

SOLUÇÕES

Questão 1

Item A

- Começando a preencher pela primeira linha, temos que a média de 2 e 14 é $\frac{16}{2} = 8$.
- Em seguida, podemos preencher a primeira coluna, cuja média é 10. Logo, os dois números vizinhos devem somar 20; portanto, 18 é o número que falta na primeira coluna.
- Passando para a diagonal que contém o 18, a média entre 14 e 18 é $\frac{32}{2} = 16$.
- A outra diagonal, assim como a segunda coluna e a segunda linha, tem média 16; logo, podemos facilmente preencher as casas restantes, pois $30 + 2 = 32$; $8 + 24 = 32$ e $10 + 22 = 32$.

2	8	14
10	16	22
18	24	30

Observe que tudo se completou corretamente.

Item B

A	7	
9		
		20

Vamos chamar de A o número que está na primeira linha e na primeira coluna, mas poderíamos ter escolhido outra casa da tabela para começar.

Assim, o número que falta na primeira linha é $14 - A$, o número que falta na primeira coluna é $18 - A$. Agora, pela diagonal que contém esse último número, temos que a casa central terá o número $16 - A$.

A	7	$14 - A$
9	$16 - A$	
$18 - A$		20

Agora, temos que $20 + A = 32 - 2A$, logo, $A = 4$.

4	7	10
9	12	
14		20

Resta preencher as duas casas restantes. Isso é bastante simples, já que $17 + 7 = 24 = 2 \times 12$ e $20 + 10 = 30 = 2 \times 15$.

4	7	10
9	12	15
14	17	20

Item C

Agora só queremos a soma das nove casas e não o preenchimento completo. A casa central deve ser preenchida com 22.

Agora observe que as casas que ainda não foram preenchidas devem somar $28 + 44 + 60 = 132$, pois $A + B = 28$; $C + D = 44$ e $E + F = 60$. Logo, as nove casas somam $132 + 14 + 22 + 30 = 198$. Observe que $198 = 3 \times (14 + 22 + 30) = 9 \times 22$.

A	C	E
14	22	30
B	D	F

Questão 2

Item A

Maria pode pintar de azul tanto o hexágono como o trapézio e, portanto, essa cor deve ser tratada separadamente.

Caso 1: o hexágono foi pintado de azul. Então, para não repetir a mesma no trapézio, este só pode ser pintado de preto (1 possibilidade).

Caso 2: o hexágono não foi pintado de azul (2 possibilidades). Nesse caso, Maria pode pintar o trapézio de azul ou de preto (2 possibilidades). Pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, há, então, $2 \times 2 = 4$ possibilidades de pinturas.

Juntando os dois casos, vemos que Maria pode pintar a Figura 1 de $1 + 4 = 5$ maneiras diferentes.

Item B

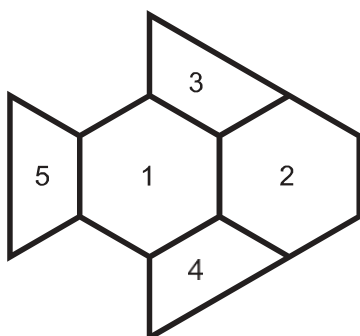
Novamente, façamos a divisão em casos:

Caso 1: O hexágono foi pintado de azul por Maria. Logo, todos os três trapézios devem ser pintados de preto (1 possibilidade).

Caso 2: O hexágono não foi pintado de azul (2 possibilidades). Nesse caso, cada um dos três trapézios da Figura 2 podem ser pintados de azul ou preto. Pelo princípio multiplicativo, há $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades de pinturas.

Juntando os dois casos, vemos que Maria pode pintar a Figura 2 de $1 + 8 = 9$ maneiras diferentes.

