

SOLUÇÕES

Questão 1

Item A

- Começando a preencher pela primeira linha, temos que a média de 2 e 14 é $\frac{16}{2} = 8$.
- Em seguida, podemos preencher a primeira coluna, cuja média é 10. Logo, os dois números vizinhos devem somar 20; portanto, 18 é o número que falta na primeira coluna.
- Passando para a diagonal que contém o 18, a média entre 14 e 18 é $\frac{32}{2} = 16$.
- A outra diagonal, assim como a segunda coluna e a segunda linha, tem média 16; logo, podemos facilmente preencher as casas restantes, pois $30 + 2 = 32$; $8 + 24 = 32$ e $10 + 22 = 32$.

2	8	14
10	16	22
18	24	30

Observe que tudo se completou corretamente.

Item B

A	7	
9		
		20

Vamos chamar de A o número que está na primeira linha e na primeira coluna, mas poderíamos ter escolhido outra casa da tabela para começar.

Assim, o número que falta na primeira linha é $14 - A$, o número que falta na primeira coluna é $18 - A$. Agora, pela diagonal que contém esse último número, temos que a casa central terá o número $16 - A$.

A	7	$14 - A$
9	$16 - A$	
$18 - A$		20

Agora, temos que $20 + A = 32 - 2A$, logo, $A = 4$.

4	7	10
9	12	
14		20

Resta preencher as duas casas restantes. Isso é bastante simples, já que $17 + 7 = 24 = 2 \times 12$ e $20 + 10 = 30 = 2 \times 15$.

4	7	10
9	12	15
14	17	20

Item C

Agora só queremos a soma das nove casas e não o preenchimento completo. A casa central deve ser preenchida com 22.

Agora observe que as casas que ainda não foram preenchidas devem somar $28 + 44 + 60 = 132$, pois $A + B = 28$; $C + D = 44$ e $E + F = 60$. Logo, as nove casas somam $132 + 14 + 22 + 30 = 198$. Observe que $198 = 3 \times (14 + 22 + 30) = 9 \times 22$.

A	C	E
14	22	30
B	D	F

Questão 2

Uma solução:

Item A

Os números inteiros nas divisões que Joãozinho fez são aqueles em que o dividendo é múltiplo do divisor, ou seja: divisões $\frac{a}{b}$ em que a é múltiplo de b . Como a e b são dois números diferentes do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, para cada possibilidade de divisor b em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, devemos contar as possibilidades de dividendo a em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, tais que a é múltiplo de b e diferente de b . Temos:

- para $b = 1$ as possibilidades para a são $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ou seja, 8 possibilidades;
- para $b = 2$ as possibilidades para a são $\{4, 6, 8\}$, ou seja, 3 possibilidades;
- para $b = 3$ as possibilidades para a são $\{6, 9\}$, ou seja, 2 possibilidades;
- para $b = 4$ a possibilidade para a é $\{8\}$, ou seja, 1 possibilidade;
- para $b = 5, 6, 7, 8, 9$ não existem possibilidades para a .

Logo, Joãozinho obteve como resultado um número inteiro em $8 + 3 + 2 + 1 = 14$ divisões.

Item B

Os números maiores do que 0,5 nas divisões que Joãozinho fez são aqueles em que o dividendo é maior do que a metade do divisor, ou seja: divisões $\frac{a}{b}$ em que a é maior do que a metade de b . Como a e b são dois números diferentes do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, para cada possibilidade de divisor b em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, devemos contar as possibilidades de dividendo a em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tais que a é diferente de b e maior do que a metade de b . Temos:

- para $b = 1$ as possibilidades para a são $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ou seja, 8 possibilidades;
- para $b = 2$ as possibilidades para a são $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ou seja, 7 possibilidades;
- para $b = 3$ as possibilidades para a são $\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ou seja, 7 possibilidades;
- para $b = 4$ as possibilidades para a são $\{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ou seja, 6 possibilidades;
- para $b = 5$ as possibilidades para a são $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, ou seja, 6 possibilidades;
- para $b = 6$ as possibilidades para a são $\{4, 5, 7, 8, 9\}$, ou seja, 5 possibilidades;
- para $b = 7$ as possibilidades para a são $\{4, 5, 6, 8, 9\}$, ou seja, 5 possibilidades;
- para $b = 8$ as possibilidades para a são $\{5, 6, 7, 9\}$, ou seja, 4 possibilidades;
- para $b = 9$ as possibilidades para a são $\{5, 6, 7, 8\}$, ou seja, 4 possibilidades.

