

SOLUÇÕES NÍVEL 3 – 2ª. FASE 2017

N3Q1 – Solução

item a)

O resultado de Júlia com o número 3 é $3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$.

item b)

Utilizando as formas de fatoração, temos que

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = 1320$$

Isto nos diz que o produto de três números consecutivos é 1320. Usando cálculos mentais, por aproximação, como $10^3 = 1000$ e como a unidade do número 1320 é 0, testamos $n = 11$. Nesse caso, como $11 \times 10 \times 12 = 1320$, concluimos que, de fato, $n = 11$ deve ter sido o número escolhido por Júlia para que ela tenha obtido 1320 como resultado. Observe que outro teste natural seria $14 \times 13 \times 15$, que também tem unidade 0, mas é maior do que 1320.

item c)

Para um número ser múltiplo de 6, ele deve ser múltiplo de 2 e de 3. Como vimos no item b), o resultado é o produto de três números inteiros positivos consecutivos. Como dentre os três números consecutivos pelo menos um deles é par, temos que o resultado é par. Para mostrar que o número encontrado é múltiplo de 3, basta verificar que um dos três números: n , $(n - 1)$ ou $(n + 1)$, é múltiplo de 3. Observe que:

- se o resto da divisão de $n - 1$ por 3 for 1, então $n + 1$ será múltiplo de 3;
- se o resto da divisão de $n - 1$ por 3 for 2, então n será múltiplo de 3;
- se o resto da divisão de $n - 1$ por 3 for 0, então ele mesmo será múltiplo de 3.

Em qualquer um dos casos, o resultado de Júlia, isto é, $n(n - 1)(n + 1)$, será sempre um múltiplo de 2 e de 3; portanto, um múltiplo de 6.

N3Q3 – Solução

item a)

a) As possibilidades restantes são dadas a seguir:

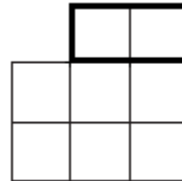


Note que não é possível ter as três peças retangulares na horizontal. Assim, ou temos duas na horizontal e uma na vertical (que pode estar à direita ou à esquerda) ou as três na vertical.

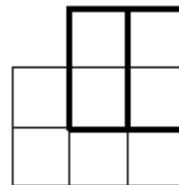
item b)

Começemos por cobrir os quadradinhos superiores. Temos duas possibilidades:

- Cobri-los com uma peça horizontal



- Cobri-los com duas peças verticais



No primeiro caso, resta um quadriculado igual ao do item a) para ser coberto; como vimos, ele pode ser coberto de 3 modos. No segundo caso, só há uma forma possível de terminar a cobertura. Logo, o número de possibilidades é $3 + 1 = 4$.

item c)

1ª solução:

Começemos cobrindo o quadrado 2×2 central. Há 3 possibilidades:

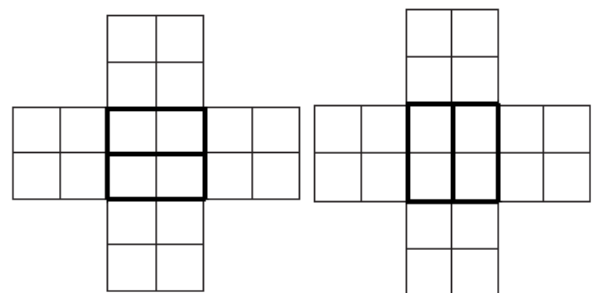
- O quadrado central é coberto de modo que as peças retangulares usadas não invadam as regiões vizinhas.

Isto ocorre quando são usadas duas peças horizontais ou duas verticais para cobrir o quadrado central (como ilustrado nas figuras ao lado).

Em ambos os casos, cada um dos outros quadrados pode ser coberto de dois modos (com peças horizontais ou verticais).

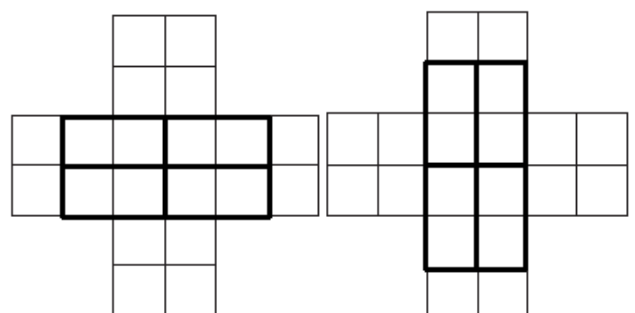
Logo, o número de coberturas deste tipo é:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$$



- O quadrado central é coberto de modo a invadir dois quadrados opostos. Isto acontece quando são usadas quatro peças horizontais ou quatro verticais para cobrir suas casas (como ilustrado nas figuras ao lado).

Neste caso, os quadrados invadidos só podem ter sua cobertura completada de 1 modo, enquanto os outros dois podem ser cobertos de 2 modos. Logo, o número de coberturas deste tipo é $2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 8$.

