

Solução da prova da 2.ª Fase

QUESTÃO 1

a) As páginas pares do álbum têm os números 2, 4, 6, ..., 60 num total de $60 \div 2 = 30$ páginas e as páginas ímpares têm os números 3, 5, ..., 61. Como existe uma página ímpar ao lado de cada página par, então o número de páginas ímpares também é 30. Portanto, o número total de figurinhas que devem ser coladas no álbum é

$$30 \times 5 + 30 \times 6 = 150 + 180 = 330$$

b) Para cada conjunto de duas páginas, uma par e outra ímpar, como mostrado na ilustração, são coladas $5 + 6 = 11$ figurinhas. Por exemplo, nas páginas 2 e 3, colamos 11 figurinhas, nas páginas 4 e 5 também são coladas 11 figurinhas etc. Assim, dividindo 196 por 11, podemos localizar o conjunto de duas páginas onde deve ser colada a figurinha 196 e a posição dessa figurinha nesse conjunto de páginas. O quociente da divisão de 196 por 11 é 17 e o resto é 9. Assim, a figurinha 196 está no 18º conjunto de páginas, ou seja, nas páginas 36 e 37, e na 9ª posição dentre as 11 figurinhas aí coladas. Como 5 figurinhas devem ser coladas na página par, a figurinha de número 196 deve ser colada na página ímpar, ou seja, na página 37.

c) Joãozinho comprou 330 figurinhas que foram coladas e 8 vezes 330 figurinhas que vieram repetidas. Portanto, ele comprou $9 \times 330 = 2970$ figurinhas, num total de $2970 \div 5 = 594$ pacotes. Como cada pacote custou 2 reais, foram gastos $594 \times 2 = 1188$ reais na compra das figurinhas. Como o álbum custou 20 reais, Joãozinho gastou ao todo $20 + 1188 = 1208$ reais para ter seu álbum completo.

QUESTÃO 2

a) Para que o número 14A8 seja interessante devemos ter: $1 \times 4 \times A = 8$; logo, $A = 2$.

b) Queremos os números interessantes do tipo ABC6. Isso implica que $A \times B \times C = 6$. Temos dois casos a considerar:

- O número 6 é obtido pelo produto de 1, 2, e 3. Pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ números interessantes distintos (permutações de três elementos). É fácil encontrá-los: 1236, 1326, 2136, 2316, 3126 e 3216.
- O número 6 obtido pelo produto de 1, 1 e 6. Temos 3 números interessantes (basta escolher a posição do 6); são eles: 1166, 1616 e 6116.

Portanto, temos um total de 9 números interessantes de quatro algarismos cujo algarismo da unidade é 6.

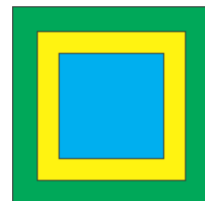
c) Neste item queremos contar quantos são os números interessantes da forma ABCD0 Para que o produto de 4 números naturais seja 0, isto é, para que $A \times B \times C \times D = 0$, pelo menos um deles deve ser 0. Podemos, assim, separar os números ABCD de acordo com o número de 0's que comparecem entre seus algarismos.

- Com apenas um 0 temos $3 \times 9 \times 9 \times 9$ escolhas possíveis, três para a posição do 0 (que não pode ser na posição A) e, além disso, as outras três posições podem ser ocupadas por quaisquer dos algarismos de 1 a 9.
- Com dois 0's temos $3 \times 9 \times 9$ possibilidades; o fator 3 aparece devido às escolhas das posições dos dois 0's; as outras duas posições restantes podem ser ocupadas por quaisquer algarismos de 1 a 9.
- Com três 0's temos 9 possibilidades.

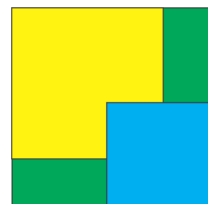
Logo, existem $3 \times 9^3 + 3 \times 9^2 + 9 = 2439$ números interessantes de 5 algarismos que terminam com o algarismo 0.