Logo, Joãozinho obteve como resultado um número maior do que 0,5 em $8 + 7 + 7 + 6 + 6 + 5 + 5 + 4 + 4 = 52$ divisões.

Item C

Os resultados diferentes nas divisões que Joãozinho fez são aqueles em que o dividendo e o divisor não possuem fatores comuns, ou seja: divisões $\frac{a}{b}$ em que a e b são primos entre si, pois, se houver um fator comum k a a e b , então $a = k \times a'$ e $b = k \times b'$, e esse fator comum k pode ser cancelado na divisão $\frac{a}{b} = \frac{k \times a'}{k \times b'} = \frac{a'}{b'}$ e a nova divisão $\frac{a'}{b'}$ também será uma divisão feita por Joãozinho. Como a e b são dois números diferentes do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, para cada possibilidade de divisor b em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, devemos contar as possibilidades de dividendo a em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tais que a e b são primos entre si. Temos:

- para $b = 1$ as possibilidades para a são $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ou seja, 8 possibilidades;
- para $b = 2$ as possibilidades para a são $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, ou seja, 5 possibilidades;
- para $b = 3$ as possibilidades para a são $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, ou seja, 6 possibilidades;
- para $b = 4$ as possibilidades para a são $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, ou seja, 5 possibilidades;
- para $b = 5$ as possibilidades para a são $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, ou seja, 8 possibilidades;
- para $b = 6$ as possibilidades para a são $\{1, 5, 7\}$, ou seja, 3 possibilidades;
- para $b = 7$ as possibilidades para a são $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$, ou seja, 8 possibilidades;
- para $b = 8$ as possibilidades para a são $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, ou seja, 5 possibilidades;
- para $b = 9$ as possibilidades para a são $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, ou seja, 6 possibilidades.

Logo, Joãozinho obteve $8 + 5 + 6 + 5 + 8 + 3 + 8 + 5 + 6 = 54$ resultados diferentes nas suas divisões.

Outra solução:

Como Joãozinho fez todas as divisões possíveis com dois números diferentes do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, no total ele fez $9 \times 8 = 72$ divisões, conforme mostra a tabela ao lado:

Item A

Joãozinho obteve como resultado um número inteiro nas divisões em que o numerador é um múltiplo do denominador, ou seja:

- nas oito divisões em que o denominador é igual a um: $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{9}{1}$;
- em três divisões em que o denominador é igual a dois: $\frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2}$;
- em duas divisões em que o denominador é igual a três: $\frac{6}{3}, \frac{9}{3}$;

		NUMERADOR								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
D E N O M I N A D O R	1		$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{9}{1}$
	2	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$
	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$
	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$
	5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$		$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$
	6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$		$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{6}$
	7	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$		$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{7}$
	8	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$		$\frac{9}{8}$
	9	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	

- em uma divisão em que o denominador é igual a quatro: $\frac{8}{4}$.

Logo, Joãozinho obteve como resultado um número inteiro em 14 divisões.

Item B

Joãozinho obteve como resultado um número maior do que 0,5 nas divisões em que o numerador é maior do que a metade do denominador, ou seja:

- nas oito divisões em que o denominador é igual a um: $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{9}{1}$;
- em sete divisões em que o denominador é igual a dois: $\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \frac{8}{2}, \frac{9}{2}$;
- em sete divisões em que o denominador é igual a três: $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}$;
- em seis divisões em que o denominador é igual a quatro: $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}$;
- em seis divisões em que o denominador é igual a cinco: $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}$;
- em cinco divisões em que o denominador é igual a seis: $\frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}$;
- em cinco divisões em que o denominador é igual a sete: $\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}$;
- em quatro divisões em que o denominador é igual a oito: $\frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}$;
- em quatro divisões em que o denominador é igual a nove: $\frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$.

Logo, Joãozinho obteve como resultado um número maior do que 0,5 em $8 + 7 + 7 + 6 + 6 + 5 + 5 + 4 + 4 = 52$ divisões.

Item C

Para saber quantos resultados diferentes Joãozinho obteve, é preciso contar as divisões que não podem ser simplificadas, ou seja, aquelas em que o numerador e o denominador são primos entre si, ou seja:

- oito em que o denominador é igual a um: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
- cinco em que o denominador é igual a dois: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$;
- seis em que o denominador é igual a três: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}$;
- cinco em que o denominador é igual a quatro: $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}$;
- oito em que o denominador é igual a cinco: $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}$;
- três em que o denominador é igual a seis: $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}$;

- oito em que o denominador é igual a sete: $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}$;
- cinco em que o denominador é igual a oito: $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}$;
- seis em que o denominador é igual a nove: $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$.

