

## Solução da prova da 2ª Fase

### QUESTÃO 1

**Solução:**

- a) Somando os valores da primeira linha, temos que  $O + O + O + O = 4$ . Portanto,  $O = 1$ .
- b) Somando os valores da segunda linha, temos que  $B + B + O + B = 7$ . Como  $O = 1$ , então  $B + B + B = 6$ . Logo,  $B = 2$ .
- c) Somando os valores da última linha, temos que  $E + P + O + B = 12$ .

Por outro lado, as letras O, B, M, E e P representam, em alguma ordem, os números 1, 2, 3, 4 e 5. Portanto,  $O + B + M + E + P = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ . Assim,

$$15 = O + B + M + E + P = (E + P + O + B) + M = 12 + M;$$

logo,  $12 + M = 15$ . Portanto,  $M = 15 - 12 = 3$ .

- d) Somando os valores da terceira linha, temos que  $M + E + B + O = 10$ . Como  $O = 1$ ,  $B = 2$  e  $M = 3$ , substituindo esses valores, encontramos  $E = 4$ . Portanto,  $P = 5$ , pois é a última letra que ainda não foi encontrado seu valor (pode-se também usar a quarta linha para se calcular P).

**Outra solução:** Já temos  $O = 1$  e  $B = 2$ ; da terceira linha segue  $M + E = 7$  e da quarta,  $E + P = 9$ . Como M, E, P representam 3, 4, 5, a única possibilidade é  $M = 3$ ,  $E = 4$  e  $P = 5$ , isso responde c) e d).

|   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|----|
| O | O | O | O | 4  |
| B | B | O | B | 7  |
| M | E | B | O | 10 |
| E | P | O | B | 12 |

### QUESTÃO 2

**Solução:**

- a) A 3ª marcação média marca 2,5 cm (25 mm).

A 11ª marcação pequena marca 1,3 cm (13 mm).

A distância, em milímetros, entre essas marcações é  $25 - 13 = 12$  mm.

- b) Entre cada par de marcações grandes consecutivas há 8 marcações pequenas. A régua inteira possui 30 pares de marcações grandes consecutivas. Logo, há  $30 \times 8 = 240$  marcações pequenas na régua inteira.

- c) Para encontrar entre qual par de marcações grandes está a 215ª marcação pequena, devemos calcular o quociente da divisão de 215 por 8. Temos

$$215 = 26 \times 8 + 7.$$

A 215ª marcação pequena está, então, na 7ª marcação pequena depois do 26º par de marcações grandes. A 215ª marcação pequena marca, então, 26,8 cm (268 mm).

A marcação que está à distância de 73 milímetros da 215ª marcação pequena ocorre necessariamente antes dessa marcação, senão ela estaria fora da régua.

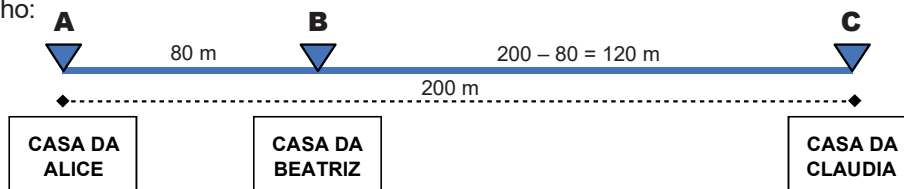
A marcação que está à distância de 73 milímetros da 215ª marcação pequena marca, então,  $268 - 73 = 195$  milímetros, na 20ª marcação média.



### QUESTÃO 3

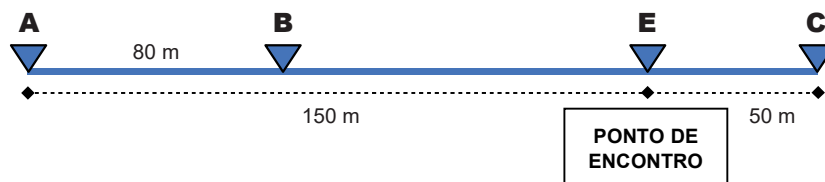
#### Solução:

a) Para responder qual é a soma das distâncias que Alice e Beatriz percorrem quando elas se reúnem na casa de Cláudia, fazemos um desenho:



Como a distância da casa de Alice até a casa de Cláudia é 200 m e a distância da casa de Beatriz até a casa de Cláudia é 120 m, a soma das distâncias percorridas pelas duas é  $200 + 120 = 320$  m.

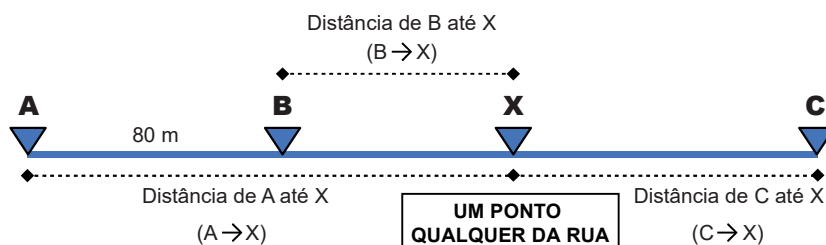
b) Se Alice, Beatriz e Cláudia se encontrarem a 150 metros do início da rua, teremos o desenho:



Esquemáticamente,  $(A \rightarrow E) + (C \rightarrow E) = 150 + 50 = 200$  m. Além disso,  $(B \rightarrow E) = 150 - 80 = 70$  m. A soma das distâncias será, portanto,  $200 + 70 = 270$  m.

c) A soma das distâncias de qualquer ponto da rua às casas de Alice e Cláudia, sempre será 200 m.

