

Solução da prova da 1.ª Fase

QUESTÃO 1

ALTERNATIVA E

Com exceção da última coluna, subtraindo os números da segunda linha dos números da primeira, por coluna, obtemos os números cuja soma é $4 + 3 + 2 + 1 + 0 - 1 = 9$. Isto significa que, com exceção da última coluna, os números da primeira linha, quando somados, excedem os da segunda em 9. Portanto, o número na casa marcada com x deve exceder 2018 em 9, de modo a igualar as somas nas linhas. Logo, esse número é $2018 + 9 = 2027$.

Observação: Uma solução mais trabalhosa pode ser feita efetuando-se diretamente os cálculos:

$$35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 2018 = 2243 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 + x.$$

Segue que $x = 2243 - 216 = 2027$.

QUESTÃO 2

ALTERNATIVA B

$$\frac{10}{7} = \frac{7+3}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{6+1}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$$

Logo, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$ satisfazem a expressão do enunciado.

Não há outra solução além de $c = 3$. Veja uma outra maneira de resolver a questão:

De acordo com o enunciado, $a, b, c \geq 1$. Como $1 < \frac{10}{7} < 2$, segue que $a = 1$. De fato, se $a \geq 2$, deveríamos ter $\frac{1}{b+1} < 0$, o que não ocorre. Consequentemente, $\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{b+\frac{1}{c}}$. Basta encontrar b e c tais que $\frac{3}{7} = \frac{1}{b+\frac{1}{c}} = \frac{c}{bc+1}$.

A partir dessa igualdade de frações, concluímos que $7c = 3(bc + 1)$. Como 3 e 7 são números primos, segue que 3 divide c , bem como 7 divide $(bc + 1)$. Portanto, existem dois números naturais positivos m e n satisfazendo $c = 3m$ e $(bc + 1) = 7n$.

Assim, $7nc = (bc + 1)(3m) = 3(bc + 1)m = 7cm$, o que garante que $m = n$. Logo, $bc + 1 = b(3m) + 1 = 7n = 7m$ e, então, $1 = 7m - 3bm = m(7 - 3b)$. Consequentemente, $m = 1$, pois m divide 1 e é positivo. Segue que $c = 3m = 3$ e também que $b = 2$, pois $3b + 1 = 7$.

Observação: Uma fração contínua finita simples é uma expressão da forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

em que a_0 é um número inteiro e $a_1, \dots, a_n$ são inteiros positivos.

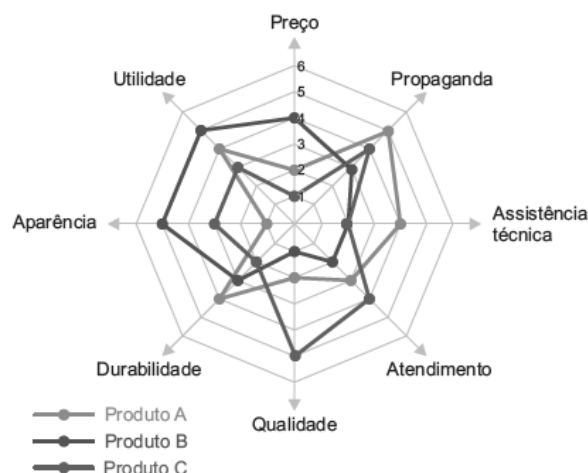
Todo número racional pode ser expresso na forma de uma fração contínua simples, e toda fração contínua simples é um número racional. A representação como fração contínua não é única. Se $a_n > 1$, há apenas duas representações possíveis, porém de “comprimentos” diferentes; por exemplo:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}$$

QUESTÃO 3 ALTERNATIVA E

Vamos analisar cada opção:

- A) **Falsa**, pois no item propaganda o produto A foi o melhor avaliado (recebeu nota 5 contra uma nota 3 do produto B).
 B) **Falsa**, pois o produto de maior utilidade foi o produto B (nota 5), mas o produto menos durável foi o produto C (nota 2).
 C) **Falsa**, pois o produto C obteve a maior pontuação apenas em 2 itens (qualidade e atendimento).
 D) **Falsa**, pois o produto C teve a melhor avaliação em qualidade (nota 5), mas foi o produto A que obteve a melhor avaliação em assistência técnica (nota 4).
 E) **Verdadeira**; de fato, o produto A obteve a maior nota em propaganda (nota 5), mas obteve a nota mais baixa em aparência (nota 1).



QUESTÃO 4 ALTERNATIVA D

Vamos calcular primeiramente o volume do objeto. Como a jarra é cilíndrica, o volume ocupado pela água é proporcional à altura. Olhando a ilustração, sem o objeto mergulhado, o volume de água na jarra é $15 \times A = 1000 \text{ cm}^3$, sendo que A é a área da base do cilindro. O volume da água mais o do objeto é $V = 18 \times A$. Logo, substituindo o valor de A nessa última equação, obtemos: $V = 18 \times (1000/15) = 1200 \text{ cm}^3$. O objeto ocupa, portanto, 200 cm^3 , o que equivale a $10,5 \times 200 = 2100 \text{ g}$.