Logo, Joãozinho obteve $8 + 5 + 6 + 5 + 8 + 3 + 8 + 5 + 6 = 54$ resultados diferentes.

Outra maneira de contar os resultados diferentes que Joãozinho obteve é retirar das 72 divisões que ele fez aquelas em que o numerador e o denominador são ambos múltiplos de 2, 3, 5 ou 7. Como os numeradores e denominadores são números diferentes do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, temos:

- numerador e denominador ambos múltiplos de 2:
 - 4 possibilidades para um (2, 4, 6 ou 8) e 3 possibilidades (a deve ser diferente de b) para outro: $4 \times 3 = 12$
- numerador e denominador ambos múltiplos de 3:
 - 3 possibilidades para um (3, 6, 9) e 2 possibilidades (a deve ser diferente de b) para outro: $3 \times 2 = 6$
- numerador e denominador ambos múltiplos de 5:
 - 1 possibilidade para um (somente o 5) e 0 possibilidade para outro: $1 \times 0 = 0$
- numerador e denominador ambos múltiplos de 7:
 - 1 possibilidade para um (somente o 7) e 0 possibilidade para outro: $1 \times 0 = 0$

Logo, Joãozinho obteve $72 - 12 - 6 = 54$ resultados diferentes. Esses 54 números aparecem em cinza na tabela anterior.

Questão 3

Item A

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 9}_{7 \text{ "noves"}} = \underbrace{1111111}_{7 \text{ "uns"}} 0 - 7 = \underbrace{111111}_{6 \text{ "uns"}} 03.$$

Item B

Usando o método de Julieta, o resultado dessa soma é

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 9}_{2021 \text{ "noves"}} = \underbrace{111 \dots 1111}_{2021 \text{ "uns"}} 0 - 2021 = \underbrace{111 \dots 1}_{2017 \text{ "uns"}} 09089.$$

Portanto, há apenas dois algarismos 0 no resultado.

Item C

Para verificar que o método de Julieta é correto, escrevemos uma soma genérica da seguinte forma:

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ "noves"}} = \underbrace{(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + (1000 \dots 0 - 1)}_{LD}.$$

Manipulando a soma do lado direito dessa expressão (indicada com LD), ou seja, usando as propriedades associativa e comutativa da soma, temos:

$$LD = 10 + 100 + 1000 + \dots + 1 \underbrace{000 \dots 0}_{n \text{ "zeros"}} - (\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ "uns"}}) = \underbrace{111 \dots 10}_{n \text{ "uns"}} - n.$$

Substituindo na igualdade anterior, obtemos: $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ "noves"}} = \underbrace{111 \dots 10}_{n \text{ "uns"}} - n$, o

que justifica o método da Julieta.

Questão 4**Item A**

Maria pode pintar de azul tanto o hexágono como o trapézio e, portanto, essa cor deve ser tratada separadamente.

Caso 1: o hexágono foi pintado de azul. Então, para não repetir a mesma no trapézio, este só pode ser pintado de preto (1 possibilidade).

Caso 2: o hexágono não foi pintado de azul (2 possibilidades). Nesse caso, Maria pode pintar o trapézio de azul ou de preto (2 possibilidades). Pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, há, então, $2 \times 2 = 4$ possibilidades de pinturas.

Juntando os dois casos, vemos que Maria pode pintar a Figura 1 de $1 + 4 = 5$ maneiras diferentes.

Item B

Novamente, façamos a divisão em casos:

Caso 1: O hexágono foi pintado de azul por Maria. Logo, todos os três trapézios devem ser pintados de preto (1 possibilidade).

Caso 2: O hexágono não foi pintado de azul (2 possibilidades). Nesse caso, cada um dos três trapézios da Figura 2 podem ser pintados de azul ou preto. Pelo princípio multiplicativo, há $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possibilidades de pinturas.

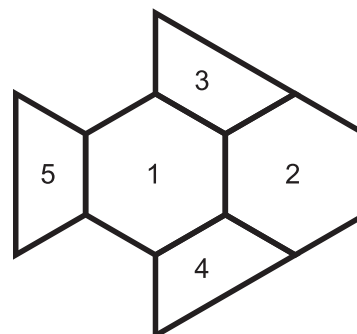
Juntando os dois casos, vemos que Maria pode pintar a Figura 2 de $1 + 16 = 17$ maneiras diferentes.