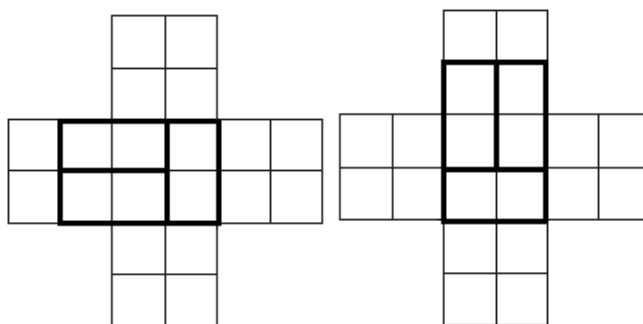


- O quadrado central é coberto de modo a invadir somente um dos outros dois quadrados. Isto ocorre quando são usadas 2 peças horizontais e 1 vertical ou duas verticais e uma horizontal (como ilustrado nas figuras ao lado).

Há quatro possibilidades para o quadrado a ser invadido. O quadrado invadido só pode ser coberto de 1 modo, e cada um dos demais, de 2 modos.

Logo, o número de coberturas deste tipo é:

$$4 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$$

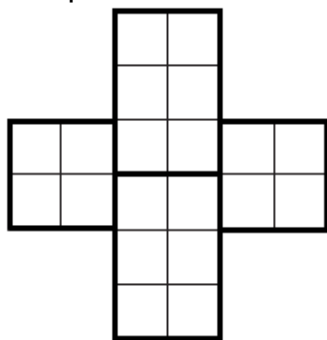


O número total de possibilidades de cobertura é, portanto, igual a $32 + 8 + 32 = 72$.

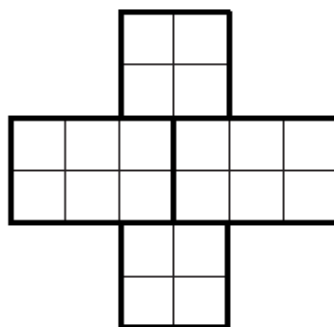
2ª solução

Olhe para o tabuleiro vazio e enxergue nele as seguintes possibilidades de dividi-lo em regiões retangulares disjuntas:

Forma de preenchimento “vertical”

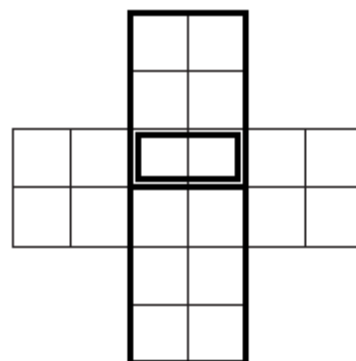


Forma de preenchimento “horizontal”



É notável que qualquer preenchimento do tabuleiro com peças retangulares siga o padrão de cobertura descrito por uma dessas duas possibilidades e, como veremos, não é possível que um mesmo recobrimento pertença simultaneamente aos dois padrões por regiões descritos acima. Assim, podemos contar separadamente cada caso e, no final, somar o número de possibilidades. Observe também que o número de preenchimentos na forma “vertical” é igual ao número de preenchimentos na forma “horizontal”.

Em outras palavras, em todas as possibilidades de preenchimento, haverá sempre exatamente uma direção (vertical ou horizontal) em que o braço da cruz nesta direção é preenchido como se fosse composto de dois retângulos 2×3 (modo horizontal) ou 3×2 (modo vertical). De fato, se isto não fosse verdade, por exemplo, para a direção horizontal, haveria uma peça horizontal cobrindo duas casas do quadrado central (representada no exemplo da figura ao lado pelo retângulo menor dentro do quadrado central da cruz). Mas, neste caso, na direção vertical o preenchimento poderia ser feito independentemente para os dois retângulos maiores 2×3 destacados na figura.



Portanto, podemos contar separadamente os preenchimentos que seguem o padrão vertical (como acima) ou horizontal. Em cada um destes casos, cada retângulo 2×3 (ou 3×2) pode ser preenchido, como visto no item a), de 3 modos, e cada quadrado, de 2 modos. Logo, há para cada forma de preenchimento (horizontal ou vertical), $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ possibilidades. Assim, o número total de preenchimentos do tabuleiro em forma de cruz é $2 \times 36 = 72$.

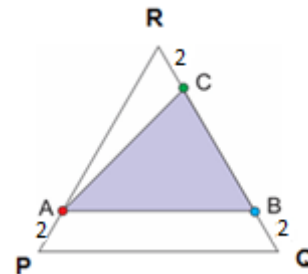
N3Q3 – Solução

Lembramos, para a resolução do problema, que a altura e a área de um triângulo equilátero cujo lado tem comprimento L são dadas, respectivamente, por:

$$H = \frac{L\sqrt{3}}{2} \text{ e } A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

item a)

Para calcular $f(2)$, denominemos P , Q e R os vértices do triângulo equilátero, conforme a figura ao lado. Para calcular $f(2)$ observamos que, quando os pontos A e B se deslocam 2 cm a partir dos vértices P e Q , respectivamente, fica determinado um novo triângulo equilátero ABR , pois os lados RA e RB medem 8 cm e o ângulo do vértice R é 60° .



