

Solução da prova da 1ª Fase

QUESTÃO 1 – ALTERNATIVA A

Solução: Seja n o número pensado por Henrique. As operações descritas no enunciado são, em ordem, as seguintes:

$$3n$$

$$3n + 3$$

$$(3n + 3) / 3$$

$$[(3n + 3) / 3] - 3$$

$$\sqrt[3]{[(3n + 3) / 3] - 3}$$

Como

$$\sqrt[3]{[(3n + 3) / 3] - 3} = 3, \text{ realizando as operações inversas, obtemos}$$

$$[(3n + 3) / 3] - 3 = 27$$

Assim,

$$\frac{[(3n + 3)]}{3} = 30$$

Ou seja, $n + 1 = 30$, logo, $n = 29$. Somando os algarismos de 29, temos $2 + 9 = 11$.

QUESTÃO 2 – ALTERNATIVA E

Solução: Como $\frac{80}{100}x = 0,8x = \frac{20}{100}y = 0,2y$, temos que $x = y/4$ ou $y = 4x$.

QUESTÃO 3 – ALTERNATIVA B

Solução: A turma tem 25 alunos. Portanto, para calcular a média das notas, podemos dividir a nota de cada aluno por 25 e somar os resultados. O erro da professora foi de $8,6 - 3,6 = 5,0$ pontos. Dividindo o erro por 25, encontramos 0,2. Esse valor deve ser somado à média original, obtendo-se o valor $7,2 + 0,2 = 7,4$.

Em outras palavras, se a_n , $n = 2, 3, \dots, 25$ são as notas dos colegas da Aline, então a média corrigida é

$$\frac{8,6 + a_2 + a_3 + \dots + a_{24} + a_{25}}{25} = \frac{5,0 + 3,6 + a_2 + a_3 + \dots + a_{24} + a_{25}}{25} = \frac{5,0}{25} + \frac{3,6 + a_2 + a_3 + \dots + a_{24} + a_{25}}{25} = 0,2 + 7,2 = 7,4$$

QUESTÃO 4 – ALTERNATIVA B

Solução: Observemos inicialmente que um ajudante não será suficiente para que Omar complete a travessia, pois, para receber a carga com alimento para dois dias, ele precisará de espaço na sua mochila e esse espaço só estará liberado após dois dias. Se o ajudante o acompanhar por dois dias e, após isso, repassar alimento para dois dias, a mochila do ajudante ficará vazia e ele não terá como retornar.

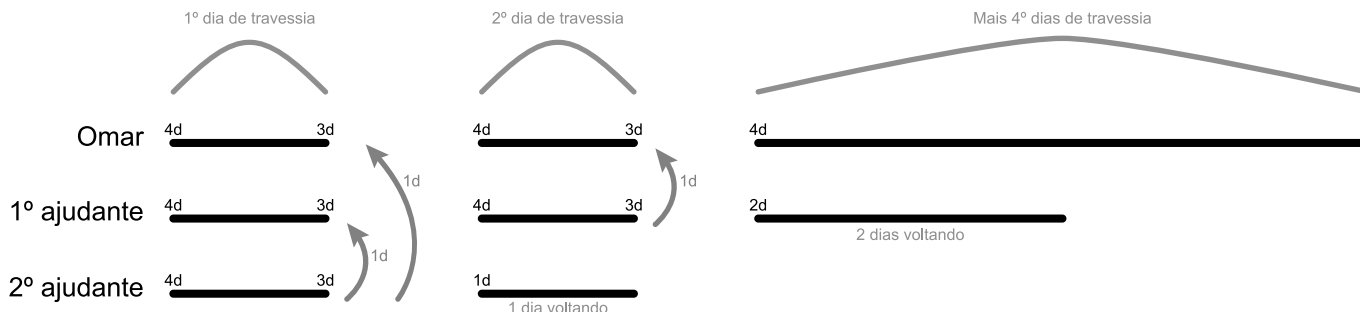
Vejamos que dois ajudantes são suficientes para que Omar complete a travessia. Para isso, basta aplicar a seguinte estratégia:

Após o 1º dia de caminhada, o 2º ajudante repassa carga de 1 dia para Omar e carga de 1 dia para o 1º ajudante e retorna ao ponto de partida, deixando Omar e o 1º ajudante seguirem viagem com suas mochilas novamente plenas. Repare que isso é possível porque ele gastou a quantidade de mantimento para 1 dia na ida, 1 dia de mantimento voltando e doou 2 dias de mantimento, o que é perfeitamente possível, uma vez que ele tinha recebido mantimentos para 4 dias.