Item C



Vamos enumerar as regiões de acordo com a figura ao lado:

Vamos dividir em 6 casos:

- Hexágono 1 na cor azul, hexágono 2 na cor bege. Nesse caso, os trapézios 3, 4 e 5 devem ser pintados de preto (1 possibilidade).
- Hexágono 1 na cor azul, hexágono 2 na cor cinza. Nesse caso, também os trapézios 3, 4 e 5 devem ser pintados de preto (1 possibilidade).
- Hexágono 1 na cor bege, hexágono 2 na cor azul. Nesse caso, os trapézios 3 e 4 devem ser pintados de preto, mas o trapézio 5 pode ser pintado de azul ou preto (2 possibilidades)
- Hexágono 1 na cor bege, hexágono 2 na cor cinza. Cada trapézio pode ser pintado de duas cores ($2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades)
- Hexágono 1 na cor cinza, hexágono 2 na cor azul. Nesse caso, os trapézios 3 e 4 devem ser pintados de preto, e o trapézio 5 pode ser pintado de duas cores

(2 possibilidades).

- Hexágono 1 na cor cinza, hexágono 2 na cor bege. Cada trapézio pode ser pintado de duas cores ($2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades).

Logo, há $1 + 1 + 2 + 8 + 2 + 8 = 22$ maneiras diferentes de Maria pintar a Figura 3.

Questão 3

Observamos inicialmente que podemos considerar o quadriculado fixo na posição apresentada.

Item A

Qualquer casa do tabuleiro (em particular, a casa central) pode ser preenchida de nove maneiras, sendo quatro delas por um número par; a probabilidade pedida é, então, $\frac{4}{9}$.

Item B

A probabilidade de que três casas fixas (não necessariamente na mesma coluna) sejam preenchidas apenas por números pares é $\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$. De fato, a probabilidade de a

primeira casa ser preenchida com um número par é de $\frac{4}{9}$, conforme o item anterior; uma vez

preenchida a primeira das três casas com um número par, a probabilidade de a segunda casa ser preenchida com um número par é $\frac{3}{8}$. Finalmente, uma vez preenchidas a primeira e a

segunda casas com números pares, a probabilidade de a terceira casa também ser preenchida com um número par é $\frac{2}{7}$, e segue nossa afirmativa inicial. Como podemos escolher uma

coluna de três maneiras, a probabilidade procurada é $3 \times \frac{1}{21} = \frac{1}{7}$.

Alternativamente, quatro casas fixas (em particular, uma coluna e uma casa extra) podem ser preenchidas com números pares de $4!$ maneiras e, após isso, as cinco casas restantes podem ser preenchidas com números ímpares de $5!$ maneiras. Logo, o número de maneiras de preencher o quadriculado de modo que essas quatro casas tenham números pares é $4! \times 5!$. Como o número de maneiras de preencher o quadriculado sem restrições é $9!$, a probabilidade de que essas quatro casas sejam preenchidas com números pares é $\frac{4! \times 5!}{9!} = \frac{1}{126}$.

Finalmente, podemos fixar uma coluna e uma casa extra de $3 \times 6 = 18$ maneiras, e segue que a probabilidade procurada é $18 \times \frac{1}{126} = \frac{1}{7}$.

Item C

A probabilidade de que cinco casas fixas (não necessariamente formando uma linha e uma coluna) sejam preenchidas por números ímpares é, analogamente ao item anterior, igual a $\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{126}$. Podemos escolher uma linha e uma coluna de $3 \times 3 = 9$

9 8 7 6 5 126

1 1

maneiras diferentes, e segue que a probabilidade pedida é $9 \times \frac{1}{126} = \frac{1}{14}$.