A área do triângulo ABC pode ser calculada como a diferença entre as áreas dos triângulos ABR e ACR ; a área do triângulo ACR será obtida tomando o segmento RC como base para que a altura relativa a essa base coincida com a altura do triângulo equilátero ABR , a qual pode ser facilmente calculada.

Desta forma,

$$f(2) = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

item b)

Ao se deslocarem 5 cm a partir de seus pontos de origem, os pontos A e B estarão nos pontos médios dos lados PR e QR , respectivamente. Simultaneamente, o ponto C , ao se deslocar 5 cm a partir do vértice R , coincidirá com o ponto B no ponto médio de QR e, neste caso, não formarão um triângulo.

Ao se deslocarem 10 cm, os pontos A e B coincidirão com o vértice R e, novamente, A , B e C não formarão um triângulo.

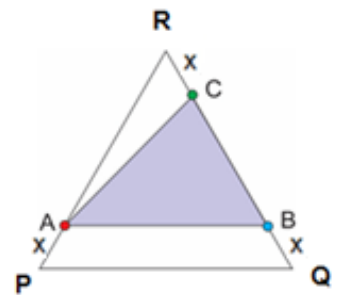
Para todos os outros valores de x , os pontos A , B e C serão não colineares, portanto, vértices de um triângulo.

Logo, os valores de x para os quais $f(x) = 0$, para $0 \leq x \leq 10$, são $x = 5$ e $x = 10$.

item c)

Vamos encontrar as expressões de $f(x)$ para $0 \leq x < 5$ e para $5 \leq x \leq 10$.

Para os valores de x entre 0 e 5, podemos tomar $PA = QB = RC = x$ (Figura ao lado) e usar a mesma estratégia do cálculo de $f(2)$; para cada valor de x , o lado do triângulo equilátero ABR terá o comprimento $10 - x$.

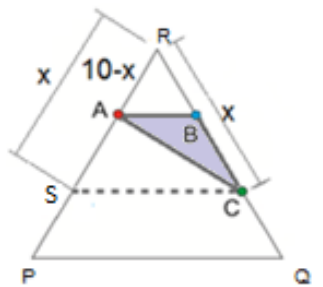


Portanto,

$$f(x) = \frac{(10-x)^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x \cdot (10-x) \sqrt{3}}{2} = \frac{(10-x)(10-2x)\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}(10-x)(5-x)}{2} \text{ cm}^2,$$

para $0 \leq x \leq 5$.

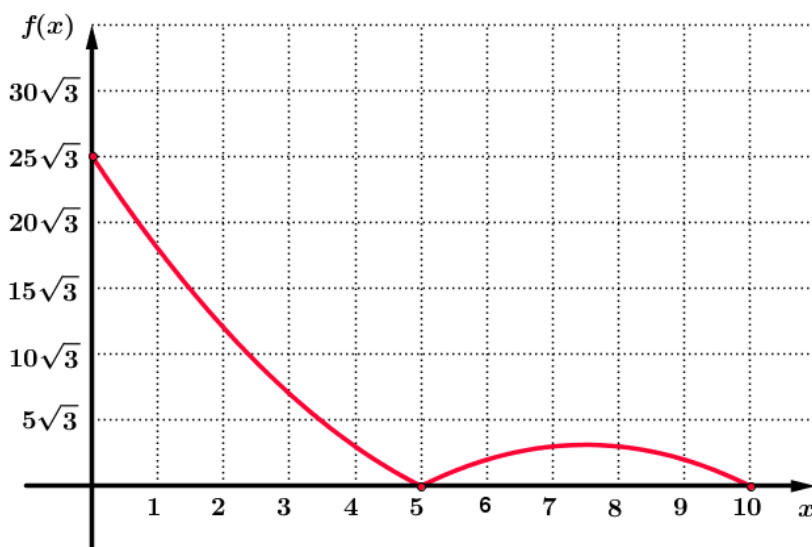
Para os valores de x entre 5 e 10, como $PA = QB = RC = x$, o lado do triângulo equilátero ABR terá comprimento $10 - x$. Escolhemos AB como base do triângulo ABC cuja área queremos calcular (figura ao lado). A medida do lado AB é, portanto, igual a $10 - x$. Traçamos uma reta paralela à reta PQ , passando por C ; ela determina sobre o lado PR o ponto S , como na figura ao lado. A altura h do triângulo ABC com relação ao lado AB é dada pela diferença das alturas dos triângulos equiláteros de lados SC e AB , ou seja,



$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{(10-x)\sqrt{3}}{2} = \frac{(2x-10)\sqrt{3}}{2} = (x-5)\sqrt{3}$$

Daí, $f(x) = \frac{\sqrt{3}(10-x)(x-5)}{2}$ para $5 \leq x \leq 10$.