Omar e o 1º ajudante continuam a caminhada.

Após o 2º dia, o 1º ajudante repassa carga de 1 dia de mantimento para Omar e retorna para o ponto de partida, permitindo que ele siga viagem com sua mochila plena, o que será suficiente para completar os 4 dias que faltam para atravessar o deserto.

Reparem, mais uma vez, que o 1º ajudante também terá condições de retornar, uma vez que gastará 2 dias de mantimento indo e dois dias voltando; além disso, a quantidade extra que recebeu do 2º ajudante é justamente o que Omar precisa para encher novamente sua mochila ao final do segundo dia e completar a travessia.



Portanto, **no mínimo dois ajudantes** devem iniciar a travessia para que Omar consiga completá-la, e os ajudantes consigam retornar ao ponto de partida.

QUESTÃO 5 – ALTERNATIVA D

Solução: Seja n o número de funcionários extras. Já foram produzidos nos primeiros 5 dias 20 Kg de bombons, com apenas 3 funcionários. O desafio é produzir nos próximos 5 dias $100 - 20 = 80$ kg de chocolate com $3 + n$ funcionários. Como a produção é a mesma para todos os funcionários, temos a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{3}{3 + n} = \frac{20}{80}$$

Logo, $n = 9$.

Outra solução: Se cada grupo de 3 funcionários produz 20 kg em 5 dias, para produzir 80 kg em 5 dias, são necessários 4 grupos de 3 funcionários, ou seja, $3 \times 4 = 12$ funcionários, pois $80 = 4 \times 20$. Logo, será necessário contratar mais $12 - 3 = 9$ funcionários.

QUESTÃO 6 – ALTERNATIVA A

Solução: Como Pinóquio mente, a frase “Todos os meus chapéus são verdes” deve ser falsa. Logo, existe pelo um chapéu de Pinóquio que não é verde. Podemos concluir, então, que Pinóquio tem pelo menos um chapéu (que não é verde).

QUESTÃO 7 – ALTERNATIVA D

Solução: Observando-se a camada superior do cubo, percebe-se que ele foi girado 180° . Ainda na camada superior, podemos contar 5 cubinhos brancos. Na camada intermediária, podemos ver 8 dos 9 cubinhos que o compõem. Destes, 6 são brancos. Na camada inferior, podemos ver 8 de seus 9 cubinhos; destes, 5 são brancos.

Assim, o número máximo de cubinhos brancos ocorre quando os dois cubinhos interiores (que não podem ser visualizados em nenhuma das diferentes perspectivas) também são brancos. Nesse caso, temos um total de $5 + 6 + 5 + 2 = 18$ cubinhos brancos.

QUESTÃO 8 – ALTERNATIVA B

Solução: Sejam x e y as quantidades de meninos e meninas. Claramente devemos ter $x, y \geq 1$ e pelo menos uma das duas quantidades maior do que 2, pois, caso contrário, não seria possível formar as equipes. Em uma equipe formada por dois meninos e uma menina, temos x opções de escolhas do primeiro menino, $x - 1$ opções de escolhas para o segundo menino e y opções de escolhas para a menina. Entretanto, nessas escolhas, contamos duas vezes cada dupla de meninos, pois a troca de ordem entre eles gera a mesma equipe. Assim, o total de equipes nessa situação é $\frac{xy(x-1)}{2}$. De modo semelhante, o total de equipes com duas meninas e um menino é $\frac{xy(y-1)}{2}$. Portanto,

$$50 = xy(x-1) + xy(y-1) = xy(x+y-2)$$

Consequentemente, x , y e $x+y-2$ são divisores de 50.

Se $x = 1$ ou $y = 1$, um deles deve ser solução da equação $z(z-1) = 50$, que não possui raízes inteiras. Portanto, $x, y \geq 2$ e, assim, $x+y-2 \geq x$ e $x+y-2 \geq y$. Como $50 = 2 \times 5^2$, temos apenas as seguintes possibilidades:

$$(x, y, x+y-2) = (2, 5, 5) \text{ ou } (x, y, x+y-2) = (5, 2, 5)$$

Em ambos os casos, a quantidade de alunos é $x+y=7$.