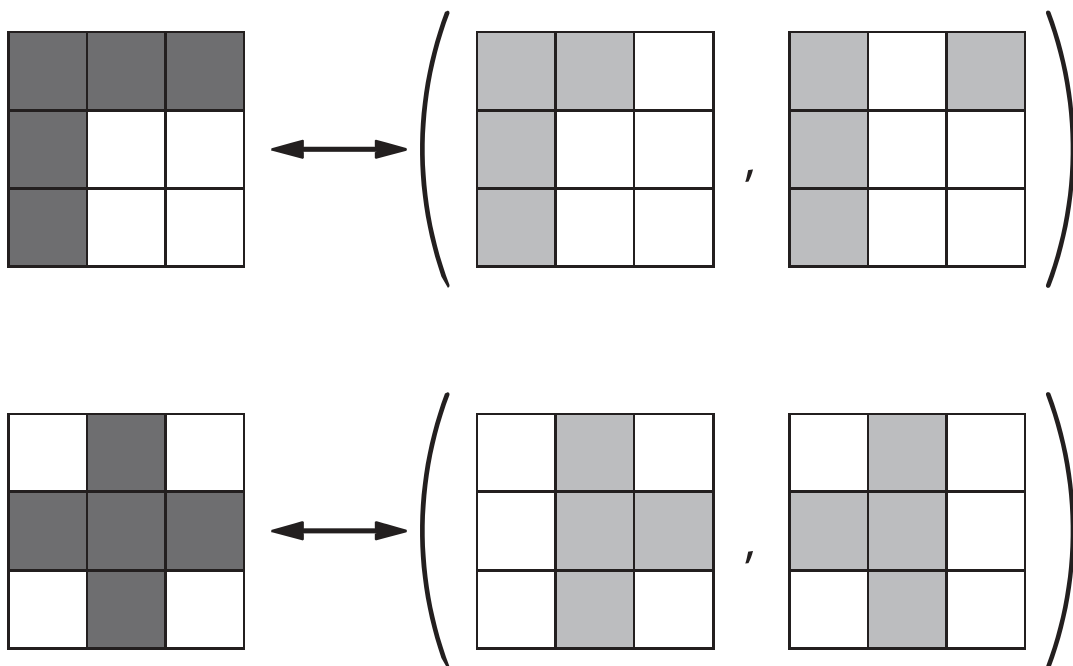
SOLUÇÕES NÍVEL 3 - 2ª FASE

Alternativamente, cinco casas fixas (em particular, uma linha e uma coluna) podem ser

preenchidas com números ímpares de $5!$ maneiras e as quatro casas restantes podem ser preenchidas com números pares de $4!$ maneiras. Podemos fixar uma linha e uma coluna de $3 \times 3 = 9$ maneiras, e segue, como no item anterior, que a probabilidade pedida é

$$9 \times \frac{5! \times 4!}{9!} = \frac{1}{14}.$$

Notamos que o fato de a probabilidade em (c) ser a metade daquela em (b) não é apenas uma coincidência numérica, mas decorre do fato de que é possível associar a cada preenchimento do tabuleiro, como em (c), dois preenchimentos distintos, como em (b); reciprocamente, os preenchimentos como em (b) podem ser divididos em grupos de dois, de modo a gerar um preenchimento como em (c). Essa ideia está ilustrada na figura abaixo.



Dessa maneira, outra solução para essa questão é mostrar primeiro (b) e depois usar o argumento acima para mostrar (c), ou vice-versa.

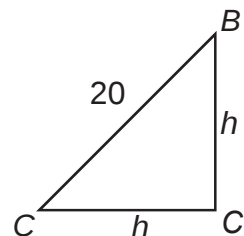
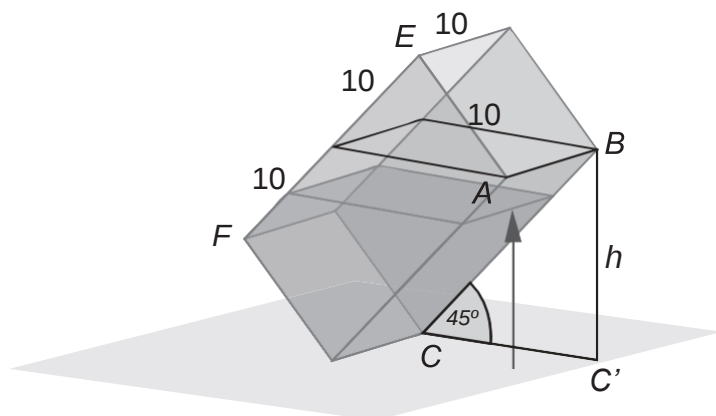
Questão 4

Item A

O volume total da lata é igual a $20 \times 10 \times 10 = 2.000 \text{ cm}^3$.

Item B

A altura máxima é atingida pelo líquido quando ele alcança a aresta AB indicada na figura (a partir desse instante, o líquido transborda). Nesse mesmo instante, o líquido atinge o ponto médio da aresta EF .



A altura h atingida pelo líquido é igual ao cateto de um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa medindo 20 cm. Logo, $h^2 + h^2 = 20^2$, o que fornece $h = 10\sqrt{2}$ cm.