Assim, a partir dos cálculos acima, o gráfico de f , para $0 \leq x \leq 10$, formado por trechos de parábolas, tem o seguinte aspecto:



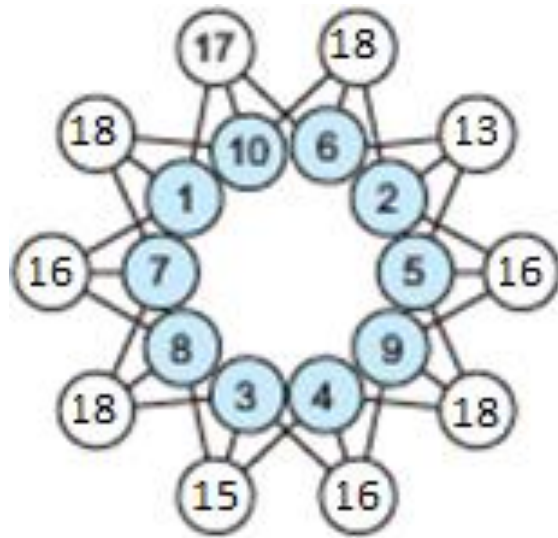
Observação: A função f pode ser escrita utilizando-se a função módulo; neste caso, sua expressão é:

$$f(x) = \left| \frac{\sqrt{3}(10-x)(x-5)}{2} \right| \text{ para } 0 \leq x \leq 10.$$

N3Q4 – Solução

item a)

O preenchimento solicitado é o seguinte:



item b)

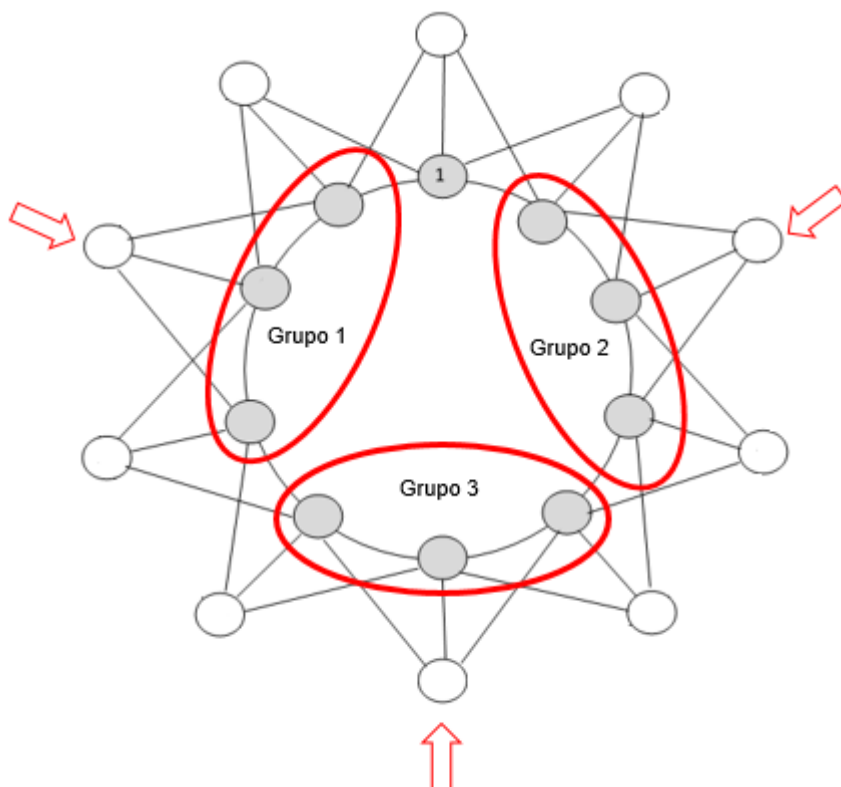
Admita, por absurdo, que todos os números nos círculos brancos sejam menores do que 17, ou seja, que sejam todos iguais ou menores do que 16. Como são 10 círculos brancos, a soma de todos os números presentes nesses círculos deve ser no máximo 160. Entretanto, pelo método de preenchimento indicado no enunciado, essa soma deve ser igual a três vezes a soma dos números que aparecem nos círculos internos em cinza, ou seja, deve ser igual a

$$3 \times (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 165$$

Como $165 > 160$, chegamos a uma contradição. Logo, não existe uma distribuição nos círculos internos de modo que nos círculos externos só apareçam números menores do que 17.

item c)

Nos círculos internos devem estar escritos todos os números de 1 a 10, e sua soma é 55. Em uma dada distribuição dos números nos círculos internos, focamos nossa atenção no círculo em que o número 1 está escrito e, retirando-o momentaneamente, vemos que os demais nove círculos internos podem ser agrupados em três grupos de três círculos vizinhos, Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3, como sugerido na figura abaixo:



Isto sempre pode ser feito, independentemente da posição ocupada pelo número 1. A soma dos números nos nove números nos círculos internos que não contêm o número 1 é, obviamente, $55 - 1 = 54$.

