pela bolinha 2 e uma vez pela bolinha 5. Como não há vareta ligando as bolinhas 1 e 2, para passar três vezes pela bolinha 2 a formiguinha é obrigada a passar pelo menos três vezes pela vareta que liga as bolinhas 2 e 5 e, ao fazer isso, ela passa pelo menos duas vezes pela bolinha 5. Assim, é impossível para a formiguinha fazer um passeio passando somente pelas bolinhas 1, 2 e 5, passando exatamente três vezes pela bolinha 2 e uma vez pela bolinha 5.

item d)

A fatoração do número 30 em produto de números primos é $30 = 2 \times 3 \times 5$. Para obter o número 30 no final de um passeio, a formiguinha deve passar somente pelas bolinhas 1, 2, 3 e 5, passando uma única vez pelas bolinhas 2, 3 e 5. A formiguinha não pode passar mais de duas vezes pela bolinha 1, pois, se isso acontecesse, ela passaria mais de uma vez pelas bolinhas 3 ou 5. Assim, temos as seguintes situações:

- obter 30 sem passar pela bolinha 1;
- obter 30 passando somente uma vez pela bolinha 1;
- obter 30 passando duas vezes pela bolinha 1;

Na primeira situação, a formiguinha tem duas possibilidades para iniciar seu passeio (bolinhas 3 ou 5) e, em cada uma delas, uma única direção a seguir. Temos, então, $2 \times 1 = 2$ possibilidades. São as seguintes:

- $3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$
- $5 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

Na segunda situação, a formiguinha tem quatro possibilidades para iniciar seu passeio (bolinhas 1, 2, 3 ou 5) e, em cada uma delas, duas direções a seguir. Temos, então, $4 \times 2 = 8$ possibilidades. São elas:

- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5$
- $2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- $3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2$
- $3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$
- $5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$
- $5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

Na terceira situação, a formiguinha tem três possibilidades: iniciar e terminar na bolinha 1, iniciar na bolinha 1 e terminar na bolinha 2, ou iniciar na bolinha 2 e terminar na bolinha 1; em cada uma delas, ela tem duas direções a seguir. Temos, então, $3 \times 2 = 6$ possibilidades. São as seguintes:

- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2$
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1$
- $2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

No total, temos $2 + 8 + 6 = 16$ passeios diferentes em que a formiguinha obtém, ao final, o número 30.

N2Q6 – Solução

Item a) Como $5^2 = 25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, segue que 5 é bilegal.

Item b)

Observamos que $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ e $3 + 4 + 5 + 6 = 18$; a partir daí, qualquer soma de quaisquer quatro inteiros positivos consecutivos será maior do que 18. Logo, a soma de quatro inteiros positivos consecutivos nunca será $4^2 = 16$, ou seja, 4 não é bilegal.

Item c)

Vamos primeiramente fazer uma pausa para entender melhor os números bilegais. Uma sequência de n inteiros positivos consecutivos, $n > 1$, é uma sequência da forma

$$a, a + 1, a + 2, \dots, a + (n - 1),$$

em que a é um inteiro maior do que 0. A soma desses inteiros é (olhe o lembrete anexado ao item c)):

$$a + (a + 1) + \dots + [a + (n - 1)] = (a + a + \dots + a) + [1 + 2 + \dots + (n - 1)] = na + \frac{(n - 1)n}{2}$$

Desse modo, se n é bilegal, temos

$$n^2 = na + \frac{(n - 1)n}{2}$$

para algum inteiro positivo a ; cancelando n dos dois lados dessa expressão, obtemos

$$n = a + \frac{n - 1}{2}$$

Vemos, então, que n é bilegal se, e somente se, existe um inteiro positivo a tal que a expressão acima seja verdadeira. Isso acontece se, e somente se,

$$n - \frac{n - 1}{2} = \frac{n + 1}{2}$$

é um número inteiro positivo.

Vamos agora à resolução propriamente dita do item c).

Para qualquer inteiro par n , a expressão $\frac{n+1}{2}$ não é um número inteiro; logo, nenhum número par é bilegal.

Para qualquer inteiro ímpar $n > 1$, a expressão $\frac{n+1}{2}$ é um número inteiro; logo, todo número ímpar é bilegal.