O volume da lata que deixa de ser preenchido quando o líquido atinge essa altura é o volume de um prisma triangular, que é igual à metade do volume de um paralelepípedo retângulo de arestas iguais a 10. Logo, o volume não preenchido é igual a $\frac{10 \times 10 \times 10}{2} = 500 \text{ cm}^3$ e,

portanto, o volume de líquido, nesse instante, é igual a $2000 - 500 = 1.500 \text{ cm}^3$.

Outra solução:

Quando começa a transbordar, o líquido ocupa um prisma reto. A base desse prisma é um trapézio de bases medindo 10 cm e 20 cm, respectivamente, e altura medindo 10 cm; a altura do prisma mede 10 cm. Logo, seu volume é $\frac{10 + 20}{2} \times 10 \times 10 = 1.500 \text{ cm}^3$.

Item C

Até atingir o vértice F (quando $h = 5\sqrt{2}$), o líquido ocupa um prisma triangular, que corresponde à metade do volume de um paralelepípedo retângulo de arestas $h\sqrt{2}$, $h\sqrt{2}$ e 10 cm.

Logo, temos

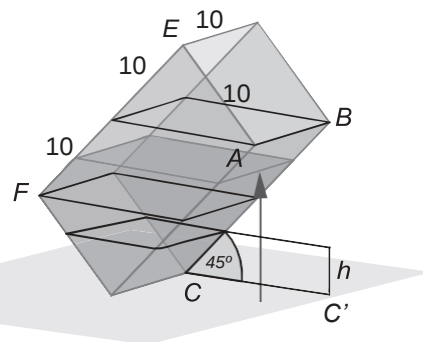
$$V(h) = \frac{1}{2} h\sqrt{2} \times h\sqrt{2} \times 10 = 10 h^2, \text{ se } 0 \leq h \leq 5\sqrt{2}$$

(função quadrática).

Observe que, quando o vértice F é atingido, o volume de líquido é $V(5\sqrt{2}) = 50 \times 10 = 500 \text{ cm}^3$. A partir desse ponto, o líquido adicional ocupa um prisma cuja base é um retângulo de lados medindo 10 cm e $10\sqrt{2}$ cm e cuja altura é $(h - 5\sqrt{2})$. Logo,

$$V(h) = 500 + 10 \times 10\sqrt{2} \times (h - 5\sqrt{2}) = 100\sqrt{2} h - 500, \text{ se } 5\sqrt{2} < h \leq 10\sqrt{2}$$

(função linear).

