

Solução da prova da 1.ª Fase

QUESTÃO 1

a) Para que o número 14A8 seja interessante devemos ter: $1 \times 4 \times A = 8$; logo, $A = 2$.

b) Queremos os números interessantes do tipo ABC6. Isso implica que $A \times B \times C = 6$. Temos dois casos a considerar:

- O número 6 é obtido pelo produto de 1, 2, e 3. Pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ números interessantes distintos (permutações de três elementos). É fácil encontrá-los: 1236, 1326, 2136, 2316, 3126 e 3216.
- O número 6 obtido pelo produto de 1, 1 e 6. Temos 3 números interessantes (basta escolher a posição do 6); são eles: 1166, 1616 e 6116.

Portanto, temos um total de 9 números interessantes de quatro algarismos cujo algarismo da unidade é 6.

c) Neste item queremos contar quantos são os números interessantes da forma ABCD0. Para que o produto de 4 números naturais seja 0, isto é, para que $A \times B \times C \times D = 0$, pelo menos um deles deve ser 0. Podemos, assim, separar os números ABCD de acordo com o número de 0's que comparecem entre seus algarismos.

- Com apenas um 0 temos $3 \times 9 \times 9 \times 9$ escolhas possíveis, três para a posição do 0 (que não pode ser na posição A) e, além disso, as outras três posições podem ser ocupadas por quaisquer dos algarismos de 1 a 9.
- Com dois 0's temos $3 \times 9 \times 9$ possibilidades; o fator 3 aparece devido às escolhas das posições dos dois 0's; as outras duas posições restantes podem ser ocupadas por quaisquer algarismos de 1 a 9.
- Com três 0's temos 9 possibilidades.

Logo, existem $3 \times 9^3 + 3 \times 9^2 + 9 = 2439$ números interessantes de 5 algarismos que terminam com o algarismo 0.

2

QUESTÃO 3

a) $(2@3) - (2\#3) = (2+3)^2 - (2^2 + 3^2) = 25 - (4 + 9) = 25 - 13 = 12.$

b) Se $(x-5) \# (y-6) = 0$ então $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 0$. A soma de dois quadrados é igual a 0 se, e somente se, cada uma das parcelas da soma for igual a 0. Logo, $x = 5$ e $y = 6$. Assim,

$$x @ y = (5 + 6)^2 = 11^2 = 121.$$

c) Se $(a@b) - (a\#b) = 36$, então $(a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 36$. Logo $a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2 = 2ab = 36$. Logo $ab = 18 = 2 \cdot 3^2$. Assim, os pares ordenados com coordenadas inteiras (a,b) tais que $(a@b) - (a\#b) = 36$ são pares de divisores de 18:

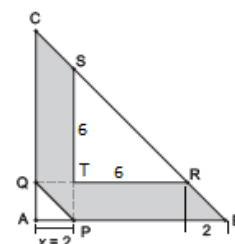
$$(1,18), (2,9), (3,6), (6,3), (9,2), (18,1), (-1,-18), (-2,-9), (-3,-6), (-6,-3), (-9,-2), (-18,-1).$$

Portanto, são 12 os pares (a,b) com coordenadas inteiras que satisfazem $(a@b) - (a\#b) = 36$.

QUESTÃO 4

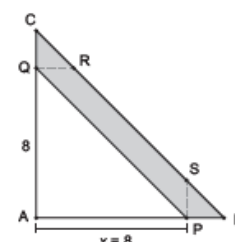
a) Denotemos por T a intersecção das retas QR e PS. Para calcular $f(2)$ basta subtrair da área do triângulo ABC as áreas dos triângulos APQ e TRS. Logo,

$$f(2) = \frac{10 \cdot 10}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{6 \cdot 6}{2} = 30.$$



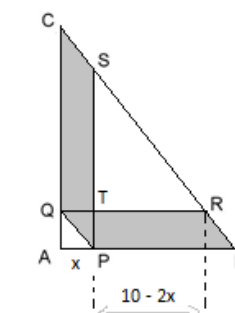
b) Para calcular $f(8)$ basta subtrair a área do triângulo APQ da área do triângulo ABC:

$$f(8) = 50 - \frac{8 \cdot 8}{2} = 18$$



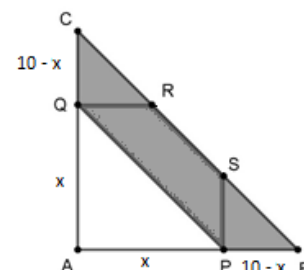
c) No caso geral, a expressão de $f(x)$ para $x \leq 5$ usa a mesma ideia que a utilizada no item a):