A título de ilustração, vamos admitir que a turma fosse formada por dois homens $H1$ e $H2$ e por cinco mulheres $M1$, $M2$, $M3$, $M4$ e $M5$. Nesse caso, as 25 diferentes equipes são as seguintes:

$M1M2H1$,	$M1M2H2$,	$M1M3H1$,	$M1M3H2$,	$M1M4H1$,	$M1M4H2$,	$M1M5H1$,
$M1M5H2$,	$M2M3H1$,	$M2M3H2$,	$M2M4H1$,	$M2M4H2$,	$M2M5H1$,	$M2M5H2$,
$M3M4H1$,	$M3M4H2$,	$M3M5H1$,	$M3M5H2$,	$M4M5H1$,	$M4M5H2$,	$H1H2M1$,
$H1H2M2$,	$H1H2M3$,	$H1H2M4$	e	$H1H2M5$.		

QUESTÃO 9 – ALTERNATIVA E

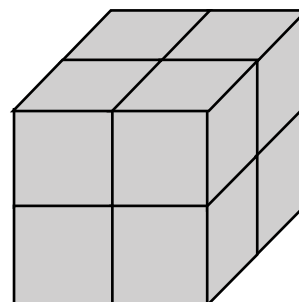
Solução: Vamos chamar de P o preço da caixa. Esse preço não se alterou com a diminuição da quantidade de chocolate. O preço do grama de chocolate antes da diminuição era $\frac{P}{250}$ e passou a ser $\frac{P}{200}$. Assim,

$$\frac{\frac{P}{200}}{\frac{P}{250}} = \frac{250}{200} = 1,25 = 1 + 0,25, \text{ ou seja, houve um aumento de } 25\%.$$

QUESTÃO 10 – ALTERNATIVA C

Solução: Observando a planificação, vemos que a menor soma possível para três faces vizinhas de um pequeno dado é $1 + 2 + 4 = 7$ e, juntando adequadamente 8 dados na posição em que essas faces com soma mínima formem as faces do cubo grande, concluímos que a menor soma possível dos 24 números que aparecem nas faces do cubo grande é $8 \times 7 = 56$.

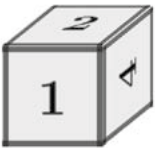
Mais detalhadamente, ao juntar os oito dados idênticos, formamos um cubo maior, como na figura ao lado, e em cada face desse cubo maior aparecem quatro números. Portanto, nas seis faces desse cubo maior aparecem $6 \times 4 = 24$ números. Por outro lado, cada vértice do cubo maior corresponde a um dos oito vértices do dado e cada vértice do dado tem três de suas faces concorrendo nesse vértice. Assim, os 24 números que aparecem nas seis faces do cubo maior são provenientes de faces comuns dos dados, faces essas que ficaram visíveis após a montagem, incluindo a que fica apoiada sobre a mesa. Logo, a menor soma possível para os números que aparecem nas faces do cubo formado é igual a oito vezes a menor soma possível para as três faces comuns de um vértice de um dado.



Ao montar o dado a partir de sua planificação observamos que as faces opostas serão

2 e 5, 1 e 3, 6 e 4

Observamos também que as faces comuns aos vértices do dado serão:

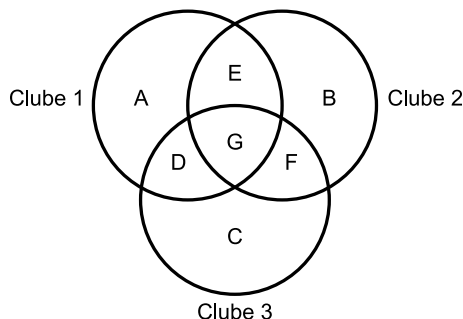
- | | | | |
|----------------------|---|-----------------------|---|
| • 1, 2 e 4 (soma 7) |  | ou 1, 2 e 6 (soma 9) |  |
| • 2, 3 e 4 (soma 9) |  | ou 2, 3 e 6 (soma 11) |  |
| • 3, 4 e 5 (soma 12) |  | ou 3, 5 e 6 (soma 14) |  |
| • 1, 4 e 5 (soma 10) |  | ou 1, 5 e 6 (soma 12) |  |

Assim, a menor soma possível para os números que aparecem nas faces do cubo formado será

$$8 \times 7 = 56.$$

QUESTÃO 11 – ALTERNATIVA A

Solução: Podemos fazer um diagrama de Venn representando essa situação:



As letras A, B, ..., G representam o número de membros naquela região. Por exemplo, a letra A representa o número de membros exclusivos do clube 1, enquanto a letra E representa o número de membros que pertencem exclusivamente aos clubes 1 e 2.