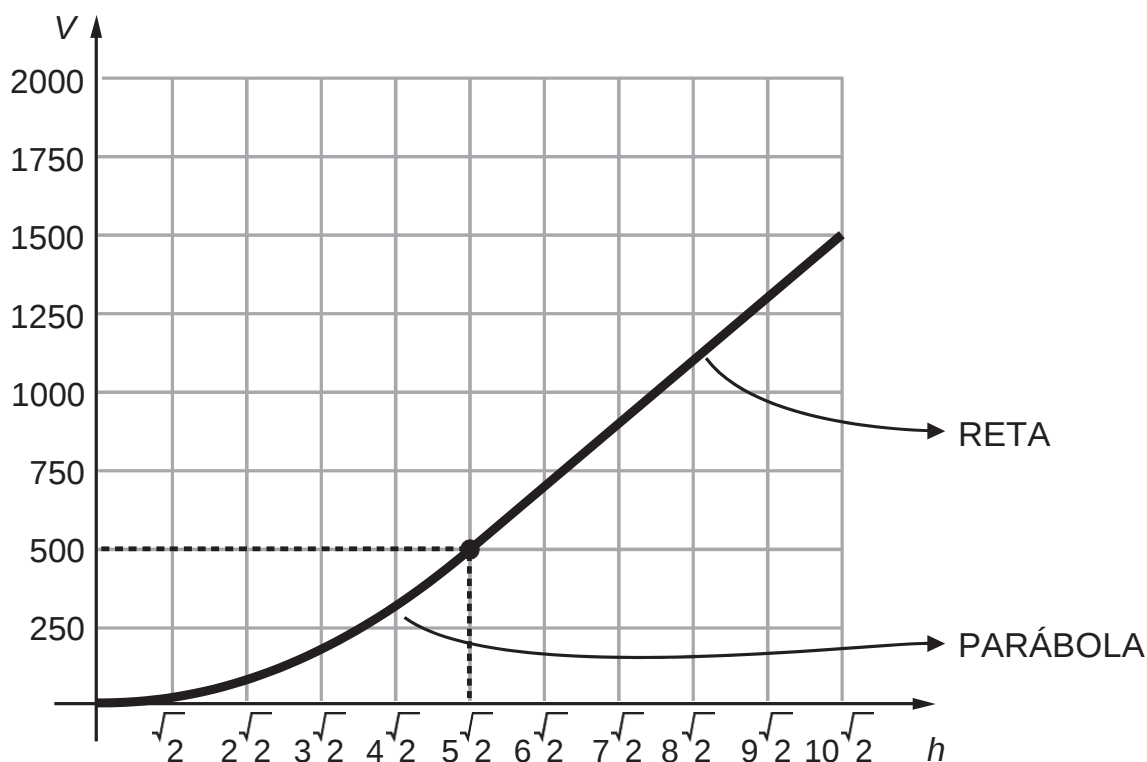


Outra solução:

Para $5\sqrt{2} < h \leq 10\sqrt{2}$, o volume de líquido cresce linearmente com a altura. Como $V(5\sqrt{2}) = 500$ e $V(10\sqrt{2}) = 1.500$, temos:

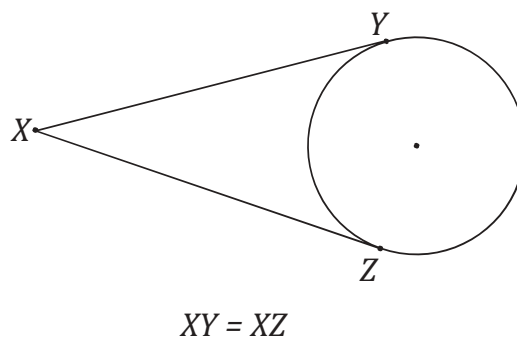
$$V(h) = 500 + (1500 - 500) \frac{h - 5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 100\sqrt{2} h - 500, \text{ se } 5\sqrt{2} < h \leq 10\sqrt{2}.$$

O gráfico de V tem o seguinte aspecto:



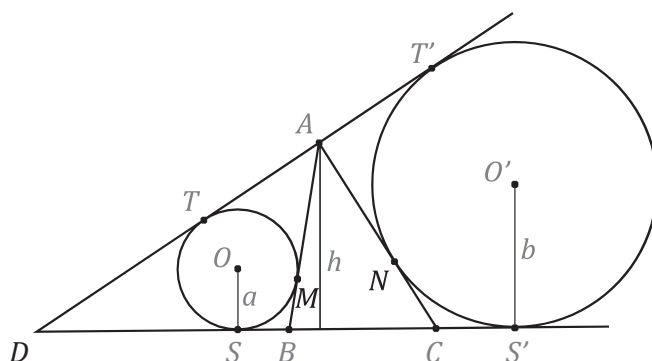
Questão 5

Utilizaremos na solução desse problema o teorema das tangentes, que estabelece que, se duas tangentes são traçadas de um mesmo ponto a uma mesma circunferência, então, os segmentos que unem este ponto até os pontos de tangência são iguais.



Item A

Queremos calcular o perímetro do triângulo ABC quando $SS' = 10$.



$$\begin{cases} DT' = DS' \\ DT = DS \end{cases} \rightarrow DT' - DT = DS' - DS \rightarrow TT' = SS' = 10$$

$$\begin{cases} BM = BS \\ CN = CS' \end{cases} \rightarrow BM + BC + CN = BS + BC + CS' = SS' = 10$$

$$\rightarrow BM + BC + CN = 10 \text{ (equação 1)}$$

$$\begin{cases} AM = AT \\ AN = AT' \end{cases} \rightarrow AM + AN = AT + AT' = TT' = 10$$

$$\rightarrow AM + AN = 10 \text{ (equação 2)}$$

Somando as equações 1 e 2, obtemos

$$(BM + AM) + BC + (CN + AN) = 2 SS' = 20 \rightarrow AB + BC + AC = 2 SS' = 20.$$

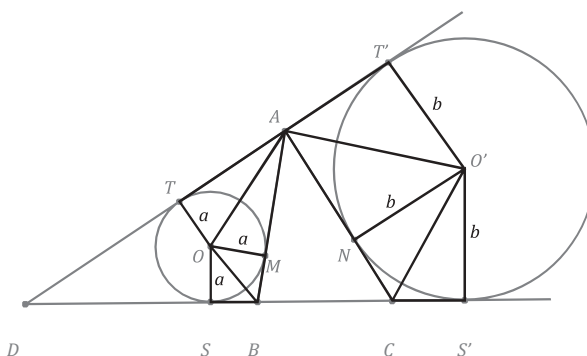
Assim, o perímetro do triângulo ABC é igual a 20.