Vejamos agora o que ocorre com os círculos externos que estão associados a cada um dos três grupos de círculos vizinhos que marcamos anteriormente (olhe para as três casas marcadas com as setas na figura acima). A soma dos números das casas marcadas com as setas é exatamente a soma de todos os números presentes nos três grupos de círculos internos que não contêm o 1, a qual é igual a 54. Logo, sempre existirão três círculos brancos tais que a soma de seus números é 54. Os três círculos marcados com setas satisfazem essa propriedade.

Outra solução:

Dada uma distribuição qualquer dos números de 1 a 10 nos círculos azuis, denominamos x_1 o número 1 e passamos a indicar os seguintes (caminhando em qualquer um dos dois sentidos na circunferência interna onde estão os círculos azuis) por $x_2, x_3, \dots, x_{10}$. Então os agrupamentos

x_2, x_3, x_4

x_5, x_6, x_7

x_8, x_9, x_{10}

dão origem a círculos brancos nos quais aparecem as somas

$$x_2 + x_3 + x_4 = S_1$$

$$x_5 + x_6 + x_7 = S_2$$

$$x_8 + x_9 + x_{10} = S_3$$

e a soma $S_1 + S_2 + S_3$ é igual a $2 + 3 + 4 + \dots + 10 = 54$.

item d)

Suponhamos, novamente por absurdo, que exista uma distribuição de números nos círculos internos de tal modo que nos círculos externos só apareçam números estritamente menores do que 18. Omitindo-se momentaneamente o número 1 nos círculos internos e agrupando os demais círculos internos em três grupos (Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3), como fizemos no item anterior, chegaremos à conclusão de que os números nos círculos externos associados a esses grupos (marcados com as setas) devem somar, no máximo, $3 \times 17 = 51$; entretanto, vimos no item c) que esta soma deve ser igual a 54. Chegamos assim a uma contradição e, portanto, não existe uma distribuição de números nos círculos internos tal que nos círculos externos apareçam apenas números menores do que 18.

N3Q5 – Solução

item a)

Os comprimentos dos lados paralelos do trapézio da obra de arte não mudam quando projetados no plano horizontal que contém a base do cilindro (plano base).

Na Figura 1, ilustramos esse fato. As projeções dos pontos A , B , C e D no plano base são indicadas pelos pontos A' , B' , C' e D' , respectivamente. As projeções A' e B' dos vértices A e B do trapézio são determinadas pela interseção do plano base com as retas perpendiculares a ele que passam por A e B , respectivamente. De acordo com o enunciado, o segmento AB é paralelo ao segmento $A'B'$; logo $ABB'A'$ é um retângulo e, conseqüentemente, $AB = A'B' = 6$ cm. De modo similar, segue que $DCC'D'$ é um retângulo com $DC = D'C' = 24$ cm.

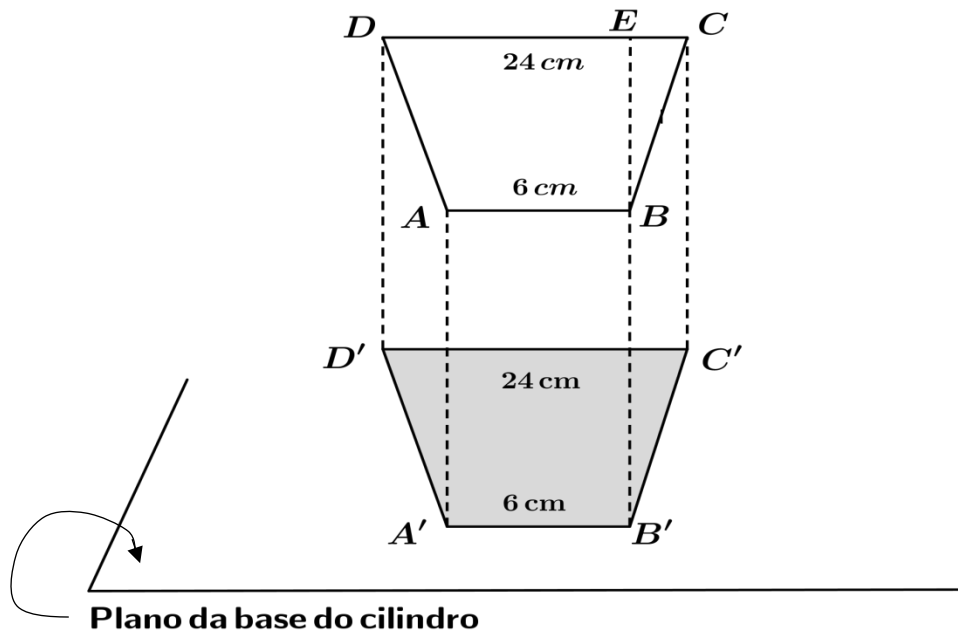


Figura 1

item b)

Para calcular os comprimentos dos lados $A'D'$ e $B'C'$ das projeções dos lados não paralelos do trapézio da obra de arte, usaremos a Figura 2. Indicamos por r o raio do tubo cilíndrico e os pontos M , N , P e Q indicam os pontos de tangência do cilindro com o trapézio $A'B'C'D'$.

