

Solução da prova da 2.ª Fase

QUESTÃO 1

a) A máquina deve ser usada duas vezes. Inicialmente temos 3 maçãs; colocamos duas dessas maçãs na máquina, elas são transformadas em uma laranja. Ficamos, então, com uma maçã e uma laranja. A seguir, colocamos a maçã e a laranja na máquina e a máquina transforma-as em uma maçã.

b) Colocando um par de laranjas na máquina, obtemos uma laranja, ou seja, o número de laranjas diminui em uma unidade. Assim, podemos usar a máquina até reduzir as 4 laranjas a uma laranja apenas. Nesse ponto temos três maçãs e uma laranja. Colocando uma maçã e uma laranja ficamos com 3 maçãs. Colocando duas maçãs ficamos com uma maçã e uma laranja. Finalmente, colocando uma maçã e uma laranja, ficamos com uma maçã. Esta solução não é única, existem outras maneiras de colocar as 3 maçãs e as 4 laranjas na máquina e terminar com apenas 1 maçã.

c) Se, em um certo momento, temos M maçãs e L laranjas, denotaremos essa configuração pelo par (M, L) . O efeito de cada transformação é o seguinte:

- $(M, L) \rightarrow (M-2, L+1)$, transforma duas maçãs em uma laranja;
- $(M, L) \rightarrow (M, L-1)$, transforma duas laranjas em uma laranja;
- $(M, L) \rightarrow (M, L-1)$, transforma uma maçã e uma laranja em uma maçã.

Isso significa que, em cada transformação, o número de maçãs ou fica inalterado ou diminui em duas unidades. Em outras palavras, a máquina não altera a paridade do número de maçãs. Assim, se inicialmente temos um número ímpar de maçãs, qualquer que seja a sequência de transformações que fizermos, sempre teremos um número ímpar de maçãs. Portanto, é impossível começar com 517 maçãs e terminar com uma configuração que tenha 0 (zero) maçãs, pois 0 é par.

OBS. Se representarmos uma maçã por -1 e uma laranja por $+1$, vemos que as regras de operação da máquina são as seguintes:

- $(-1) \times (-1) = +1$
- $(+1) \times (+1) = +1$
- $(-1) \times (+1) = -1$

Ou seja, o que a máquina está fazendo em cada operação é o produto dos números que representam as frutas que colocamos. Como não importa a ordem que fazemos a multiplicação, se temos 2018 laranjas e 517 maçãs, o produto total é:

$$(+1) \times (+1) \times \dots \times (+1) \times (-1) \times (-1) \times \dots \times (-1),$$

em que há 2018 fatores $(+1)$ e 517 fatores (-1) . Esse produto é (-1) , que corresponde a uma maçã.

QUESTÃO 2

a) As páginas pares do álbum têm os números 2, 4, 6, ..., 60 num total de $60 \div 2 = 30$ páginas e as páginas ímpares têm os números 3, 5, ..., 61. Como existe uma página ímpar ao lado de cada página par, então o número de páginas ímpares também é 30. Portanto, o número total de figurinhas que devem ser coladas no álbum é

$$30 \times 5 + 30 \times 6 = 150 + 180 = 330$$

b) Para cada conjunto de duas páginas, uma par e outra ímpar, como mostrado na ilustração, são coladas $5 + 6 = 11$ figurinhas. Por exemplo, nas páginas 2 e 3, colamos 11 figurinhas, nas páginas 4 e 5 também são coladas 11 figurinhas etc. Assim, dividindo 196 por 11, podemos localizar o conjunto de duas páginas onde deve ser colada a figurinha 196 e a posição dessa figurinha nesse conjunto de páginas. O quociente da divisão de 196 por 11 é 17 e o resto é 9. Assim, a figurinha 196 está no 18º conjunto de páginas, ou seja, nas páginas 36 e 37, e na 9ª posição dentre as 11 figurinhas aí coladas. Como 5 figurinhas devem ser coladas na página par, a figurinha de número 196 deve ser colada na página ímpar, ou seja, na página 37.

c) Joãozinho comprou 330 figurinhas que foram coladas e 8 vezes 330 figurinhas que vieram repetidas. Portanto, ele comprou $9 \times 330 = 2970$ figurinhas, num total de $2970 \div 5 = 594$ pacotes. Como cada pacote custou 2 reais, foram gastos $594 \times 2 = 1188$ reais na compra das figurinhas. Como o álbum custou 20 reais, Joãozinho gastou ao todo $20 + 1188 = 1208$ reais para ter seu álbum completo.