Item B

Denote as áreas dos triângulos ABC , ABO e ACO' por A_1 , A_2 e A_3 , respectivamente.

Vamos mostrar que a área do hexágono $OSS'O'T'T$ é $\mathbf{A_1 + 2A_2 + 2A_3}$.

Observemos a figura ao lado.



$$\text{área}_{OSBAT} = 2 \times \mathbf{A}_{ABO} \rightarrow \text{área}_{OSBAT} = 2\mathbf{A}_2$$

$$\text{área}_{O'S'CAT'} = 2 \times A_{ACO'} \rightarrow \text{área}_{O'S'CAT'} = 2A_3$$

Logo,

$$\text{área}_{\text{OSS'O'TT}} = \text{área}_{\text{ABC}} + \text{área}_{\text{OSBAT}} + \text{área}_{\text{O'S'CAT'}} = \mathbf{A_1 + 2A_2 + 2A_3.}$$

Item C

Vamos mostrar agora que a área do triângulo ABC é

$$\frac{1}{2} [(b - a)AB + (a - b)AC + (a + b)BC].$$

$OSS'O'$ é um trapézio de bases a e b e altura SS' (do item A, $SS' = \frac{AB + BC + AC}{2}$).

$$\text{área}_{OSS'O'} = \frac{1}{2} (a + b) \left(\frac{AB + BC + AC}{2} \right)$$

$$4\text{área}_{OSS'O'} = (a + b)(AB + BC + AC)$$

Por outro lado, $\text{área}_{OSS'O'}$ é igual à metade da área do hexágono $OSS'O'T'T'$; portanto, usando o resultado encontrado no item B,

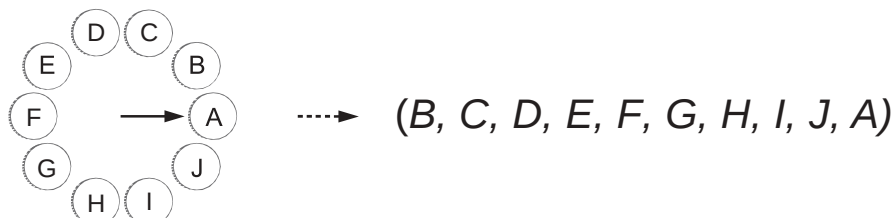
$$\begin{aligned} 2A_1 + 4A_2 + 4A_3 &= (a + b)(AB + BC + AC) \\ 2A_1 + 4 \times \frac{AB \times a}{2} + 4 \times \frac{AC \times b}{2} &= (a + b)AB + (a + b)BC + (a + b)AC \\ 2A_1 &= AB(a + b - 2a) + BC(a + b) + AC(a + b - 2b) \\ A_1 &= \frac{1}{2} [AB(b - a) + BC(a + b) + AC(a - b)]. \end{aligned}$$

Item D

$$\begin{aligned} AB = AC &\xrightarrow{\text{pelo item C}} A_1 = \frac{1}{2} [AC(b - a) + BC(a + b) + AC(a - b)] \\ \frac{BC \times h}{2} &= \frac{1}{2} [BC(a + b)] \\ h &= a + b \end{aligned}$$

Questão 6

Vamos denotar por X uma moeda com a face cara para cima e Y a com a face coroa. Além disso, vamos representar uma certa configuração das moedas por uma lista de letras consecutivas, em que cada uma é X ou Y, começando pela primeira moeda após o ponteiro no sentido anti-horário e terminando sempre com a moeda para a qual o ponteiro está apontando no momento.