Como nenhum aluno é membro dos três clubes, $G = 0$.

Queremos minimizar o número total de alunos, mas de tal forma que cada clube tenha exatamente 15 alunos, ou seja,

$$A + D + E = 15$$

$$C + D + F = 15$$

$$B + E + F = 15$$

Somando as três equações, obtemos $A + B + C + 2(D + E + F) = 45$. Isso mostra que $A + B + C$ não pode ser 0, pois o lado direito é ímpar. De forma a minimizar o número de alunos, podemos supor, então, que $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, sem perda de generalidade.

Como estamos supondo que $A = 1$, temos $D + E + F = 22$. O número mínimo de alunos tem que ser, portanto, igual ou maior do que 23. Podemos mostrar explicitamente que é possível satisfazer às condições do problema com 23 alunos no total; basta tomar $D = E = 7$ e $F = 8$.

QUESTÃO 12 – ALTERNATIVA C

Solução: Temos três meninas: Ana, Cláudia e Fabiana, e dois meninos: Joaquim e Pedro e as condições:

- I) havia exatamente duas crianças na casa da árvore;
- II) Pedro, que nasceu em São Paulo, se escondeu junto com Fabiana;
- III) uma menina se escondeu sozinha;
- IV) Ana não estava sozinha em seu esconderijo;
- V) o menino pernambucano estava na casa da árvore.

De acordo com a afirmação II), Pedro nasceu em São Paulo e, de acordo com a afirmação V), o menino pernambucano estava na casa da árvore. Portanto, Joaquim estava na casa da árvore.

Como Pedro e Fabiana se esconderam juntos, e como Joaquim estava na casa da árvore, Pedro e Fabiana não podiam estar na casa da árvore, pois, nesse caso, teríamos três crianças na casa da árvore, o que contradiria a afirmação I). A outra criança na casa da árvore deve ser ou Ana ou Cláudia.

Como uma menina se escondeu sozinha (afirmação III)) e Ana não estava sozinha (afirmação IV)), Ana estava na casa da árvore e Cláudia, sozinha.

Concluimos que Ana e Joaquim estavam escondidos na casa da árvore.

QUESTÃO 13 – ALTERNATIVA D

Solução: Lembramos que, se duas circunferências são tangentes, então seus centros e o ponto de tangência estão alinhados, bem como que uma tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio correspondente no ponto de contato. No nosso caso, isso quer dizer que os triângulos OEQ e PEQ são retângulos. Se o raio procurado QE é denotado por x , então $OQ = OC - QC = 1 - x$ e $PQ = PB + BQ = \frac{2}{3} + x$

O teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos OEQ e PEQ nos dá, respectivamente, $OE = \sqrt{1 - 2x}$ e $PE = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}x}$

$$PE - OE = OP = OA - PA = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

e segue que $\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}x} - \sqrt{1 - 2x} = \frac{1}{3}$.

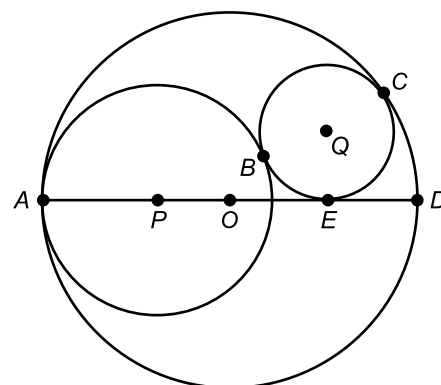
Um pouco de álgebra transforma essa expressão em $25x^2 - 8x = 0$.

De fato,

$$\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}x} = \frac{1}{3} + \sqrt{1 - 2x} \rightarrow \frac{4}{9} + \frac{4}{3}x = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}\sqrt{1 - 2x} + 1 - 2x \rightarrow -6 + 30x = 6\sqrt{1 - 2x}$$

Logo, $\sqrt{1 - 2x} = -1 + 5x$ e, portanto, $25x^2 - 8x = 0$.