Item C

Vamos enumerar as regiões de acordo com a figura ao lado:

Vamos dividir em 6 casos:

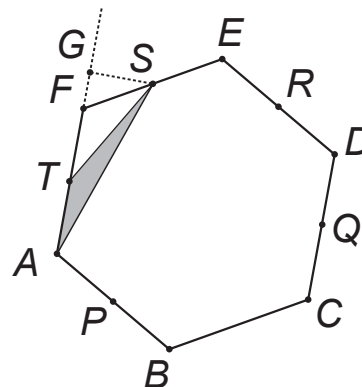
- Hexágono 1 na cor azul, hexágono 2 na cor bege. Nesse caso, os trapézios 3, 4 e 5 devem ser pintados de preto (1 possibilidade).
- Hexágono 1 na cor azul, hexágono 2 na cor cinza. Nesse caso, também os trapézios 3, 4 e 5 devem ser pintados de preto (1 possibilidade).
- Hexágono 1 na cor bege, hexágono 2 na cor azul. Nesse caso, os trapézios 3 e 4 devem ser pintados de preto, mas o trapézio 5 pode ser pintado de azul ou preto (2 possibilidades)
- Hexágono 1 na cor bege, hexágono 2 na cor cinza. Cada trapézio pode ser pintado de duas cores ($2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades)
- Hexágono 1 na cor cinza, hexágono 2 na cor azul. Nesse caso, os trapézios 3 e 4 devem ser pintados de preto, e o trapézio 5 pode ser pintado de duas cores (2 possibilidades).
- Hexágono 1 na cor cinza, hexágono 2 na cor bege. Cada trapézio pode ser pintado de duas cores ($2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades).



Logo, há $1 + 1 + 2 + 8 + 2 + 8 = 22$ maneiras diferentes de Maria pintar a Figura 3.

Questão 5**Item A**

Os triângulos AST e FTS têm a mesma área e, portanto, a área de FTS é igual a 1 cm^2 . De fato, o segmento GS , na figura, é perpendicular à reta que contém os lados AT e TF dos triângulos AST e FTS e é a altura comum desses triângulos relativa a esses lados. Como T é ponto médio de AT , os triângulos AST e FTS têm a mesma área.

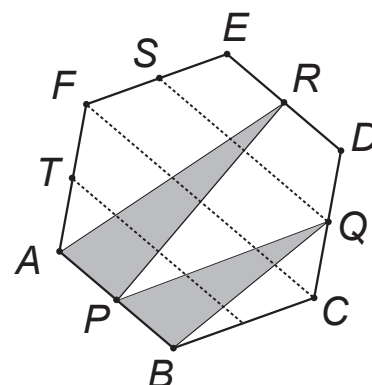
**Item B**

A razão entre as áreas dos triângulos APR e PBQ é $\frac{4}{3}$.

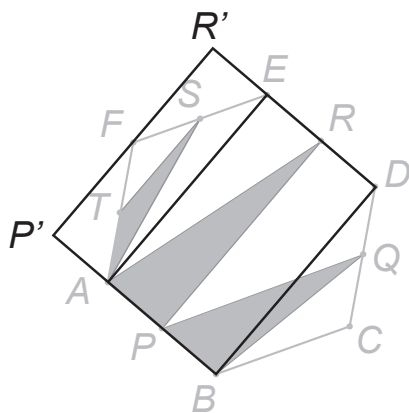
De fato, os lados AP e PB dos triângulos APR e PBQ , respectivamente, são colineares e têm a mesma medida. Os segmentos paralelos a eles, pelos pontos médios T , S e

pelo vértice F do hexágono, como indicado na figura ao lado, dividem as alturas dos triângulos APR e PBQ na razão $\frac{4}{3}$, pois esses segmentos paralelos a AB e ED , recém-traçados são equidistantes.

Como as bases têm a mesma medida, a razão entre as áreas coincide com a razão entre as alturas e é igual a $\frac{4}{3}$.



Item C



Para calcular a razão entre as áreas sombreada e não sombreada, façamos o seguinte: tracemos os segmentos AE e $P'R'$, paralelos à diagonal BD do hexágono $ABCDEF$, sendo P' e R' determinados pela intersecção da reta paralela a BD passando pelo vértice F com os prolongamentos dos lados BA e DE , respectivamente, conforme a figura à esquerda.