QUESTÃO 5 ALTERNATIVA D

Primeira Solução: Não podemos usar um número ímpar de moedas de 25 centavos, mas podemos usar 0, 2, 4, ... até 80 dessas moedas, e cada escolha gera uma maneira diferente de fazer a troca. Logo, o número de maneiras de trocar R\$ 20,00 por moedas de R\$ 0,10 e R\$ 0,25 é igual à quantidade de números pares entre 0 e 80, incluindo os extremos, ou seja, é 41.

Segunda Solução:

Sejam x e y as quantidades de moedas de R\$ 0,25 e R\$ 0,10, respectivamente, usadas para formar a quantia de R\$ 20,00. Assim,

$$0,25x + 0,10y = 20.$$

Multiplicando a equação por 20, obtemos $5x + 2y = 400$. Como 400 e $2y$ são números pares, x também é um número par, e daí podemos escrever $x = 2z$. Uma vez que o valor do inteiro z tenha sido escolhido, teremos uma solução com $y = \frac{1}{2}(400 - 10z) = 200 - 5z$. Para que y seja um inteiro não negativo, $200 - 5z \geq 0$, ou seja, $z \leq 40$. Por outro lado, como $z \geq 0$, podemos concluir que existem exatamente 41 valores possíveis para ele, a saber: 0, 1, 2, ..., 40.

Terceira Solução: Pensemos no que aconteceria se usássemos moedas com valor R\$ 0,05. Precisariamos de 400 dessas moedas para formar a quantia de R\$ 20,00. Podemos trocar duas dessas moedas pela moeda de R\$ 0,10 e cinco delas pela moeda de R\$ 0,25. Para que consigamos usar apenas as duas moedas (de R\$ 0,10 e R\$ 0,25), mencionadas no enunciado, devemos realizar todas as trocas possíveis sem sobrar nenhuma moeda de R\$ 0,05. Para que isso seja realizável, a quantidade de moedas de R\$ 0,05 convertidas em R\$ 0,25, além de múltiplo de 5, também deve ser par, para que sobre uma quantidade par de moedas de R\$ 0,05 que devem estar associadas às trocas por moedas de R\$ 0,10. Os múltiplos de 5 que são pares e estão entre 0 a 400 (incluindo-os), são: 0, 10, 20, 30, ..., 400. Essa lista é composta por 41 números e corresponde aos modos de usarmos as moedas de R\$ 0,25 e R\$ 0,10 para obtermos a quantia total de R\$ 20,00.

QUESTÃO 6

ALTERNATIVA D

Considerando somente as unidades em ambos os lados da igualdade $(EU)^2 = MEU$, observamos que U^2 termina com o algarismo U. Isso só acontece com os algarismos 1, 5 ou 6. Logo, a letra U deve ser um desses algarismos. Como $31^2 = 961$ e $32^2 = 1024$, e considerando que $(EU)^2$ é igual ao número MEU de três algarismos, segue que o número EU deve ser maior do que 10 e menor do que 32. Além disso, E e U são algarismos diferentes e não nulos. Assim, as possibilidades para o número EU são: 15, 16, 21, 25, 26 e 31. Testando essas possibilidades, como feito abaixo, segue que a única correta é $25^2 = 625$.

- $15^2 = 225$
- $16^2 = 256$
- $21^2 = 441$
- $25^2 = 625$
- $26^2 = 676$
- $31^2 = 961$

Logo, MEU representa o número 625 e $M + E + U = 13$.

QUESTÃO 7

ALTERNATIVA E

Como $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = \frac{7}{12}$, então $\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+2xy} = \frac{7}{12}$. Logo, $\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2} = \frac{12}{7}$

Portanto $1 + \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{12}{7}$, de onde se conclui que $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{5}{14}$. Deste modo, $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{14}{5}$ e, finalmente, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{14}{5} = 2,8$.

QUESTÃO 8

ALTERNATIVA C

Na figura ao lado, marcamos as ordenadas dos pontos B e C. Observamos agora que $\overline{BD} = 3 - (-2) = 5$ e $\overline{CD} = 9 - 4 = 5$; segue que o triângulo BDC é isósceles. Como esse triângulo tem ângulo reto em D, segue também que seus outros dois ângulos, em particular o ângulo em B, medem 45° . O triângulo BEA tem ângulo reto em E e seu ângulo em B mede 45° ; logo, ele também é isósceles e, então, $\overline{AE} = \overline{BE} = 2$. Segue que a ordenada de A é $2 + 4 = 6$.