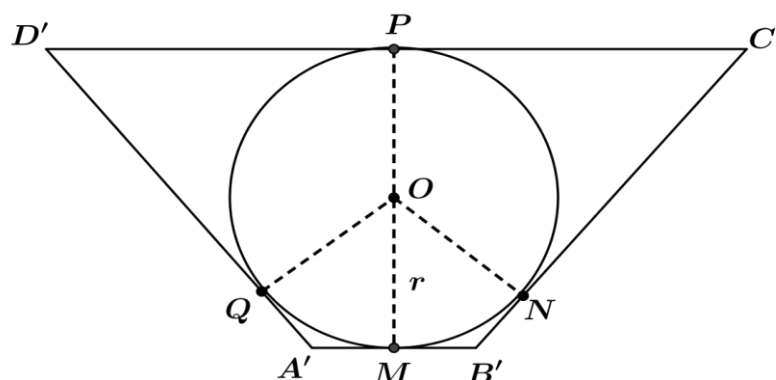


Figura 2

Notamos dois pontos importantes:

- I. O trapézio $A'B'C'D'$ é isósceles, logo, os pontos de tangência M e P são os pontos médios dos lados $A'B'$ e $C'D'$, respectivamente.
- II. $\overline{A'Q} = \overline{A'M}$, $\overline{B'M} = \overline{B'N}$, $\overline{C'N} = \overline{C'P}$ e $\overline{D'P} = \overline{D'Q}$.

A seguir, justificamos II. Como os ângulos $\angle A'QO$ e $\angle A'MO$ são retos, segue do Teorema de Pitágoras a igualdade:

$$\overline{A'Q} = \overline{A'M} = \sqrt{\overline{A'O}^2 - r^2}. \text{ As igualdades restantes seguem de forma análoga.}$$

De acordo com as afirmações em I) e II), podemos concluir que

$$\overline{A'D'} = \overline{A'Q} + \overline{QD'} = \overline{A'M} + \overline{D'P} = 3 + 12 = 15.$$

Igualmente, $\overline{B'C'} = 15$.

Obs.: Os argumentos usados neste item asseguram que, para qualquer trapézio isósceles que admitir um círculo inscrito, o comprimento de seu lado não paralelo é determinado pela média aritmética dos comprimentos de seus lados paralelos.

item c)

De acordo com a Figura 2, para determinar o diâmetro do pedaço de cano cilíndrico basta calcular a altura do trapézio isósceles $A'B'C'D'$. Na Figura 3 o segmento $B'E'$, onde E' é a projeção no plano base do ponto E da Figura 1, é perpendicular a $D'C'$, logo, eles têm a mesma medida que a altura do trapézio. O resto dos dados da figura decorre das informações obtidas nos itens a) e b).

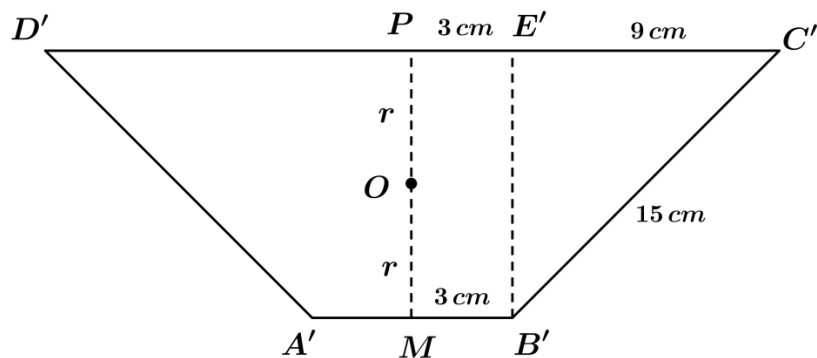


Figura 3

Portanto, segue do Teorema de Pitágoras que

$$\overline{B'E'} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{(15-9)(15+9)} = \sqrt{6 \times 24} = 12 \text{ cm.}$$

Obs.: Não colocamos diretamente a raiz quadrada de 144 na conta anterior para evidenciar outro fato elegante: para qualquer trapézio isósceles, que admitir um círculo inscrito, o comprimento de sua altura é determinado pela média geométrica dos comprimentos de seus lados paralelos.

item d)

Primeiro calcularemos a altura do trapézio da obra de arte, indicada por BE na Figura 1. O trapézio $ABCD$ se encontra situado num plano que forma 45° com o plano base. Então, cortando a obra de arte com um plano imaginário, perpendicular ao plano base e contendo o segmento $B'E'$, temos a situação representada na Figura 4 (a), que nos permite concluir que $\overline{BE} = 12\sqrt{2}$ cm.