QUESTÃO 3

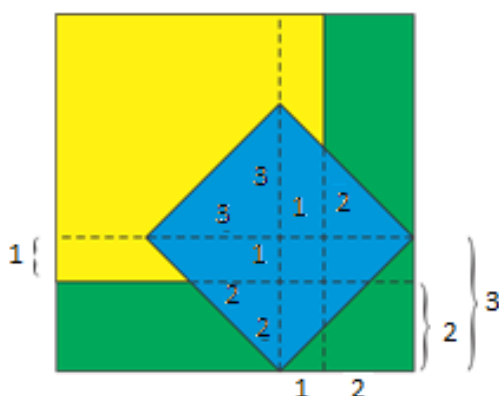
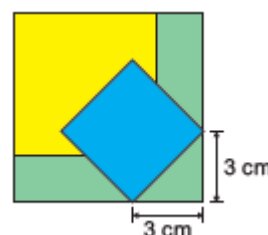
a) A folha azul tem 18 cm^2 de área. A folha amarela tem 36 cm^2 e, ao ser coberta pela folha azul, deixa visível uma região amarela, cuja área é $36 - 18 = 18 \text{ cm}^2$. A folha verde tem 64 cm^2 e, ao ser coberta pela folha amarela, deixa visível uma região verde, cuja área é $64 - 36 = 28 \text{ cm}^2$. Portanto, a região de maior área é a verde.



b) Ao ser colocada sobre a folha verde, a folha amarela esconde uma área verde igual à sua própria área. Portanto, a soma das áreas das regiões verde e amarela, sem a folha azul, é igual à área da folha verde. Quando a folha azul é colocada sobre essas duas folhas, ela esconde uma área formada pelas regiões verde e amarela igual à sua própria área. Portanto, a soma das áreas verde e amarela, não escondidas pela folha azul, é igual a $64 - 18 = 46 \text{ cm}^2$.



c) Como a folha verde tem área igual a 64 cm^2 , seus lados medem 8 cm , pois $8 \times 8 = 64$. A folha amarela tem 36 cm^2 , logo seus lados medem 6 cm , já que $6 \times 6 = 36$. Assim, na figura, vemos que a distância entre os lados inferiores (e também entre as laterais do lado direito) dessas duas folhas é $8 - 6 = 2 \text{ cm}$. Como a distância do vértice da folha azul ao vértice inferior esquerdo da folha verde é de 3 cm , a distância entre a diagonal vertical da folha azul e o lado direito da folha amarela é $3 - 2 = 1 \text{ cm}$, conforme figura abaixo.

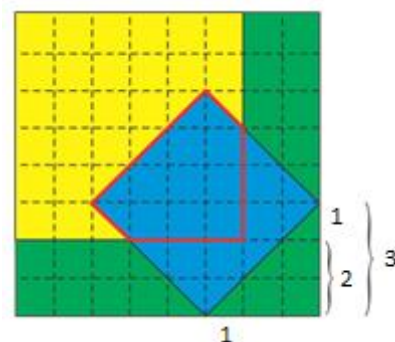


O mesmo ocorre com a diagonal horizontal da folha azul e o lado inferior da folha amarela. Assim, a parte da folha azul que cobre a folha amarela, é um pentágono que pode ser decomposto em quatro pedaços: um quadrado 1×1 , dois trapézios iguais e um triângulo retângulo. A área do triângulo retângulo com dois lados de 3 cm é igual a $4,5 \text{ cm}^2$. Os dois trapézios azuis têm áreas iguais à área do triângulo retângulo menos a área de um triângulo retângulo com lados menores de 2 cm , ou seja, $\frac{3 \times 3}{2} - \frac{2 \times 2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}^2$. A área do quadrado é

$1 \times 1 = 1 \text{ cm}^2$. Portanto, a área da parte da folha azul que cobre a folha amarela é igual a $4,5 + 2 \times 2,5 + 1 = 10,5 \text{ cm}^2$.

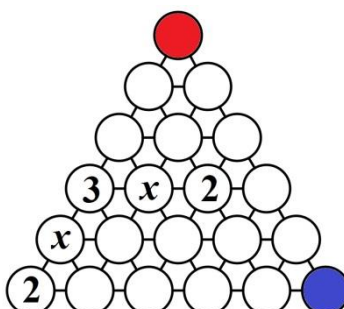
Consequentemente, a área da região amarela é igual a $36 - 10,5 = 25,5 \text{ cm}^2$.