$$f(x) = 50 - \frac{x^2}{2} - \frac{(10 - 2x)^2}{2} = -\frac{5x^2}{2} + 20x$$



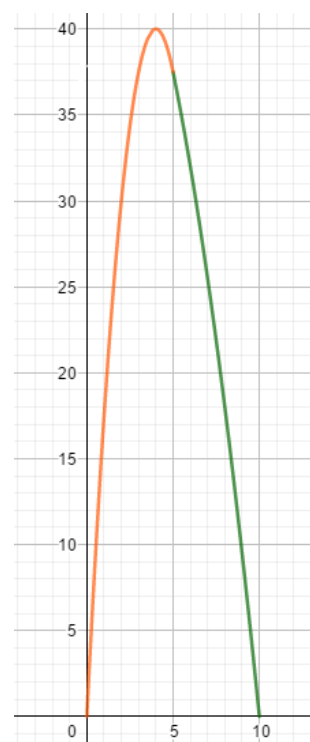
e a expressão de $f(x)$ para $x \geq 5$ usa a mesma ideia que a utilizada no item b):

$$f(x) = 50 - \frac{x^2}{2}$$



As expressões de $f(x)$ obtidas acima coincidem quando $x = 5$. O gráfico de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 10$ é a união de dois arcos de diferentes parábolas que emendam perfeitamente em $x = 5$.

O ponto de máximo de $f(x)$ ocorre quando $x = 4$, que é a abscissa do vértice do primeiro trecho de parábola que compõe a função $f(x)$. Assim, a área é máxima quando $x = 4$.



QUESTÃO 5

- a) No início do processo há 12 pontas livres. Cada vez que um nó é dado, duas dessas pontas são amarradas, reduzindo em duas unidades o número de pontas livres. Portanto, são dados exatamente seis nós.
- b) Uma vez escolhida a primeira ponta a ser amarrada, restam 11 possibilidades para a escolha da segunda ponta. Apenas uma dessas pontas faz com que seja formado um laço. Logo a probabilidade de formar um laço no primeiro nó é $1/11$.

Alternativamente, temos 12×11 modos de escolher as duas pontas a serem amarradas e 12 maneiras de fazer essa escolha de modo a formar um laço (o barbante pode ser escolhido de 6 modos e há 2 possibilidades para a ordem em que as pontas são escolhidas). Logo, a probabilidade de formar um laço é

$$\frac{12}{12 \times 11} = \frac{1}{11}.$$

- c) Escolhendo uma ponta a ser amarrada de cada vez, o número de possibilidades para a feitura dos nós é $12 \times 11 \times 10 \times \dots \times 2 \times 1$. Para calcular o número de casos favoráveis, observamos que:
- O barbante a ser amarrado no último passo pode ser escolhido de 6 modos.
 - Há 2 possibilidades para a ordem em que essas pontas são escolhidas.
 - Nos 5 nós anteriores as 10 pontas restantes podem ser escolhidas arbitrariamente; ou seja, há $10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 2 \times 1$ possibilidades de escolhas para os 5 primeiros nós.
- Logo, o número de casos favoráveis é $6 \times 2 \times 10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 2 \times 1$ e a probabilidade de que sejam amarradas as duas pontas de um dos barbantes originais é

$$\frac{6 \times 2 \times 10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 2 \times 1}{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{1}{11}$$

Outra solução: para que um barbante tenha suas pontas amarradas, é preciso que suas pontas apareçam em duas posições sucessivas, a primeira de ordem ímpar, na permutação das pontas que descreve como os nós são feitos. Como todas as permutações são igualmente prováveis, a probabilidade de que um barbante tenha suas pontas amarradas em cada um dos nós é sempre a mesma. Portanto, a resposta deste item é igual à resposta do item anterior.

- d) Uma vez mais, o número total de possibilidades para a escolha das pontas para fazer os nós é $12 \times 11 \times 10 \times \dots \times 2 \times 1$. Para calcular o número de casos favoráveis, devemos observar que é formado um único laço se e só se não é formado nenhum laço em qualquer das etapas anteriores. Assim:
- e)
- A primeira ponta do primeiro nó pode ser qualquer uma das 12 possíveis.
 - A segunda não pode ser a outra ponta do mesmo barbante; há, portanto, 10 possibilidades.
 - A primeira ponta do segundo nó pode ser qualquer uma das 10 pontas disponíveis nesta etapa.
 - A segunda não pode ser a outra ponta do mesmo barbante (não importa se o barbante é um dos originais ou o que foi formado na etapa anterior); há portanto, 8 possibilidades.
 - Repetindo o mesmo raciocínio para os demais nós, concluímos que o número de casos favoráveis é $12 \times 10 \times 10 \times 8 \times 8 \times 6 \times 6 \times 4 \times 4 \times 2 \times 2 \times 1$.

Logo, a probabilidade de que seja formado um único laço é

$$\frac{12 \times 10 \times 10 \times 8 \times 8 \times 6 \times 6 \times 4 \times 4 \times 2 \times 2 \times 1}{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} =$$

$$= \frac{10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2}{11 \times 9 \times 7 \times 5 \times 3} = \frac{256}{693}$$

(aproximadamente 37%).