Descartamos a raiz estranha $x = 0$ e chegamos a $x = \frac{8}{25}$.



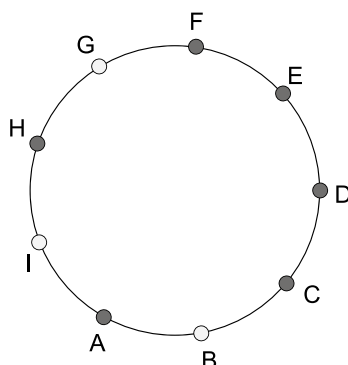
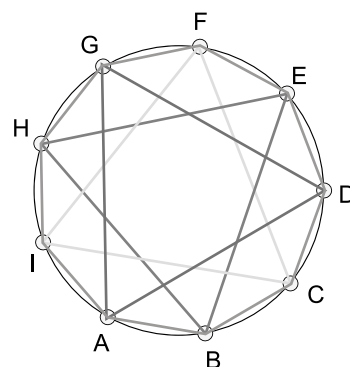
QUESTÃO 14 – ALTERNATIVA C

Solução: É possível inscrever três, e apenas três, triângulos equiláteros em um eneágono regular (polígono de nove lados cujos vértices estão igualmente espaçados em uma circunferência), como mostra a figura:

Se pintarmos sete vértices do eneágono, necessariamente um dos triângulos terá os três vértices da mesma cor, pois, se cada triângulo equilátero tiver, no máximo, dois vértices pintados, o total de vértices pintados no eneágono será, no máximo, seis.

Note que podemos pintar seis vértices do eneágono de tal forma que nenhum triângulo tenha os três vértices da mesma cor; por exemplo, pintando A, D, C, F, E e H.

Assim, o maior número de pontos que podem ser pintados de tal forma que não exista um triângulo equilátero cujos vértices estejam todos pintados é 6.



QUESTÃO 15 – ALTERNATIVA C

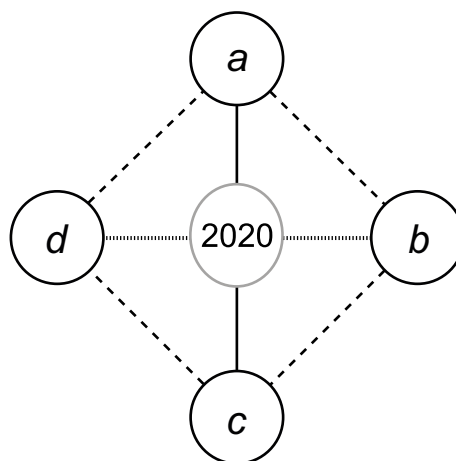
Solução: Como a soma dos números dos 4 círculos brancos será igual à soma dos números dos círculos ligados pela linha horizontal, segue que a soma dos números dos círculos brancos ligados pela linha vertical será 2020. De modo semelhante, a soma dos números dos círculos brancos ligados pela linha horizontal será 2020. Assim, a soma total dos números escritos por Priscila nos 4 círculos é $2020 + 2020 = 4040$.

Outra solução, utilizando-se rudimentos de álgebra:

$$a + b + c + d = a + 2020 + c, \text{ logo, } b + d = 2020$$

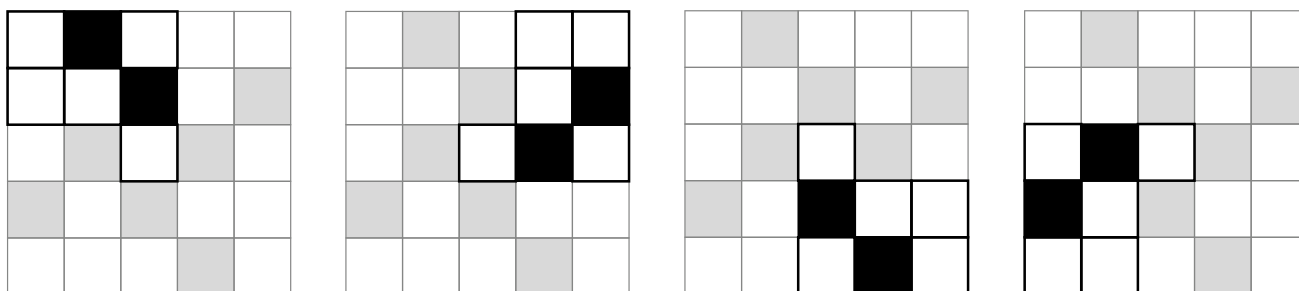
$$a + b + c + d = b + 2020 + d, \text{ logo, } a + c = 2020$$