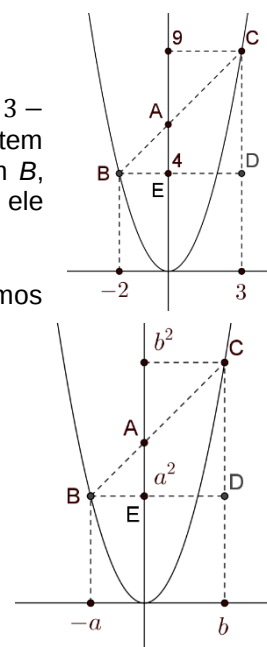
Podemos fazer a mesma pergunta para o caso geral, ilustrado à esquerda; aqui tomamos $a, b > 0$. Suponhamos que $a < b$. O argumento procede observando a semelhança dos triângulos BEA e BDC, que nos dá $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$, ou seja

$$\frac{\overline{AE}}{a} = \frac{b^2 - a^2}{b - (-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{b+a} = b - a$$

Temos então $\overline{AE} = ab - a^2$ e segue que a ordenada de A é $a^2 + ab - a^2 = ab$. O caso $a = b$ é trivial e o caso $a > b$ é análogo ao que acabamos de fazer. O resultado não muda: a ordenada do ponto A é sempre ab .

Outra solução para o caso geral, usando geometria analítica, é observar que a equação da reta BC é dada por

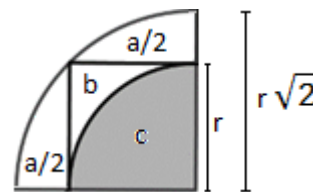
$$y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - (-a)}(x - (-a)) = (b-a)(x+a); \text{ para } x = 0 \text{ temos } y = ab.$$



QUESTÃO 9

ALTERNATIVA A

A figura ao lado é um recorte da figura do enunciado, apresentando, em destaque, os setores dos dois círculos, correspondendo a um quarto do círculo maior, e as regiões a , b e c . Observe que dividimos a região a em duas partes de mesma área, indicadas por $a/2$. Vamos denotar o raio do círculo menor por r . Segue do Teorema de Pitágoras que o raio do círculo maior é igual a $r\sqrt{2}$, conforme vemos na figura. Como os dois setores (um quarto do círculo maior e o menor em cinza da figura) são semelhantes com razão $\frac{r\sqrt{2}}{r}$, segue que a razão entre as áreas dos setores é $\frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b + c}{c} = \left(\frac{r\sqrt{2}}{r}\right)^2 = 2$. Portanto, $a + b + c = 2c$, ou seja, $c = a + b$.



QUESTÃO 10

ALTERNATIVA D

Consideramos dois casos:

- a) O motorista do primeiro carro decide estacionar em uma das vagas marcadas com os números 1 ou 10. Para cada uma dessas escolhas, o segundo motorista terá 8 opções disponíveis de estacionamento; logo, nesse caso, há um total de $2 \times 8 = 16$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros (utilizamos aqui o Princípio Multiplicativo da Contagem).
- b) O motorista do primeiro carro decide estacionar em uma das vagas marcada com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Para cada uma dessas escolhas, o segundo motorista terá 7 opções disponíveis de estacionamento; logo, nesse caso, há um total de $8 \times 7 = 56$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

De acordo com as situações anteriores, há um total de $16 + 56 = 72$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros (utilizamos aqui o Princípio Aditivo da Contagem).

QUESTÃO 11

ALTERNATIVA B

O MDC de dois números que estão fatorados como produto de primos é o produto dos primos comuns, cada um elevado ao menor expoente que comparece nas fatorações.

Denotamos por α e β os dois números cujo produto é $6000 = 2^4 \times 3 \times 5^3$. Assim, os fatores primos de α e β são 2, 3 ou 5.

O MDC de α e β será o maior possível, quando os fatores primos estiverem distribuídos de forma mais equânime possível. Em particular, o fator primo 2, que ocorre com expoente par na fatoração de 6000, deve ocorrer com o mesmo expoente nas fatorações de α e β , a saber, a metade do expoente ($4 \div 2 = 2$) que aparece na fatoração de 6000. Para o primo 5, cujo expoente é um número ímpar maior do que 2, devemos maximizar sua ocorrência nas fatorações de α e β . Para isso, subtraímos 1 de seu expoente na fatoração de 6000, ou seja, fazemos $3 - 1 = 2$, e depois tomamos a metade ($2 \div 2 = 1$). Assim, para o caso estabelecido no enunciado, a fim de maximizar o MDC entre α e β , devemos ter em suas fatorações o produto $2 \times 2 \times 5 = 20$. Uma possibilidade é $\alpha = 2 \times 2 \times 5 \times 3 = 60$ e $\beta = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 100$. Assim, o maior valor possível para o MDC entre α e β é 20.