Outra solução:

Como visto acima, é formado um único laço se e só se nenhum laço é formado nos cinco primeiros nós. A probabilidade de que não seja formado laço em nenhum dos cinco primeiros nós é:

$$P(\text{não laço no } 1^\circ) \times$$

$$P(\text{não laço no } 2^\circ \mid \text{não laço no } 1^\circ) \times$$

$$P(\text{não laço no } 3^\circ \mid \text{não laço no } 1^\circ \text{ e no } 2^\circ) \times$$

$$P(\text{não laço no } 4^\circ \mid \text{não laço no } 1^\circ, \text{ no } 2^\circ \text{ e no } 3^\circ) \times$$

$$P(\text{não laço no } 5^\circ \mid \text{não laço no } 1^\circ, \text{ no } 2^\circ, \text{ no } 3^\circ \text{ e no } 4^\circ).$$

A probabilidade de que não seja formado um laço no primeiro passo é $10/11$ (uma vez escolhida a primeira ponta entre as 12 disponíveis, a segunda pode ser qualquer uma das 11 restantes exceto a outra ponta do mesmo barbante).

Dado que não foi formado um laço no primeiro nó, a probabilidade condicional de não ser formado um laço no segundo nó é $8/9$ (uma vez escolhida a primeira ponta entre as 10 disponíveis, a segunda pode ser qualquer uma das 9 restantes exceto a outra ponta do mesmo barbante).

Repetindo o raciocínio para os demais nós, concluímos que as probabilidades condicionais subsequentes são iguais a $6/7$, $4/5$ e $2/3$ e a probabilidade de que nenhum laço seja formado nos primeiros cinco nós (o que é equivalente a formar um único laço no final) é:

$$\frac{10}{11} \times \frac{8}{9} \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{256}{693}$$

QUESTÃO 6

a) Como a diferença entre dois números em uma mesma coluna não pode ser maior que 3, o maior número que pode aparecer em uma coluna com o 1 é $1 + 3 = 4$.

b) As colunas que contém 1 só podem ter os números do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Como Pedro só pode usar $4 \times 9 = 36$ números (nove repetições de cada um dos números 1, 2, 3 e 4), o número de colunas que podem conter o número 1 é, no máximo, $\frac{36}{9} = 4$.

Observe que esse número pode ser atingido, por exemplo, colocando-se nas 4 primeiras colunas os seguintes conjuntos de números:

$$\begin{aligned}C_1 &= \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3\} \\C_2 &= \{1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4\} \\C_3 &= \{1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4\} \\C_4 &= \{1, 1, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4\}\end{aligned}$$

e as nove casas das demais colunas C_i , com $i > 4$, podem ser preenchidas com números todos iguais a i .

c) Seja k a quantidade de colunas com o número 1. Vamos dividir a análise em casos:

i) Se $k = 1$, todos os números 1 estão em uma mesma coluna e assim a soma dos números dela é 9. Nenhuma outra coluna pode ter soma menor. Portanto, a soma dos números dessa coluna formada por 1's apenas é menor do que 25.

ii) Se $k = 2$, uma das duas colunas terá pelo menos 5 números 1's. Mesmo que os números restantes dessa coluna sejam todos 4's, a soma dos números nessa coluna é, no máximo, igual a $5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 21$. Portanto, nesse caso também, a soma dos números dessa coluna com cinco 1's é menor do que 25.

iii) Se $k = 3$, a soma dos números nessas três colunas é no máximo $9 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 4 = 72$, pois devemos utilizar nove 1's e maximizar as casas faltantes com os maiores números permissíveis que podem acompanhar o 1, ou seja, com números 3 ou 4. Pelo menos uma das três colunas terá como soma de seus elementos um número menor do que ou igual a $72/3 = 24$. Portanto, nesse caso também, há uma coluna cuja soma é menor do que 25.

Um exemplo deste caso é o preenchimento cujas cinco primeiras colunas têm o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned}C_1 &= \{1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4\} \\C_2 &= \{1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4\} \\C_3 &= \{1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4\} \\C_4 &= \{2, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5\} \\C_5 &= \{2, 2, 5, 5, 5, 5, 5, 5\}\end{aligned}$$

e as nove casas das demais colunas C_i , com $i > 5$, podem ser preenchidas com números todos iguais a i . Isto mostra que 25 é a melhor limitação que podemos encontrar em preenchimentos gerais da tabela.

iv) Se $k = 4$, a soma dos números nessas quatro colunas é $9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 4 = 90$. Pelo menos uma delas terá como soma de seus elementos um número menor do que ou igual a $90/4 = 22,5$. Portanto, nesse último caso, há uma coluna cuja soma é menor do que 25.