Outra solução: Podemos quadricular a figura como feito ao lado e contar quantos quadradinho 1×1 formam a região amarela (25 quadradinhos e meio).

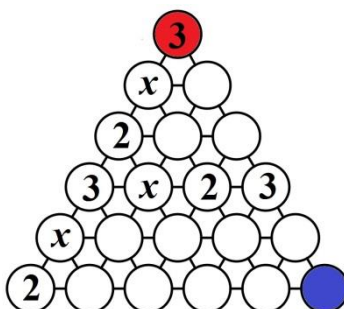


QUESTÃO 4

a) De acordo com o enunciado, a soma dos números escritos em três círculos alinhados e consecutivos é sempre a mesma. Assim, olhando para a figura abaixo, vemos que será escrito o mesmo número, que denotaremos por x , nos dois círculos entre os círculos em que estão escritos os números 2 e 3.

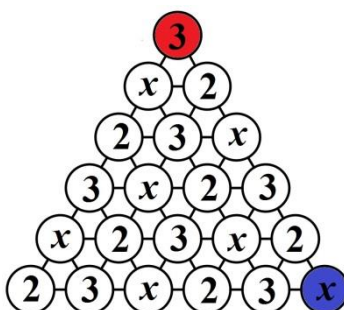


Além disso, se em dois de três círculos alinhados e consecutivos estiverem escritos os números 2, 3 ou x , sempre será possível saber o número que está escrito no terceiro círculo. Desta forma, é possível completar a escrita dos números em todos os círculos que estão alinhados com os círculos em que estão escritos 2, 3 e x , como abaixo:



Logo, deverá ser escrito o número 3 no círculo vermelho. Isto responde o item a).

b) Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, “se em dois de três círculos alinhados e consecutivos estiverem escritos os números 2, 3 ou x , sempre será possível saber o número que está escrito no terceiro círculo”, podemos completar a escrita em todos os círculos da figura, como abaixo:



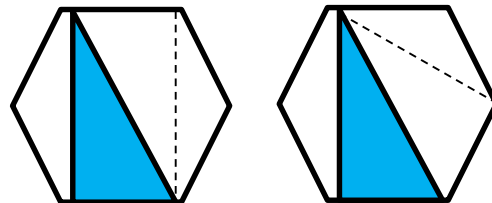
Logo, ao final, serão escritos sete números 2, sete números 3 e sete números x . Assim, a soma de todos os números escritos é um múltiplo de 7.

c) No preenchimento completo que fizemos acima, vemos que no círculo azul será escrito o número x e, para que a soma de todos os números escritos seja 63, o valor de x deve ser

$$\frac{63-7\times 2-7\times 3}{7} = \frac{63-14-21}{7} = \frac{28}{7} = 4.$$

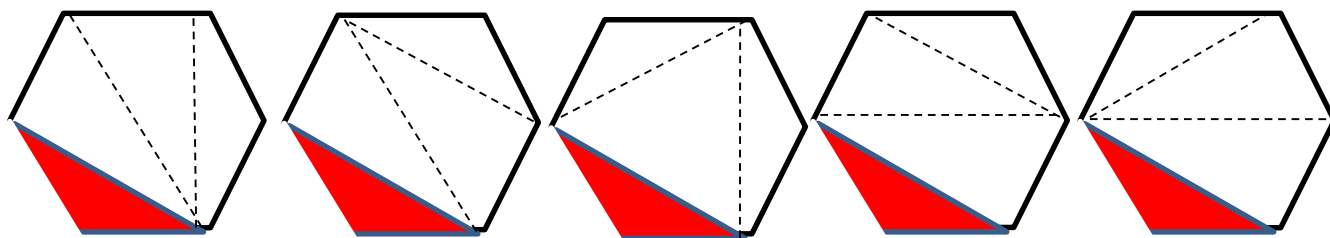
QUESTÃO 5

a) Há apenas duas triangulações do hexágono que contêm o triângulo azul; elas correspondem às duas triangulações do quadrilátero à direita desse triângulo:



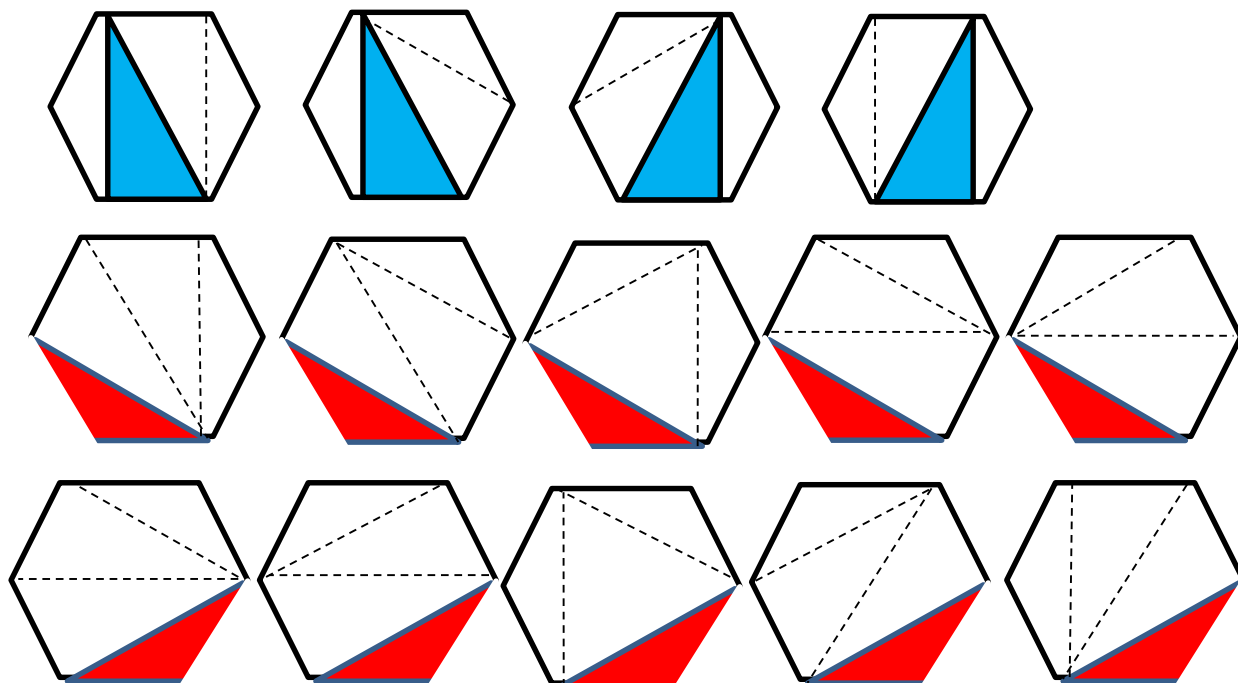
(Observe as duas triangulações de um quadrilátero presentes no enunciado)

b) Há cinco triangulações do hexágono que contêm o triângulo vermelho; elas correspondem às cinco triangulações do pentágono não pintado dentro do hexágono:



(Observe as cinco triangulações do pentágono presentes no enunciado)

c) O número total de triangulações do hexágono é 14. São as seguintes:



Essas triangulações correspondem, em cada caso, a triangular polígonos com um número menor de lados que o polígono original.

d) Raciocinando como foi feito acima, e usando um lado como base (nas figuras abaixo escolhemos o lado inferior horizontal), podemos fazer a contagem das triangulações do heptágono destacando triângulos que tenham um lado sobre esta base escolhida e vértice oposto a esta base coincidente com um dos cinco vértices superiores do heptágono. Isto permite organizar a contagem da seguinte maneira:

1. Contamos inicialmente as triangulações que contêm o triângulo destacado em vermelho:

Elas correspondem às triangulações do hexágono, que, como vimos acima, são em número de 14.



Contamos, a seguir, as triangulações que contêm o triângulo destacado em azul:

Elas correspondem às triangulações do pentágono e são em número de 5.