Esses segmentos determinam um paralelogramo $BDR'P'$, que é um retângulo (os ângulos ABD e BDE são retos).

Além disso, como o triângulo BCD tem a mesma área que a reunião dos triângulos AFP' e $ER'F$, por congruência, o retângulo $BDR'P'$ tem a mesma área que o hexágono original, que denotaremos por H .

Podemos comparar a área de cada um dos triângulos sombreados com a área H do hexágono.

- A área do triângulo APR é a metade da área do retângulo $APRE$, que, por sua vez, é igual a $\frac{H}{3}$. Daí, a área desse triângulo é igual a $\frac{H}{6}$.
- A área do triângulo PBQ é $\frac{3}{4}$ da área do triângulo APR , conforme visto no item b) e, portanto, sua área será $\frac{H}{8}$.
- A área do triângulo AST é metade da área do triângulo ASF — vide item a) —, que, por sua vez, é igual a $\frac{1}{4}$ da área do retângulo $P'AER'$, portanto, sua área será $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{H}{3} = \frac{H}{24}$.

Temos, portanto, que a área sombreada é $\frac{H}{6} + \frac{H}{8} + \frac{H}{24} = \frac{H}{3}$, e, conseqüentemente, a área não sombreada é igual a $\frac{2H}{3}$.

Conclusão: a razão entre as áreas sombreada e não sombreada é igual a $\frac{1}{2}$.

Questão 6

Item A

No primeiro pulo, Kiko tem duas opções: ele pode ir de A para B ou para D. No segundo pulo, Kiko tem três opções, tanto partindo de B quanto partindo de D. Note que, após esse segundo pulo, Kiko estará, necessariamente, em A, E ou C. No pulo final, de qualquer uma dessas pedras, ele tem apenas uma opção para ir para B. Assim, pelo princípio multiplicativo, Kiko pode realizar $2 \times 3 \times 1 = 6$ passeios distintos, começando em A e terminando em B.

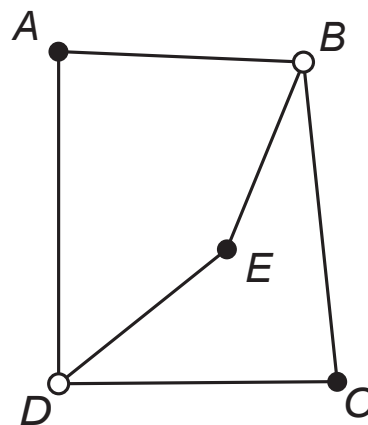
Podemos listar os passeios, explicitamente, também: $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B$, $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow B$, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B$, $A \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B$, $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B$, $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$.

Item B

Analisando-se alguns casos com poucos pulos, como no item anterior, emerge um padrão: em um passeio qualquer, logo após os pulos de número ímpar (primeiro, terceiro, quinto e assim por diante), Kiko estará em B ou D, e, logo após os pulos de número par (segundo, quarto, sexto e assim por diante), Kiko estará em A, E ou C.

Isso pode ser entendido da seguinte maneira: se pintarmos as pedras B e D de branco e as pedras A, E e C de preto, vemos que de uma pedra branca ele pula para uma preta, e de uma pedra preta ele pula para uma branca.

A figura ao lado ilustra essa ideia.



Isso indica que, após o 1001º pulo, Kiko irá se encontrar, necessariamente, em B ou D. Note que o argumento não basta para mostrar que, de fato, ele pode terminar tanto em B quanto em D. Para isso, devemos mostrar que é possível, após o 1001º pulo, terminar em qualquer uma das duas pedras.

Uma maneira de mostrar que as duas pedras são finais possíveis para o passeio de Kiko é exibir, explicitamente, passeios que terminam em B ou em D depois de 1001 pulos. Um passeio assim pode ser feito da seguinte maneira: simplesmente Kiko pula de A para B e de B para A até completar 1000 pulos. Após o milésimo pulo ele estará em A. De A ele pode dar mais um pulo, tanto para B quanto para D.

Item C

Como discutido no item anterior, Kiko tem duas opções para o primeiro pulo (B ou D), 3 opções para o segundo pulo (A, C ou E), e assim por diante, até o 2019º pulo, quando tem duas opções. No 2020º pulo, Kiko tem apenas uma opção, que é pular para C. Assim, pelo princípio multiplicativo, Kiko pode realizar $2 \times 3 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2 \times 1 = 2^{1010} \times 3^{1009}$ passeios.