$$\text{Assim, } a + b + c + d = 2020 + 2020 = 4040.$$



QUESTÃO 16 – ALTERNATIVA D

Solução: O mosaico da figura do enunciado pode ser obtido girando-se, em torno do ladrilho central, o bloco 2×3 formado pelos primeiros três ladrilhos das duas primeiras linhas, mais o ladrilho central.



Na verdade, qualquer mosaico de ladrilhos pretos e brancos que apresenta simetria rotacional de 90° tem essa propriedade, ou seja, é obtido a partir de sete ladrilhos: seis do bloco 2×3 formado pelos três primeiros ladrilhos das duas primeiras linhas e mais o ladrilho central.

Como cada ladrilho pode ser preto ou branco, temos $2^7 = 128$ maneiras distintas de escolher sete ladrilhos para obter um mosaico 5×5 que apresenta simetria rotacional de 90° .

Logo, a quantidade de mosaicos 5×5 que apresentam simetria rotacional de 90° é igual a $2^7 = 128$. Observe que, dentre essas possibilidades, aparecem o tabuleiro todo branco e o tabuleiro todo preto: eles também têm simetria rotacional de 90° .

QUESTÃO 17 – ALTERNATIVA C

Solução: Considere os eventos:

- A : o jogador 1 vence todas as partidas
- B : o jogador 2 vence todas as partidas
- C : o jogador 3 vence todas as partidas
- D : o jogador 4 vence todas as partidas
- E : o jogador 5 vence todas as partidas

Os eventos descritos acima são mutuamente exclusivos, isto é, não há intersecção, já que, se o jogador 1 vencer todas as partidas, os outros já perderam a partida com esse jogador. Ainda, como as partidas são independentes,

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = P(E) = (1/2)^4 = (1/16)$$

Assim, a probabilidade solicitada é $P(A \cup B \cup C \cup D \cup E) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) = (5/16)$

Outra solução:

Considere os jogadores A, B, C, D e E . Teremos 10 jogos, a saber

$A \times B, A \times C, A \times D, A \times E, B \times C, B \times D, B \times E, C \times D, C \times E$ e $D \times E$.

O espaço amostral terá 2^{10} resultados possíveis e todos os resultados são equiprováveis, já que os jogadores têm a mesma chance de vencer.

Observe que, se um jogador vencer todos os seus jogos (digamos o jogador A), nenhum outro jogador poderá fazer o mesmo (pois A ganhou dele). O número de casos possíveis para que o jogador A vença suas 4 partidas será 2^6 , pois não importa o resultado das partidas realizadas entre si pelos outros jogadores. A mesma quantidade, 2^6 , vale para todos os outros jogadores.

Logo, a probabilidade solicitada é $\frac{2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6}{2^{10}} = \frac{5}{16}$.

QUESTÃO 18 – ALTERNATIVA D

Solução: Vamos encontrar todos os pares de números inteiros positivos a e b para os quais sejam cumpridas as condições do enunciado. Como $a + 2$ é múltiplo de b , temos $b \leq a + 2$; como $b + 2$ é múltiplo de a , temos $a \leq b + 2$. Portanto, a diferença $b - a$ só pode variar entre -2 e 2 . Pela simetria entre a e b , basta examinar os casos em que a diferença $b - a$ é igual a $0, 1$ ou 2 (os casos em que a diferença é igual a -1 ou -2 dão origem às mesmas soluções que os casos em que é igual a 1 ou 2 , com os valores de a e b trocados).

Caso $b - a = 0$:

Neste caso, $a + 2$ é múltiplo de a , o que equivale a dizer que 2 é múltiplo de a . Logo, a pode ser 1 ou 2 , o que fornece as soluções $a = b = 1$ e $a = b = 2$.