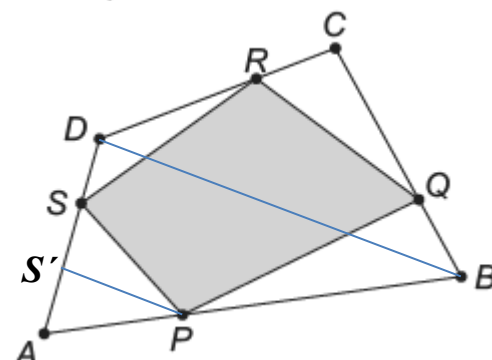
QUESTÃO 12

ALTERNATIVA B

Vamos calcular a área do quadrilátero $PQRS$ subtraindo da área do quadrilátero $ABCD$ a soma das áreas dos triângulos APS , BQP , CRQ e DSR .

Tomemos inicialmente a diagonal BD do quadrilátero, que o divide em dois triângulos ABD e CDB , como na figura ao lado. Chamemos S' o ponto médio do segmento AS ; assim, $AS' = AD/3$.

Como $AP = AB/3$ e $AS' = AD/3$, sabemos, pela recíproca do Teorema de Tales, que o segmento PS' é paralelo ao segmento BD . Consequentemente, os triângulos APS' e ABD são semelhantes, a razão de semelhança é $1/3$ e, portanto, a razão entre as áreas desses triângulos é $1/9$, ou seja,



$$\text{Área}(APS') = \frac{1}{9} \text{Área}(ABD).$$

Sabemos também que S' é o ponto médio ao segmento AS , portanto,

$$\text{Área}(APS') = \frac{1}{2} \text{Área}(APS),$$

pois os dois triângulos têm a mesma altura. Comparando as duas últimas igualdades, concluímos que

$$\text{Área}(APS) = \frac{2}{9} \text{Área}(ABD).$$

Da mesma forma, podemos verificar que

$$\text{Área}(CRQ) = \frac{2}{9} \text{Área}(CDB).$$

Somando os termos das duas últimas igualdades, temos que:

$$\text{Área}(APS) + \text{Área}(CRQ) = \frac{2}{9} [\text{Área}(ABD) + \text{Área}(CDB)] = \frac{2}{9} \text{Área}(ABCD) = \frac{2}{9}, \text{ pois } ABCD \text{ tem área } 1.$$

Da mesma forma, podemos verificar que a soma das áreas dos triângulos BPQ e DRS também é igual a $\frac{2}{9}$.

Portanto, a área do quadrilátero $PQRS$ será igual a $1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$.

QUESTÃO 13

ALTERNATIVA B

Escrever o número 360 como soma de três parcelas inteiras proporcionais a três inteiros positivos consecutivos significa escrever a equação

$$360 = k \cdot (n - 1) + k \cdot n + k \cdot (n + 1)$$

em que $(n - 1)$, n e $(n + 1)$ são os três inteiros positivos consecutivos e k é a constante de proporcionalidade. Observe que k deve ser um número inteiro não nulo para garantir que as três parcelas $k \cdot (n - 1)$, $k \cdot n$ e $k \cdot (n + 1)$ sejam inteiras e não nulas. Dividindo ambos os lados da igualdade acima por k , obtemos

$$\frac{360}{k} = (n - 1) + n + (n + 1) = 3 \cdot n \Rightarrow n = \frac{120}{k}$$

Logo, por ser um número inteiro não nulo, a constante de proporcionalidade k deve ser um divisor positivo de 120, mas não pode ser o próprio 120. Se k fosse 120, então n seria 1 e teríamos:

$$360 = 120 \cdot (1 - 1) + 120 \cdot 1 + 120 \cdot (1 + 1) = 0 + 120 + 240.$$

Nessa decomposição de 360 os fatores não são todos positivos, o que é vetado pelo enunciado. Logo,

$$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60\}$$

Portanto, é possível escrever o número 360 de 15 maneiras diferentes como a soma de três parcelas inteiras, em ordem crescente, e proporcionais a três inteiros positivos consecutivos.

Observação: o exemplo do enunciado ocorre quando $k = 30$; nesse caso, temos:

$$n = 4 \text{ e } 360 = 30 \cdot (4 - 1) + 30 \cdot 4 + 30 \cdot (4 + 1) = 90 + 120 + 150.$$

QUESTÃO 14

ALTERNATIVA C

Se quem desenhou na parede foi Emília, ela mentiu e também Vitória mentiu. Então isso não ocorreu, pois somente uma menina mentiu.

Se quem desenhou na parede foi Luísa, ela mentiu e também Rafaela mentiu. Esse caso também não pode ter ocorrido.

Se quem desenhou na parede foi Marília, somente Vitória mentiu. Isso está compatível com as exigências do enunciado.

Se quem desenhou na parede foi Rafaela, Marília e Vitória mentiram. Esse caso também não pode ter ocorrido.

Se quem desenhou foi Vitória, Luísa e Marília mentiram; isso também não deve ter acontecido.