QUESTÃO 3

a) Iniciando pela pedra A, o sapinho chega novamente na pedra A após dar 9 pulos. Continuando no sentido horário, o sapinho dará mais 6 pulos, parando na pedra G.

b) Observe que o sapinho dará 8 pulos até chegar na pedra I e muda de direção dando mais 8 pulos até chegar novamente na pedra A. Continuando desta maneira, a história se repete: a cada 16 pulos o sapinho vai sempre estar na pedra A (em oito pulos ele chega na pedra I e, pulando mais oito pulos no sentido contrário, ele retorna à pedra A).

Como $2018 \div 16 = 126$ com resto 2, após 2018 pulos, o sapinho vai parar na segunda pedra após a pedra A, ou seja, o sapinho vai parar na pedra C.

c) Observe que o sapinho dará 8 pulos até chegar na pedra I, muda de direção e dá mais 4 pulos ($8 + 4 = 12$) até chegar na pedra E onde muda de direção e dá mais 4 pulos ($12 + 4 = 16$) até chegar novamente na pedra I. Daí, o sapinho muda de direção e dá mais 8 pulos ($16 + 8 = 24$) e retorna para a pedra A, onde recomeça novamente todo o percurso, sempre retornando à pedra A após 24 pulos.

Como $810 \div 24 = 33$ com resto 18, após $24 \times 33 = 792$ pulos o sapinho estará na pedra A e faltará pular ainda mais 18 vezes. Para ver onde ele estará após esses 18 pulos, raciocinamos como antes: partindo de A, como $18 = 8 + 4 + 4 + 2$, em 8 desses pulos ele chega à pedra I, em mais 4 pulos retorna à pedra E, em mais 4 pulos volta na pedra I e, finalmente, em mais 2 pulos, vai parar na pedra G.

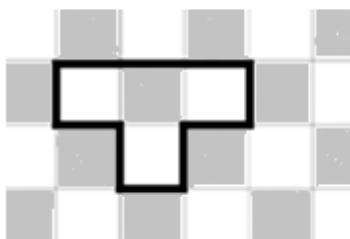


QUESTÃO 4

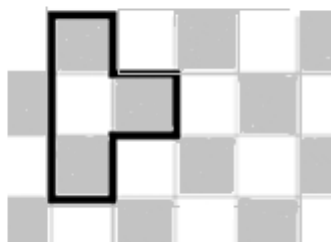
a) Há diversas maneiras de cobrir o tabuleiro usando três das sete peças. Aqui estão duas delas:



b) A única peça que não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas é a peça com o formato da letra T. As demais peças sempre cobrem duas casas brancas e duas casas cinzas.



Exemplo em que a peça em formato de “T”
cobre 3 casas brancas e 1 casa cinza



Exemplo em que a peça em formato de “T”
cobre 1 casa branca e 3 casas cinzas

c) O tabuleiro tem 28 casas, 14 brancas e 14 cinzas; assim, todas as sete peças devem ser usadas para cobri-lo.

Há somente uma peça que não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas (a peça T) e esta peça deve ser obrigatoriamente usada. Depois de colocada a peça em formato de T, independentemente de onde ela for colocada, restarão no tabuleiro 24 casas. Ocorre, então, duas possibilidades para as casas ainda não cobertas:

- 1) haverá 11 casas brancas e 13 cinzas ou
- 2) haverá 13 casas brancas e 11 cinzas.

Com as demais seis peças fica, portanto, impossível cobrir as 24 casas pois cada uma dessas peças cobre o mesmo número de casas brancas e cinzas.

Outra solução: Colocam-se primeiramente todas as seis peças à disposição, com exceção da peça em formato de “T”. Desta forma são cobertas 24 casas do tabuleiro, 12 casas brancas e 12 casas cinzas. Restam ainda 2 casas brancas e 2 casas cinzas para serem cobertas com a peça “T”. Como vimos no item b), isto é impossível.

QUESTÃO 5

a) Como $4 + 9 = 13$ e $9 - 4 = 5$, Helena multiplicará 13 e 5 dirá ao mágico o número 65.

b) O número 21 pode ser escrito como produto de dois números naturais de duas maneiras. A primeira é 1×21 , e, neste caso, não temos dois números entre 1 e 9 cuja soma seja 21. A segunda é 3×7 . Se escolhermos 3 para a soma, temos somente 1 e 2 como escolhas, e, nesse caso, a diferença é 1. Logo, 3 deverá ser a diferença dos números procurados e a soma desses números deve ser 7. Neste caso, as possibilidades para a soma 7 são as seguintes: 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4; dentre essas possibilidades, 2 e 5 correspondem à diferença 3. Portanto, Helena pensou nos números 2 e 5.

c) Pelas regras descritas pelo “matemágico”, Helena sempre deve pensar em um número par e um número ímpar. A soma ou a diferença dos dois números será, portanto, um número ímpar. O produto de dois números ímpares será um número ímpar, logo, Helena nunca dirá um número par.

d) Se Helena disser 15, as possibilidades para o produto da soma e da diferença dos números pensados serão 1×15 ou 3×5 .