3. Contamos agora as triangulações que contêm o triângulo verde.

Neste caso as partes não pintadas do heptágono são dois quadriláteros e, portanto, existem $2 \times 2 = 4$ triangulações que contêm o triângulo verde.



4. Contamos agora as triangulações que contêm o triângulo amarelo.

Este caso é análogo ao caso 2. O número de triangulações que contêm esse triângulo é igual ao número de triangulações do pentágono, ou seja, 5.



5. Finalmente, consideramos o triângulo rosa.

Este caso é análogo ao caso 1 e corresponde ao número de triangulações do hexágono, que é 14.



Assim, no total temos $14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42$ triangulações diferentes para o heptágono.

O procedimento acima pode ser generalizado para contar as triangulações de qualquer polígono convexo com n lados. Ao selecionarmos um triângulo específico com vértices nos vértices do polígono, a figura original fica dividida em polígonos com um número menor de lados, o que garante que o número de triangulações pode ser obtido recursivamente. A título de curiosidade, se T_n denota o número de triangulações de um polígono com n lados, então: $T_n = T_2 T_{n-1} + T_3 T_{n-2} + \dots + T_{n-1} T_2$, $n \geq 4$, $T_2 = T_3 = 1$.

QUESTÃO 6

a) Se a face 1 fica fixada para cima, então, ao escolhermos a número da face que ficará para frente a posição do cubo fica determinada. A face que ficará na frente pode ser qualquer uma desde que não seja a de número 1, nem a face oposta à de número 1. Portanto, há quatro possibilidades do dado ser encaixado na base com a face 1 para cima.

b) Há 6 possibilidades para escolher o número que fica na base. Depois, para escolher o número da face que fica na frente há 4 possibilidades. Portanto, pelo princípio multiplicativo, há $6 \times 4 = 24$ possibilidades do dado ser encaixado na base.

c) Das 24 possibilidades encontradas no item b), só não servem as quatro em que a face 6 fica para cima. Portanto, o número de maneiras de reposicionar o cubo de modo a pelo menos um dos vértices da face 6 fique em contato com a base é $24 - 4 = 20$.

d) Suponha que inicialmente a face com o número 6 esteja em contato com a base e que o número escrito na face oposta ao 6 seja o 1. Retiramos agora o dado da base. Ao recolocá-lo na base, a fim de que nenhum número permaneça na sua posição original, há três casos a considerar:

- Existem exatamente 2 reposicionamentos em que a face 1 está em contato com a base e nenhum outro número permanece na sua mesma posição.
- Para cada um dos números do conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$, existem exatamente 3 reposicionamentos em que ele está em contato com a mesa e os demais números não estão na mesma posição.
- Como não queremos que o 6 permaneça em contato com a mesa, este caso não conta.

Logo, o total de reposicionamentos em que nenhum número permanece na sua posição original é $2 + 3 \times 4 = 14$.

Outra solução:

Vamos contabilizar em quantas das 24 possibilidades um par de faces opostas se mantém na mesma posição original. Para cada um dos 3 pares de faces opostas que se mantenham na posição original há quatro maneiras de se girar o cubo (sendo que em uma delas o cubo inteiro repete a posição original). A quantidade de reposicionamentos em que pelo menos uma face fica na posição original é igual a $3 \times 4 - 2 = 10$ (retiram-se dois casos pois a posição original foi contada 3 vezes). Portanto, a quantidade de reposicionamentos em que nenhuma face fica na posição original é igual a $24 - 10 = 14$ casos.

Para ilustrar o que ocorre, suponha que originalmente o dado estivesse encaixado como fosse o primeiro dado abaixo (o que está sendo apontado pela seta). Para facilitar, imagine que as somas dos números das faces opostas é 7, como é usual nos dados (isto não é, entretanto, essencial). Observe que há dez casos ruins, onde os números em vermelho (e os correspondentes nas faces opostas) permanecem na mesma posição que estavam antes do reposicionamento. Logo, há 14 casos em que nenhum número permanece na posição original depois do dado ser reposicionado.