Logo, quem desenhou na parede da sala da Vovó Vera foi Marília.

Outra solução: Analisando as respostas de Emília e Rafaela, se qualquer uma das duas mentiu, então Luísa também falou uma mentira. Como não podemos ter duas netinhas mentindo, então Emília e Rafaela falaram a verdade. Portanto, a autora do desenho na parede só pode ser uma das três meninas: Marília, Rafaela ou Vitória. Se Vitória fala a verdade, então Luísa mente; consequentemente quem desenhou não foi nem a Marília, nem a Rafaela e a autora seria Vitória, mas isso acarreta que Marília também estaria mentido. Assim, Vitória mentiu, e todas as outras falam a verdade. Quem fez o desenho não pode ser Rafaela, só pode ser Marília.

QUESTÃO 15

ALTERNATIVA A

Imaginemos uma formiguinha caminhando sobre os lados da poligonal, começando em P e dando um passeio completo pelos lados da poligonal até voltar ao ponto P. Cada vez que a formiguinha passa por uma das intersecções entre lado da poligonal e lado do quadrado, ela muda o seu estado em relação ao quadrado, ou seja, se estava dentro passa a estar fora e se estava fora passa a estar dentro.

Como a formiguinha começa dentro do quadrado e termina dentro do quadrado, então ela precisa mudar de estado um número par de vezes. Logo, o número de intersecções entre lados do quadrado e lados da poligonal é, obrigatoriamente, par, o que já elimina as alternativas B), C) e D).

Embora 4036 seja par, também não pode corresponder ao número procurado, pois, como há 2018 lados na poligonal, só poderíamos chegar ao número 4036 se todos os lados da poligonal cortassem lados do quadrado duas vezes, o que é impossível, pois os lados que partem de P necessariamente começam dentro do quadrado e não conseguem, portanto, cortar dois lados do quadrado.

Portanto, dentre as opções, a única que pode corresponder ao número de intersecções entre lados do quadrado e lados do polígono é 816.

QUESTÃO 16

ALTERNATIVA C

Na tabela a seguir **V** significa que João fala a verdade no respectivo dia da semana, e **M** significa que ele mente nesse dia.

sábado	domingo	segunda	terça	quarta	quinta	sexta	sábado	domingo
V	V	M	M	M	V	V	V	V

Consideramos duas situações, levando em conta que tipo de dia João fala a frase “Ontem eu disse a Maria que mentira hoje”.

- A frase é dita num dia X em que João fala a **verdade**. Nesse caso, no dia anterior ele teria que ter mentido e, de acordo com a tabela, o único dia possível seria o X = quinta-feira.
- A frase é dita num dia X que João **mente**. Vamos admitir que hoje ele tenha dito: “Ontem eu disse a Maria que mentira hoje”. Como ele está em um dia no qual ele só mente, esta frase deve obrigatoriamente ser falsa, assim sendo, sua negação: “Ontem eu disse a Maria que não mentira hoje” ou equivalentemente “Ontem eu disse a Maria quealaria a verdade hoje” deve ser obrigatoriamente verdadeira e, de fato, no **dia anterior ele disse a Maria quealaria a verdade hoje**. Podemos afirmar isto com certeza pois, pelo enunciado, ele emite sua opinião acerca do que vai acontecer no dia seguinte em todos os dias da semana.

Analisemos agora o que pode ter acontecido no dia anterior:

- No dia anterior João falou a verdade; nesse caso, como ele disse a Maria quealaria a verdade hoje, isso deve ser verdadeiro. Logo, hoje João deveria ter falado a verdade. Isso é uma contradição, pois estamos no caso b).
- No dia anterior João mentiu e, como afirmou que no dia seguintealaria a verdade, no dia seguinte, de fato, ele deve ter mentido. Aqui não há contradição e este caso pode ter ocorrido.

Disso podemos concluir que, se João disser a frase: “Ontem eu disse a Maria que mentira hoje” em um dia da semana em que ele mente, então, no dia anterior a esse dia ele também deveria ter mentido. Isso só é possível na terça e na quarta.

Conclusão: João só pode ter dito a frase do enunciado em três dias da semana: na terça, na quarta ou na quinta-feira, justamente os dias seguintes aos dias em que ele mentiu.

Segunda solução:

Vamos determinar em que dias da semana ele pode ter dito a frase “Ontem eu disse a Maria que mentiria hoje”. Indiquemos, como antes, por **V** um dia em que ele fala a verdade e por **M** um dia em que mente.

Para isso, analisemos dois dias consecutivos. Eles podem ser do tipo **VV**, como quinta e sexta, **VM**, como domingo e segunda, **MV**, como quarta e quinta, ou **MM**, como segunda e terça.