Item A

Podemos exibir explicitamente as mudanças de moedas a partir do início, da seguinte forma.

$$\begin{aligned} (Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y) &\xrightarrow{1^\circ} (X, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y) \\ (X, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y) &\xrightarrow{2^\circ} (Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, X) \end{aligned}$$

Como o ponteiro estará apontando para a posição C, podemos concluir que, em D, teremos uma moeda com a coroa virada para cima (letra Y) e, em C, uma moeda com a cara (letra X).

Item B

Podemos exibir explicitamente as primeiras 9 operações, da seguinte forma.

$$\begin{aligned} (Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y) &\xrightarrow{1^\circ} (X, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y) \\ (X, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y) &\xrightarrow{2^\circ} (Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, X) \\ (Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, X) &\xrightarrow{3^\circ} (X, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, X, Y) \\ (X, Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, X, Y) &\xrightarrow{4^\circ} (Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, X, Y, X) \\ (Y, Y, Y, Y, Y, Y, Y, X, Y, X) &\xrightarrow{5^\circ} (X, Y, Y, Y, Y, Y, X, Y, X, Y) \\ (X, Y, Y, Y, Y, Y, X, Y, X, Y) &\xrightarrow{6^\circ} (Y, Y, Y, Y, Y, X, Y, X, Y, X) \\ (Y, Y, Y, Y, Y, X, Y, X, Y, X) &\xrightarrow{7^\circ} (X, Y, Y, Y, X, Y, X, Y, X, Y) \\ (X, Y, Y, Y, X, Y, X, Y, X, Y) &\xrightarrow{8^\circ} (Y, Y, Y, X, Y, X, Y, X, Y, X) \\ (Y, Y, Y, X, Y, X, Y, X, Y, X) &\xrightarrow{9^\circ} (X, Y, X, Y, X, Y, X, Y, X, Y) \end{aligned}$$

Assim, teremos moedas alternadas e o ponteiro apontará para a posição J. Os próximos três movimentos são os seguintes.

$$\begin{aligned} (X, Y, X, Y, X, Y, X, Y, X, Y) &\xrightarrow{10^\circ} (Y, X, Y, X, Y, X, Y, X, Y, X) \\ (Y, X, Y, X, Y, X, Y, X, Y, X) &\xrightarrow{11^\circ} (Y, Y, X, Y, X, Y, X, Y, X, Y) \\ (Y, Y, X, Y, X, Y, X, Y, X, Y) &\xrightarrow{12^\circ} (X, X, Y, X, Y, X, Y, X, Y, Y) \end{aligned}$$

No final desse processo, o ponteiro apontará para a letra C (pois ele dará uma volta completa e avançará mais duas posições) e, assim, podemos concluir que estarão com a face cara para cima as moedas nas posições A, D, E, G e I. Logo, nas posições B, C, F, H e J, as moedas têm a face coroa voltada para cima.

Item C

Perceba que a operação do ponteiro é reversível, ou seja, dada qualquer configuração das moedas, existe apenas uma configuração imediatamente anterior que a produziu através do movimento do ponteiro. Assim, se, em um dado momento, todas as moedas estão com a face cara virada para cima, então, na posição imediatamente anterior, todas também estavam com a face cara virada para cima. Retrocedendo essa operação até o início, deveríamos concluir que todas estavam com a face cara para cima desde o princípio. Como isso é um absurdo, é impossível que em algum momento todas fiquem com a cara virada para cima.

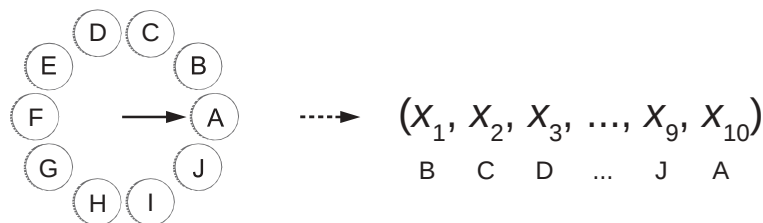
Item D

O número de disposições de 10 moedas cara e coroa é finita, bem como o número de possíveis posições do ponteiro. Assim, o número de configurações das sequências associadas ao ponteiro é finito e, eventualmente, após alguma interação futura, deverá se repetir. Digamos que, após o ponteiro se mover i e j vezes, com $i < j$, as configurações são exatamente as mesmas. Como a operação é reversível, as configurações após $i-1$ e $j-1$ movimentos também são idênticas. Repetindo esse argumento i vezes, podemos concluir que as configurações após $i-1$ e $j-i$ movimentos do ponteiro são idênticas. Ou seja, após $j-i$ interações do ponteiro, a configuração resultante será a mesma do início e todas as moedas estarão com a face coroa virada para cima.