Caso $b - a = 1$:

Neste caso, $b = a + 1$. Em consequência, $a + 2$ deve ser múltiplo de $a + 1$. Como $a + 2 = (a + 1) + 1$, isto implica que 1 seja múltiplo de $a + 1$. Como a é positivo, essa hipótese é impossível e, portanto, não há soluções neste caso.

Caso $b - a = 2$:

Neste caso, $b = a + 2$ e as condições a serem satisfeitas são de que $a + 2 = b$ seja múltiplo de b (o que é sempre verdade) e de que $b + 2 = a + 4$ seja múltiplo de a . Para que isso aconteça, 4 deve ser múltiplo de a ou, equivalentemente, a deve ser um divisor de 4 . Logo, temos as possibilidades $a = 1, b = 3$; $a = 2, b = 4$; e $a = 4, b = 6$.

Como no caso $b - a = 1$, não há soluções para o caso $b - a = -1$. As soluções para o caso $b - a = -2$ são as mesmas do caso $b - a = 2$, com a e b trocados: $a = 3, b = 1$; $a = 4, b = 2$; e $a = 6, b = 4$.

O maior valor de $a + b$ ocorre nas soluções $a = 4, b = 6$ e $a = 6, b = 4$, para as quais $a + b = 10$.

QUESTÃO 19 – ALTERNATIVA E

Solução: Se $AD = BC = x$ e $AB = CD = y$, temos que a área do triângulo $ABP = \frac{AB \times BP}{2} = 6$, logo, $BP = \frac{12}{y}$. Assim, $PC = BC - BP = x - \frac{12}{y}$.

Temos também que a área do triângulo AQD é 2: $\frac{AD \times DQ}{2} = 2$, logo, $DQ = \frac{4}{x}$ e

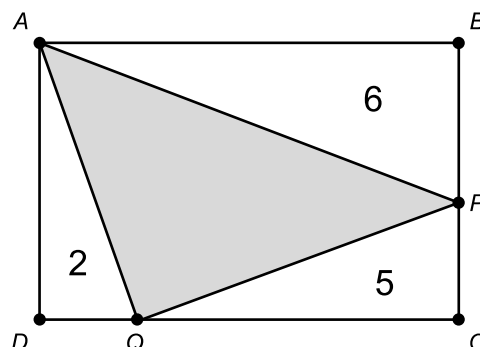
$$QC = DC - DQ = y - \frac{4}{x}.$$

Assim, a área do triângulo PCQ é $\frac{PC \times QC}{2} = 5$. Usando-se as igualdades já encontradas,

$$\left(x - \frac{12}{y}\right)\left(y - \frac{4}{x}\right) = 10$$

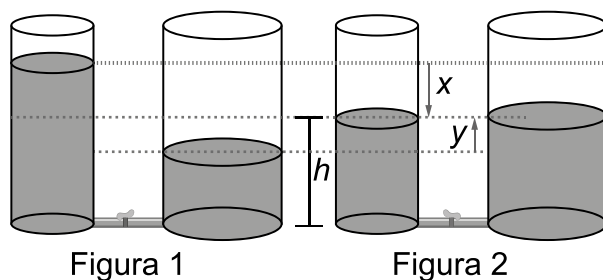
Desenvolvendo-se, $(xy)^2 - 26xy + 48 = 0$. Essa última equação tem como raízes $xy = \frac{26 \pm 22}{2}$

Como xy é a área do quadrilátero $ABCD$, a única raiz que interessa é $xy = 24$; logo, a área do triângulo APQ é igual a $24 - (6 + 5 + 2) = 11$.



QUESTÃO 20 – ALTERNATIVA E

Solução:



Chamaremos de A_1 e A_2 as áreas das bases dos dois reservatórios.

Como na Figura 1 os dois reservatórios têm o mesmo volume, então:

$$A_1 \times (h + x) = A_2 \times (h - y)$$

Como toda água que sai de um reservatório vai para o outro, o volume do líquido que desce em um reservatório é igual ao volume do líquido que sobe no outro:

$$A_1 \times x = A_2 \times y$$

Dividindo-se as duas equações, desaparecem as áreas A_1 e A_2 e obtém-se uma relação entre h , x e y :

$$\frac{h + x}{x} = \frac{h - y}{y} \Rightarrow hy + xy = hx - xy \Rightarrow h(x - y) = 2xy \Rightarrow h = \frac{2xy}{x - y}$$