Par de dias **VV**

Nesse caso, no primeiro dia João diz que falará a verdade no dia seguinte, já que é um dia de contar a verdade. No dia seguinte, como ele fala a verdade, repete a afirmação do dia anterior. Portanto, a frase “Ontem eu disse a Maria que mentiria hoje” não pode ter sido dita em um dia **V** depois de um dia **V**.

Par de dias **VM**

No primeiro dia, um dia de falar a verdade, João dirá “amanhã vou mentir”, pois o dia seguinte é um dia do tipo **M**. Porém, no dia seguinte ele dirá uma mentira, portanto, dirá “ontem eu disse que iria dizer a verdade hoje”. Assim, a frase “Ontem eu disse a Maria que mentiria hoje” não pode ter sido dita em um dia **M** depois de um dia **V**.

Par de dias **MM**

No primeiro dia João dirá, “amanhã vou falar a verdade”, já que ele mente e o dia seguinte é um dia que ele também mente. No dia seguinte ele mente mais uma vez, dizendo “Ontem eu disse a Maria que mentiria hoje”. Portanto, a frase “Ontem eu disse a Maria que mentiria hoje” pode ter sido dita em um dia de mentir que segue um dia de mentir.

Par de dias **MV**

No primeiro dia João dirá uma mentira, que nesse caso é “amanhã vou mentir”, já que o dia seguinte seria um dia de dizer a verdade. No dia seguinte ele diz, portanto, “ontem eu disse que mentiria hoje”, pois fala a verdade neste dia. Assim, a frase “Ontem eu disse a Maria que mentiria hoje” pode ter sido dita em um dia em que João mente, seguido de um dia em que João diz a verdade.

Conclusão: a frase de João pode ter sido dita em qualquer dia que segue um dia em que João mente. Analisando a tabela, vemos que isso ocorre terça, quarta e quinta. Assim, João pode ter dito a frase “Ontem eu disse a Maria que mentiria hoje” apenas nesses três dias.

QUESTÃO 17

ALTERNATIVA E

Os números que Gabriel pode obter nessa brincadeira são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, já que ele nunca vai obter o número 0. Um fato interessante é que, se Gabriel parte de um número n qualquer e obtém o número 1, partindo do $n + 1$, ele irá obter o 2, partindo do $n + 2$, o 3, e assim por diante, voltando a obter o número 1 novamente a partir do $n + 9$. A tabela abaixo ilustra esse fato com os números de três algarismos.

100 → 10 → 1	109 → 19 → 10 → 1	...	991 → 181 → 91 → 10 → 1
101 → 11 → 2	110 → 20 → 2	...	992 → 182 → 92 → 11 → 2
102 → 12 → 3	111 → 21 → 3	...	993 → 183 → 93 → 12 → 3
103 → 13 → 4	112 → 22 → 4	...	994 → 184 → 94 → 13 → 4
104 → 14 → 5	113 → 23 → 5	...	995 → 185 → 95 → 14 → 5
105 → 15 → 6	114 → 24 → 6	...	996 → 186 → 96 → 15 → 6
106 → 16 → 7	115 → 25 → 7	...	997 → 187 → 97 → 16 → 7
107 → 17 → 8	116 → 26 → 8	...	998 → 188 → 98 → 17 → 8
108 → 18 → 9	117 → 27 → 9	...	999 → 189 → 99 → 18 → 9

Observe que em cada uma dessas sequências a soma dos algarismos dos números que aparecem deixa sempre o mesmo resto quando dividido por 9. O critério de divisibilidade por 9 afirma isto: por exemplo, se um número de três algarismos tem a forma abc , então ele pode ser escrito como $100a + 10b + c$, ou também como $99a + 9b + a + b + c$. Como 99 e 9 são múltiplos de 9, eles deixam resto 0 quando divididos por 9; logo, abc e $a + b + c$ têm o mesmo resto na divisão por 9.

Partindo de números com três algarismos, isto é, começando de 100 e somando o número 9 sucessivas vezes, obtemos uma progressão aritmética cujo termo geral é $100 + 9 \cdot (k - 1)$. Os números dessa progressão aritmética vão sempre terminar em 1 na brincadeira de Gabriel, sendo o último deles o número 991. Resolvendo a equação $100 + 9 \cdot (k - 1) = 991$, vamos encontrar $k = 100$, que é a quantidade de números de três algarismos a partir dos quais Gabriel pode obter o número 1.

Outra forma de se obter esse resultado é observar que entre 100 e 999 existem 900 números e com $\frac{1}{9}$ deles Gabriel obtém o número 1.

QUESTÃO 18

ALTERNATIVA A

Primeira Solução:

Suponha que não escolhamos bolas na primeira caixa; podemos escolher então 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 bolas da segunda caixa e completar o que falta para 15 com bolas da terceira caixa (6 possibilidades).

Se escolhermos só 1 bola da primeira caixa, podemos escolher de 4 a 10 bolas da segunda (7 possibilidades).