Na primeira possibilidade (1×15) a soma dos números pensados deverá ser 15 e a diferença 1; para a soma ser 15, os números pensados podem ser 6 e 9 ou 7 e 8. Como $9 - 6 = 3$ e $8 - 7 = 1$, os números pensados por Helena são 7 e 8.

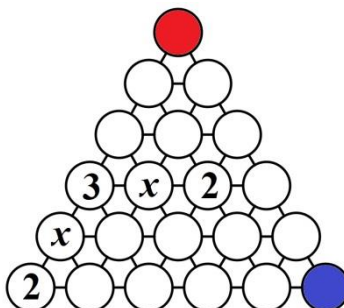
Na segunda possibilidade (3×5) a soma dos números pensados deverá ser 5 e a diferença 3, os números podem ser 2 e 3 ou 1 e 4. Neste caso, como $3 - 2 = 1$ e $4 - 1 = 3$, os números pensados por Helena são 1 e 4.

Diante das duas possibilidades de resposta (7 e 8 ou 1 e 4), o “matemágico” não terá certeza sobre os números em que Helena pensou.

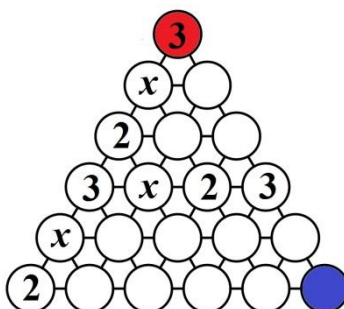
Outra solução (com rudimentos de álgebra): Sejam a e b os números pensados por Helena e suponhamos que $a > b$. O enunciado nos diz que $(a + b) \cdot (a - b) = 15$. Logo, $a^2 - b^2 = 15$, ou seja, $a^2 = 15 + b^2$. Como b é um elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, as únicas maneiras de $15 + b^2$ ser um quadrado perfeito ocorrem quando $b = 1$ ou $b = 7$. Logo, há duas possibilidades de resposta ($a = 4$ e $b = 1$ ou $a = 8$ e $b = 7$) e o “matemágico” não terá certeza sobre os números em que Helena pensou.

QUESTÃO 6

a) De acordo com o enunciado, a soma dos números escritos em três círculos alinhados e consecutivos é sempre a mesma. Assim, olhando para a figura abaixo, vemos que será escrito o mesmo número, que denotaremos por x , nos dois círculos entre os círculos em que estão escritos os números 2 e 3.

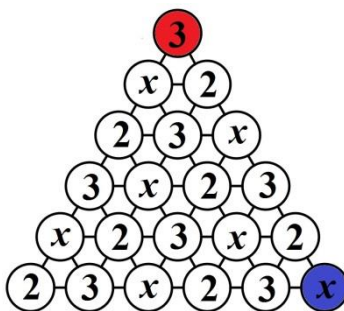


Além disso, se em dois de três círculos alinhados e consecutivos estiverem escritos os números 2, 3 ou x , sempre será possível saber o número que está escrito no terceiro círculo. Desta forma, é possível completar a escrita dos números em todos os círculos que estão alinhados com os círculos em que estão escritos 2, 3 e x , como abaixo:



Logo, deverá ser escrito o número 3 no círculo vermelho. Isto responde o item a).

b) Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, “se em dois de três círculos alinhados e consecutivos estiverem escritos os números 2, 3 ou x , sempre será possível saber o número que está escrito no terceiro círculo”, podemos completar a escrita em todos os círculos da figura, como abaixo:



Logo, ao final, serão escritos sete números 2, sete números 3 e sete números x . Assim, a soma de todos os números escritos é um múltiplo de 7.

c) No preenchimento completo que fizemos acima, vemos que no círculo azul será escrito o número x e, para que a soma de todos os números escritos seja 63, o valor de x deve ser

$$\frac{63 - 7 \times 2 - 7 \times 3}{7} = \frac{63 - 14 - 21}{7} = \frac{28}{7} = 4.$$