

Cole aqui a etiqueta com os dados do aluno.

Nome completo do(a) aluno(a)

Endereço completo do(a) aluno(a) (Rua, Av., nº)

Complemento (casa, apartamento, bloco)

Bairro

Cidade

UF

CEP

Endereço eletrônico (e-mail)

DDD

Telefone

Assinatura

DDD

Telefone (outro)

Visite nossas
páginas na Internet:



www.obmep.org.br



www.facebook.com/obmep

Preencha
e confira
os dados
acima com
muita atenção!

INSTRUÇÕES

- Verifique se os dados da etiqueta desta prova estão corretos. Caso as informações não estejam corretas, comunique o erro ao aplicador imediatamente.
 - Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma, colocando uma letra/dígito em cada quadradinho e deixando um espaço em branco entre cada palavra.
 - Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.
 - A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
 - A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
 - A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
 - Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.
 - Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
 - Não escreva nos espaços sombreados.
 - Não é permitido:
 - usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
 - comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
 - usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, *tablets*, relógios com calculadora, máquinas fotográficas etc.).
- O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

	1	2	3	4	5	6	Total
Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional	Correção Regional
	1	2	3	4	5	6	Total
Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional	Correção Nacional

1. Um número inteiro positivo é chamado de *interessante* quando termina com um algarismo que é igual ao produto de seus demais algarismos. Por exemplo, 326 e 1020 são interessantes, pois $3 \times 2 = 6$ e $1 \times 0 \times 2 = 0$.

a) Qual deve ser o valor do algarismo A para que o número 14A8 seja interessante?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

b) Quantos números interessantes de quatro algarismos terminam com o algarismo 6?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

c) Quantos números interessantes de cinco algarismos terminam com o algarismo 0?

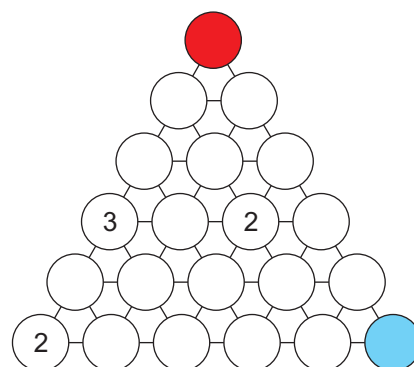
Correção
RegionalCorreção
Nacional

TOTAL

Correção
RegionalCorreção
Nacional

2. Números naturais devem ser escritos dentro de cada círculo vazio da figura, de modo que a soma dos números escritos em três círculos alinhados e consecutivos seja sempre a mesma.

a) Qual número deverá ser escrito no círculo vermelho?



Correção
Regional

Correção
Nacional

b) Mostre que a soma de todos os números escritos é um múltiplo de 7.

Correção
Regional

Correção
Nacional

c) Para que a soma de todos os números escritos seja 63, qual número deverá ser escrito no círculo azul?

Correção
Regional

Correção
Nacional

TOTAL

Correção
Regional

Correção
Nacional

3. Sérgio inventou as operações matemáticas # e @ entre números inteiros, como abaixo:

- $a \# b = a^2 + b^2$
- $a @ b = (a + b)^2$

Por exemplo, $1 \# 4 = 17$ e $1 @ (-6) = 25$. Utilizando as operações criadas por Sérgio, responda às perguntas abaixo:

a) Qual é o valor de $(2 @ 3) - (2 \# 3)$?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

b) Se $(x - 5) \# (y - 6) = 0$, qual é o valor de $x @ y$?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

c) Quantos são os pares ordenados (a, b) de números inteiros, tais que $(a @ b) - (a \# b) = 36$?

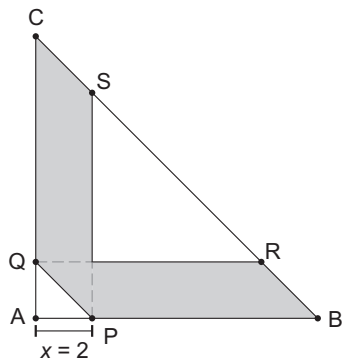
Correção
RegionalCorreção
Nacional

TOTAL

Correção
RegionalCorreção
Nacional

4. O triângulo retângulo ABC tem catetos de medidas $AB = 10$ e $AC = 10$. O ponto P sobre o lado AB está a uma distância x de A . O ponto Q sobre o lado AC é tal que PQ é paralelo a BC . Os pontos R e S sobre BC são tais que QR é paralelo a AB e PS é paralelo a AC . A união dos paralelogramos $PBRQ$ e $PSCQ$ determina uma região cinza de área $f(x)$ no interior do triângulo ABC .

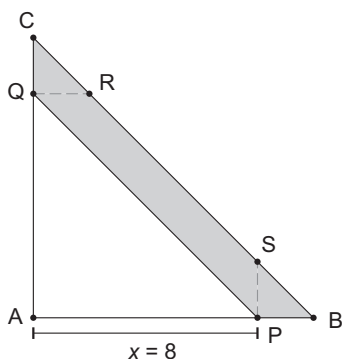
a) Calcule $f(2)$.



Correção
Regional

Correção
Nacional

b) Calcule $f(8)$.



Correção
Regional

Correção
Nacional

c) Encontre a expressão de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 10$.

Correção
Regional

Correção
Nacional

d) Para qual valor de x a área $f(x)$ é máxima?

Correção
Regional

Correção
Nacional

TOTAL

Correção
Regional

Correção
Nacional

5. Em uma caixa há 6 barbantes idênticos. Em cada etapa, duas extremidades de barbantes são escolhidas ao acaso e amarradas com um nó. O processo é repetido até que não haja mais extremidades livres.

a) Quantos nós são feitos até o final do processo?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

b) Qual é a probabilidade de que, na primeira etapa, sejam amarradas as duas pontas de um mesmo barbante?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

c) Qual é a probabilidade de que, na última etapa, sejam amarradas as duas pontas de um dos barbantes originais?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

d) Qual é a probabilidade de que, ao final do processo, os barbantes estejam todos amarrados em um único laço?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

TOTAL

Correção
RegionalCorreção
Nacional

6. Pedro deve preencher um tabuleiro retangular 9×2018 com os números do conjunto $\{1, 2, \dots, 2018\}$ usando cada número do conjunto exatamente 9 vezes. Além disso, a diferença entre dois números numa mesma coluna não pode ser maior do que 3.

a) Qual é o maior número que pode aparecer em uma coluna que contém um número 1?

Correção
Regional

Correção
Nacional

b) Determine o número máximo de colunas que podem conter números iguais a 1.

Correção
Regional

Correção
Nacional

c) Além de preencher o tabuleiro, Pedro deve escrever embaixo de cada coluna o valor da soma dos números dessa coluna. Explique por que, independentemente do preenchimento de Pedro, pelo menos uma dessas somas vai ser menor do que 25.

Correção
Regional

Correção
Nacional

TOTAL

Correção
Regional

Correção
Nacional

RASCUNHO