Se escolhermos exatamente 2 bolas da primeira caixa, podemos escolher de 3 a 10 bolas da segunda (8 possibilidades).

Prosseguindo dessa maneira, escolhendo 3 bolas da primeira caixa, teremos 9 possibilidades; escolhendo 4 bolas da primeira caixa, teremos 10 possibilidades; escolhendo 5 bolas da primeira caixa, teremos 11 possibilidades.

Ao escolher exatamente 6 bolas da primeira caixa, podemos escolher de 0 a 9 bolas da segunda (10 possibilidades); ao escolher 7 bolas da primeira caixa, teremos outras novas 9 possibilidades; ao escolher 8 bolas da primeira caixa, mais 8 possibilidades; ao escolher 9 bolas da primeira caixa, mais 7 possibilidades e, finalmente, ao escolher as 10 bolas da primeira caixa, 6 possibilidades (as quais correspondem às escolhas de 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 bolas da segunda caixa).

Juntando todos os casos, temos $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 91$ possibilidades de escolha.

Esse raciocínio, com outra organização, é apresentado na solução a seguir:

Segunda Solução:

Sejam x , y e z as quantidades de bolas retiradas de cada uma das três caixas. Devemos ter a seguinte equação em inteiros não negativos:

$$x + y + z = 15, \text{ com as restrições } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10 \text{ e } 0 \leq z \leq 10$$

Fixado o valor de z , devemos ter

$$x + y = 15 - z.$$

Os possíveis pares (x, y) de inteiros não negativos são: $(0, 15 - z), (1, 14 - z), (2, 13 - z), \dots, (15 - z, 0)$.

- Se $z \geq 5$, todos esses $16 - z$ pares produzem soluções admissíveis, pois satisfazem $0 \leq x \leq 10$ e $0 \leq y \leq 10$.
- Se $z < 5$, uma das outras duas variáveis deverá ser pelo menos 6 e, ao subtrairmos esse valor dela, obteremos uma solução para a equação:

$$x + y = 9 - z$$

Os possíveis pares (x, y) de inteiros não negativos são: $(0, 9 - z), (1, 8 - z), (2, 7 - z), \dots, (9 - z, 0)$. Todos esses $10 - z$ pares produzem soluções admissíveis, pois satisfazem $0 \leq x \leq 10$ e $0 \leq y \leq 10$.

Assim,

- para $z = 5, 6, 7, 8, 9$ e 10 , temos 11, 10, 9, 8, 7, 6 soluções, respectivamente.
- para $z = 0, 1, 2, 3, 4$, temos 10, 9, 8, 7, 6 soluções, respectivamente.

Portanto, o total de soluções é $(11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6) + (10 + 9 + 8 + 7 + 6) = 91$.

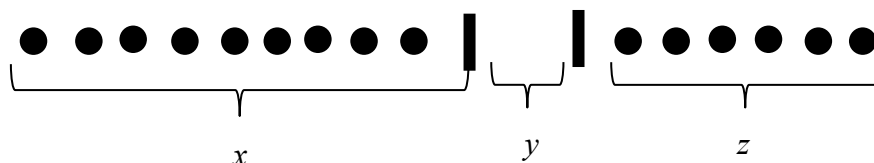
Terceira Solução: (utilizando combinações – método “barra-bola”)

Como antes, sejam x , y e z as quantidades de bolas retiradas de cada uma das três caixas. Logo, deve valer a seguinte equação em inteiros não negativos:

$$x + y + z = 15, \text{ com as restrições } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10 \text{ e } 0 \leq z \leq 10$$

Considere 15 bolas e 2 barras. Qualquer permutação desses 17 objetos pode ser associada a uma solução da equação anterior em inteiros não negativos: as bolas à esquerda da primeira barra correspondem ao x ; as bolas entre as duas barras correspondem ao y ; e as bolas à direita da segunda barra correspondem ao z .

Por exemplo, a escolha de 9 bolas da primeira caixa, nenhuma da segunda e 6 da terceira pode ser representada por:



Com 15 bolas e 2 barras, há $\frac{17!}{2!15!} = 136$ modos de separá-las. Entretanto, dentre essas soluções, é possível que uma das três variáveis assuma um valor maior que 10. Como apenas uma das três pode assumir um valor maior que 10, para eliminar as soluções indesejadas, escolhemos uma das três variáveis com valor maior que 10 e

subtraímos 11 dela. A solução então passará a satisfazer a equação em inteiros não negativos:

$$x + y + z = 4.$$

Usando agora 4 bolas e 2 barras, concluímos que a equação anterior possui $\frac{6!}{2!4!} = 15$ soluções. Portanto, o total de soluções é $136 - 3 \cdot 15 = 91$.