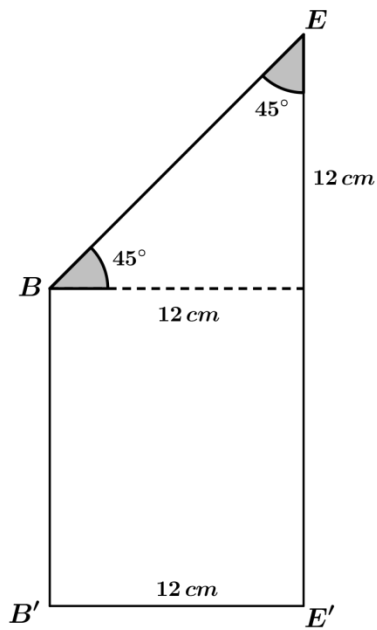


Figura 4 (a)

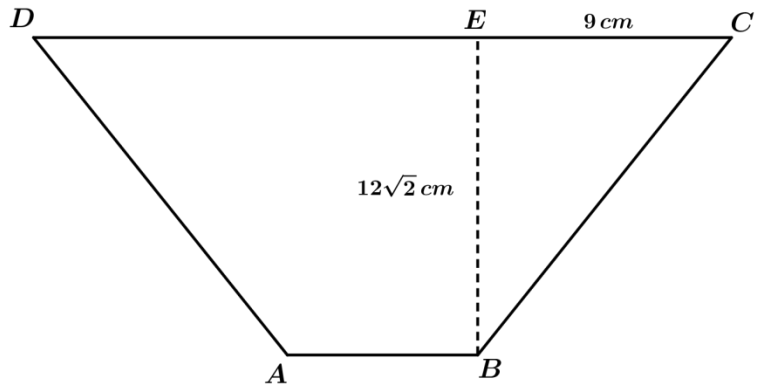


Figura 4 (b)

Finalmente, de acordo com a Figura 4 (b), concluímos que o comprimento do lado não paralelo do trapézio da obra de arte mede $\overline{BC} = \sqrt{288 + 81} = \sqrt{369} = 3\sqrt{41}\text{ cm}$. Logo, foram utilizados $24 + 6 + 3\sqrt{41} + 3\sqrt{41} = 30 + 6\sqrt{41}\text{ cm}$ de arame.

N3Q6 – Solução

Item a)

Podemos separar as bolas em três conjuntos: as que deixam resto 0, 1 ou 2, na divisão por 3. Vamos chamar esses conjuntos de A, B e C, respectivamente.

Como $2017 = 3 \times 672 + 1$, A tem 672 elementos, B tem 673 e C tem 672.

Podemos analisar o "pior cenário", isto é, procurar o número máximo de bolas em que nenhuma bola retirada possui número múltiplo de 3. Se pegarmos todas as bolas dos conjuntos B e C, um total de 1345 bolas, não teremos nenhum múltiplo de 3. A próxima bola, portanto, necessariamente será do grupo A, que é o grupo dos múltiplos de 3. Assim, se pegarmos 1346 bolas teremos de pegar uma do grupo A, necessariamente. Portanto, o mínimo de bolas que devem ser retiradas é 1346.

Item b)

Para que a soma dos números das bolas seja um múltiplo de 3, temos as seguintes possibilidades:

1. duas bolas do grupo A;
2. uma bola do grupo B e uma bola do grupo C.

Qual o número máximo de bolas que podemos pegar de tal forma que a soma de duas quaisquer não seja um múltiplo de 3? O pior cenário é: pegar uma bola do conjunto A e todas do conjunto B (que tem mais bolas que o grupo C). Então, o total é $1 + 673 = 674$. Se pegarmos 675 bolas, necessariamente a soma de duas delas será um múltiplo de 3. De fato, note que, para quaisquer 675 bolas que pegarmos, se duas estiverem no conjunto A, então elas formam um par cuja soma de seus números é igual a um múltiplo de 3. Se apenas uma estiver no conjunto A ou nenhuma das duas estiver em A, pelo menos 674 bolas estarão em $B \cup C$. Como o B tem 673 elementos, temos que ter pelo menos uma do conjunto B e uma do conjunto C e, novamente, a soma dos números nessas bolas será um múltiplo de 3.

Portanto, neste caso, a quantidade mínima de bolas é 675.

Item c)

Desta vez vamos separar as bolas em conjuntos de acordo com o resto da divisão do número delas por 6. Isso basta porque se m e n são números inteiros, como $m + n = m - n + 2n$ e $2n$ é um número par, $m - n$ e $m + n$ ou são ambos pares ou são ambos ímpares. Portanto, basta Joana buscar a quantidade mínima de bolas que devem ser retiradas para garantir que a soma dos números escritos em duas delas seja simultaneamente um múltiplo de 2 e 3, ou seja, um múltiplo de 6.

Chamemos os conjuntos dos números que deixam resto 0, 1, 2, 3, 4 e 5 na divisão por 6, respectivamente, por P, Q, R, S, T e U. Esses conjuntos têm 336, 337, 336, 336, 336 e 336 elementos, respectivamente.