Outra solução:

Item A

Para simplificar a notação, a cada face coroa vamos associar o número -1, e a cada face cara, o número +1. Além disso, para cada disposição das moedas no círculo, vamos associar uma sequência formada pelos números correspondentes às moedas nas posições de A a J em ordem anti-horária e escritos a partir da próxima moeda para a qual o ponteiro apontará. Observe na figura a seguir uma exemplificação dessa notação. Se ela representar a configuração inicial, então todos os x_i 's serão iguais a -1.



Após um movimento do ponteiro, a sequência sofre a seguinte transformação T:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_9, x_{10}) \xrightarrow{T} (x_1 \times x_2, x_3, x_4, \dots, x_9, x_{10}, x_1).$$

Por exemplo, após os dois primeiros saltos, teremos:

$$(-1, -1, -1, -1, \dots, -1, -1) \xrightarrow{T} (+1, -1, -1, -1, \dots, -1, -1) \xrightarrow{T} (-1, -1, -1, -1, -1, \dots, -1, +1).$$

Assim, após os dois primeiros saltos, o ponteiro apontará para a posição C, a posição D terá uma moeda com a face coroa (-1) e a posição C terá uma moeda com a face cara (+1).

Item B

Começando com uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10})$, após 9 operações, teremos:

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_9, x_{10}) \xrightarrow{T} \\ &(x_1 \times x_2, x_3, x_4, \dots, x_{10}, x_1) \xrightarrow{T} \\ &(x_1 \times x_2 \times x_3, x_4, \dots, x_1, x_1 \times x_2) \xrightarrow{T} \\ &\dots \\ &(x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_{10}, x_1 \times x_1 \times x_2, \dots, x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_9). \end{aligned}$$

Como inicialmente temos $x_i = -1$ para todo i , a sequência terá valores alternados. Os três movimentos seguintes do ponteiro produzem:

$$\begin{aligned} (+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1) &\xrightarrow{T} (-1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, +1) \xrightarrow{T} \\ (-1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1) &\xrightarrow{T} (+1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, -1). \end{aligned}$$

No final desse processo, o ponteiro apontará para a letra C (pois ele dará uma volta completa e avançará mais duas posições) e, assim, podemos concluir que estarão com a face cara para cima as moedas nas posições A, D, E, G e I. Logo, nas posições B, C, F, H e J, as moedas têm a face coroa voltada para cima.

Item C

Percebemos que a operação T é reversível, ou seja, dada qualquer configuração das moedas, existe apenas uma configuração imediatamente anterior que a produziu pela movimentação do ponteiro.

$$\left(x_{10}, \frac{x_1}{x_{10}}, x_2, \dots, x_8, x_9 \right) \leftarrow \left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_9, x_{10} \right)$$

Assim, se, em um dado momento, todas as moedas estivessem com a face cara para cima, ou seja, todas associadas ao número +1, na posição imediatamente anterior, todas também estariam com a face cara para cima. Retrocedendo essa operação até o início, deveríamos concluir que todas estavam com a face cara para cima desde o princípio. Como isso é um absurdo, é impossível que em algum momento todas fiquem viradas com a face cara para cima.

Item D

O número de sequências com +1 e -1 com 10 posições é finita, bem como o número de possíveis posições do ponteiro. Assim, o número de configurações das sequências associadas ao ponteiro é finito e, após alguma interação futura, deverão se repetir. Digamos que, após o ponteiro se mover i e j vezes, com $i < j$, as configurações sejam exatamente as mesmas. Como a operação é reversível, as configurações após $i - 1$ e $j - 1$ movimentos também são idênticas. Repetindo esse argumento i vezes, podemos concluir que as configurações após $i = 0$ e $j - i$ movimentos do ponteiro são idênticas. Ou seja, após $j - i$ interações do ponteiro, a configuração resultante será a mesma do início e todas as moedas estarão com a face coroa para cima.