QUESTÃO 19

ALTERNATIVA A

Há 5 possibilidades para uma bola ser transferida para a segunda caixa. A seguir, a primeira bola da segunda caixa pode ser escolhida de 6 modos e a segunda, de 5. Há, portanto, $5 \times 6 \times 5 = 150$ casos possíveis.

Vamos contar os casos favoráveis separando-os em duas situações:

- a) A bola transferida para a segunda caixa é a de número 3.

A segunda caixa passa a contar com 6 bolas, sendo duas com o número 3, que vamos representar por 3a e 3b. A soma 6 pode ocorrer retirando duas bolas iguais a 3 (há duas possibilidades para a ordem: 3a depois de 3b ou 3b depois de 3a) ou retirando as bolas 1 e 5, em qualquer ordem (duas possibilidades) ou retirando as bolas 2 e 4 em qualquer ordem (duas possibilidades). Há, portanto, 6 casos favoráveis nesta situação.

- b) A bola transferida é uma das bolas 1, 2, 4 ou 5.

Consideremos, por exemplo, o caso em que a bola transferida é a bola 1 (a situação é a mesma com as demais). A segunda caixa tem 6 bolas, sendo duas com o número 1, que representaremos por 1a e 1b. A soma 6 pode ser formada retirando bolas 1 e 5 ou bolas 2 e 4 (note que não é possível tirar duas bolas 3). No primeiro caso, há 4 possibilidades, a saber: (1a depois de 5), (1b depois de 5), (5 depois de 1a) ou (5 depois de 1b); no segundo há 2 possibilidades (3 depois de 4) ou (4 depois de 3). Temos, então, 6 casos favoráveis quando a bola transferida é a 1. O mesmo ocorre quando a bola transferida é 2, 4 ou 5. Há, portanto, $4 \times 6 = 24$ casos favoráveis nesta situação.

Assim, o número total de casos favoráveis é $6 + 24 = 30$ e a probabilidade de se obter soma 6 é $(30/150) = (1/5)$.

Outra solução:

Vamos considerar todas as somas possíveis dos números nas bolas da segunda caixa depois de feita a transferência; entretanto, agora, não estaremos interessados na ordem em que as bolas são sorteadas (a escolha de uma bola a depois de uma bola b será considerada a mesma que o da bola b depois da a), lembrando que a soma é comutativa.

Assim, o número de casos possíveis é

$$N_{\text{possíveis}} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

O evento desejado é que as duas bolas sorteadas tenham soma 6.

Independentemente de qual foi a bola transferida, sempre haverá 3 escolhas de duas bolas favoráveis ao evento desejado. Por exemplo:

- se a bola transferida for a de número 3, teremos os pares favoráveis: {1,5}, {2,4} e {3,3};
- se a bola sorteada for a de número 1, teremos os pares favoráveis: {1,5}, outro par {1,5} e {2,4} (lembre-se: há, nesse caso, duas bolas com o número 1 na segunda caixa).

Logo, o número de casos favoráveis é

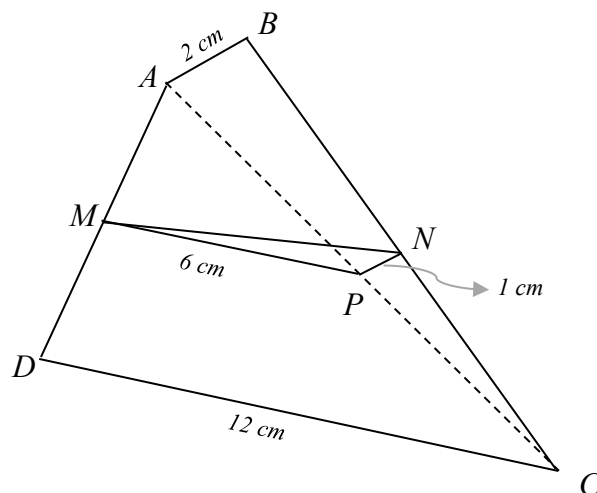
$$N_{\text{favoráveis}} = 3$$

Assim, a probabilidade pedida é $P = \frac{N_{\text{favoráveis}}}{N_{\text{possíveis}}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

QUESTÃO 20

ALTERNATIVA C

Sejam M e N os pontos médios dos lados AD e BC , respectivamente. Vamos acrescentar aos dados do problema a diagonal AC e seu ponto médio P , como na figura:



PN é base média do triângulo CAB ; logo, $PN = (AB/2) = 1$ cm e a reta PN é paralela à reta AB .

PM é base média do triângulo ACD ; logo, $PM = (CD/2) = 6$ cm e a reta PM é paralela à reta CD .

Como AB não é paralelo a CD , temos que M , P e N não estão alinhados, de modo que existe o triângulo MNP .

Da condição de existência de um triângulo, temos que $6 - 1 < MN < 6 + 1$, ou seja, $5 < MN < 7$.

Portanto, dentre as opções, a única que poderia representar a medida de MN é 6,5 cm.