Queremos saber qual é o menor número de bolas que Joana deve pegar para assegurar que a soma de duas delas seja divisível por 3 e que a sua diferença seja divisível por 2. É fácil ver que essas condições são satisfeitas apenas nos seguintes casos:

Caso 1. Duas bolas do conjunto P (resto 0 por 6),

Caso 2. Uma bola do conjunto Q (resto 1 por 6) e uma bola do conjunto U (resto 5 por 6),

Caso 3. Uma bola do conjunto R (resto 2 por 6) e uma bola do conjunto T (resto 4 por 6),

Caso 4. Duas bolas do conjunto S (resto 3 por 6).

O pior cenário é o seguinte: pegar 1 bola do conjunto P, 337 bolas do conjunto Q (este conjunto é o que possui uma maior quantidade de elementos), 336 bolas do conjunto R, e uma bola do conjunto S. Com certeza, se Joana fizer essas escolhas, pegando um total de $1 + 337 + 336 + 1 = 675$ bolas, ela não obterá duas bolas cuja soma de seus números é múltipla de 3 e a diferença múltipla de 2. Entretanto, se ela pegar uma bola a mais, certamente entre as 676 bolas aparecerão duas com números que, somados, dão um múltiplo de 3 e cuja diferença é par. De fato, selecionemos duas bolas dentre as 676 e analisemos as possibilidades:

- As duas bolas estão no conjunto P. Neste caso, os números são ambos múltiplos de 6 e as exigências do enunciado estão satisfeitas (Caso 1 descrito acima).
- As duas bolas estão no conjunto S. Neste caso, os números em ambas as bolas são múltiplos de 3 e, novamente, elas cumprem as exigências do enunciado (Caso 4 descrito acima).
- Não existem duas bolas em P, nem duas bolas em S. Neste caso, em $Q \cup R \cup U \cup T \cup U$ estão pelo menos $676 - 1 - 1 = 674$ elementos. Considerando as uniões $Q \cup U$ e $R \cup T$, pelo menos uma delas deve possuir 337 ou mais elementos, pois, caso contrário, existiriam no máximo $336 + 336 = 672$ elementos nessas duas uniões. Vamos analisar separadamente cada caso:
 - Suponha que $R \cup T$ possua 337 elementos ou mais; então, devem existir bolas escolhidas nos dois elementos da união, uma delas em R e outra em T, pois ambos os conjuntos possuem menos do que 337 elementos. Escolhendo uma bola em R e outra em T, os números escritos nelas deixam restos 2 e 4, respectivamente, quando divididos por 6. Este par satisfaz as exigências do enunciado (Caso 3 descrito acima).

- Suponha que $R \cup T$ possua menos do que 337 elementos; então $Q \cup U$ deve possuir pelo menos $674 - 336 = 338$ elementos. Deste modo, deve sempre existir um par de bolas, uma delas em Q e outra em U , pois Q e U possuem menos do que 337 elementos. Este par assim escolhido cumpre as exigências do enunciado, posto que uma bola em Q possui número que deixa resto 1 quando dividido por 6 e uma bola em U tem número que deixa resto 5, quando dividido por 6 (Caso 2 descrito acima).

Em qualquer uma das duas situações anteriores, será formado um par que satisfaz as propriedades descritas no enunciado e, portanto, o mínimo de bolas que Joana deve retirar é 676.

Outra solução:

Temos três conjuntos disjuntos de números inteiros positivos:

$$A_0 = \{x / 1 \leq x \leq 2017, x \equiv 0 \pmod{3}\}$$

$$A_1 = \{x / 1 \leq x \leq 2017, x \equiv 1 \pmod{3}\}$$

$$A_2 = \{x / 1 \leq x \leq 2017, x \equiv 2 \pmod{3}\}$$

O número de elementos de A_1 é 673, já os conjuntos A_0 e A_2 possuem 672 elementos.

Começamos com o conjunto com maior número de elementos, A_1 . Escolhemos todos os ímpares contidos em A_1 e formamos um conjunto B_1 com 337 inteiros (com certeza a soma de quaisquer dois deles não é múltiplo de 3).

Escolhemos, a seguir, todos os pares contidos em A_2 e formamos um conjunto B_2 com 336 inteiros (com certeza a soma de quaisquer dois deles não é múltiplo de 3).

A soma de um elemento de B_1 com um elemento de B_2 é múltipla de 3, porém, sua diferença não é par.

Escolhemos, agora, dois elementos de A_0 , um par e um ímpar e denotamos o conjunto formado por esses dois elementos por B_0 . Temos que a união $B_0 \cup B_1 \cup B_2$ é um conjunto em que quaisquer dois elementos x e y são tais que $x + y$ ou não é múltiplo de 3 ou $x - y$ não é par e, para qualquer outro elemento a do conjunto diferença $(A_0 \cup A_1 \cup A_2) - (B_0 \cup B_1 \cup B_2)$, existe um elemento b de $B_0 \cup B_1 \cup B_2$ tal que

$$a + b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$a - b \equiv 0 \pmod{2}$$

Portanto, a quantidade mínima de bolas que Joana deve retirar é $337 + 336 + 2 + 1 = 676$.