Portanto, a menor soma das distâncias percorridas será no ponto onde Beatriz andar o mínimo possível, ou seja, em sua própria casa.



$(A \rightarrow X) + (B \rightarrow X) + (C \rightarrow X) = 200 + (B \rightarrow X)$  é mínima quando  $(B \rightarrow X) = 0$ .

Logo, elas devem se encontrar a 80 m do início da rua, na casa de Beatriz.

### QUESTÃO 4

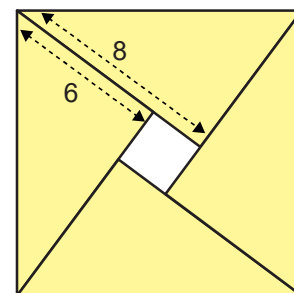
#### Solução:

a) Como os 4 triângulos são iguais, basta calcular a área da folha de cartolina e dividir por 4. Portanto, qualquer um desses triângulos tem área igual a  $\frac{6 \times 16}{4} = 24 \text{ cm}^2$ .

Alternativamente, vemos que os quatro triângulos são triângulos retângulos iguais e seus lados menores (catetos) têm medidas 6 e 8. Portanto, a área de cada um deles é igual a  $\frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$ .

b) O buraco no centro do quadrado tem lado cuja medida é igual à diferença entre as medidas dos dois catetos dos triângulos, ou seja,  $8 - 6 = 2$  cm. Logo, a área do buraco é  $2^2 = 4 \text{ cm}^2$ .

c) A área do quadrado que Janaína montou é igual à soma das áreas dos 4 triângulos, mais a área do buraco. Logo, a área desse quadrado é igual a  $4 \times 24 + 4 = 96 + 4 = 100 \text{ cm}^2$  e o lado do quadrado é  $\sqrt{100} = 10$  cm.

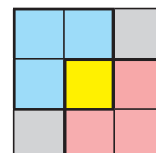


## QUESTÃO 5

### Solução:

a) Escolhendo quatro números dentre os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, a menor soma possível que podemos obter ocorre quando esses números são os menores possíveis, isto é,  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ . Portanto, Marco escreveu no quadrado destacado os números de 1 a 4. Fora desse quadrado, ele escreveu os números 5, 6, 7, 8 e 9, cuja soma é  $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$ .

b) Na figura ao lado, os dois quadrados  $2 \times 2$  destacados estão indicados com cores diferentes e a casa central, comum a esses dois quadrados, em amarelo. As casas de cor cinza, uma no canto superior direito e outra no canto inferior esquerdo, estão fora dos quadrados destacados. A soma dos números que Marco escreveu nos quadrados destacados é igual a  $21 + 26 = 47$ . Esta soma pode ser representada graficamente como:



$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{blue} & \text{blue} \\ \hline \text{blue} & \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \end{array} = 47$$

A soma de todos os números escritos por Marco é  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$

Podemos representar esta soma graficamente como:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{gray} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{gray} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{blue} & \text{blue} \\ \hline \text{blue} & \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \end{array} = 45$$

Nesta segunda soma podemos juntar mais um quadrado de cada lado do sinal  $=$ , obtendo

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{gray} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{gray} \\ \hline \end{array} + \underbrace{\begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{blue} & \text{blue} \\ \hline \text{blue} & \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \end{array}}_{47} = 45 + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array}$$

Vemos, então, que a soma dos números escritos nos cantos mais 47 é igual a 45 mais o número escrito na casa central. Logo, o número escrito na casa central é a soma dos números escritos nos cantos mais 2. A menor soma possível para os números escritos nos cantos é  $1 + 2 = 3$ , portanto o menor número que Marco pode ter escrito na casa central é  $3 + 2 = 5$ .

Um quadrado do Marco que tem esse menor valor possível no centro é

|   |   |   |
|---|---|---|
| 6 | 3 | 2 |
| 7 | 5 | 4 |
| 1 | 9 | 8 |

### Outra solução

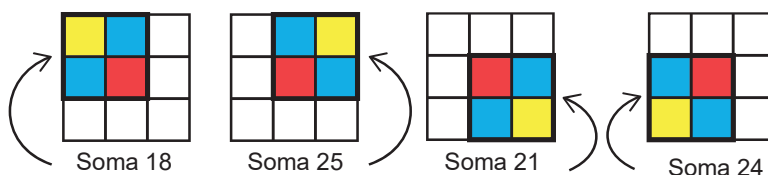
O total das somas dos dois quadrados destacados é  $21 + 26 = 47$ . Se  $x$  é o número escrito no quadrado central, então  $47 - x$  é a soma dos sete números que Marco escreveu naqueles dois quadrados. Isto ocorre porque a soma de todos os números escritos num dos quadrados destacados mais a soma de todos os números escritos no outro quadrado destacado conta duas vezes  $x$ . Se  $y$  é a soma dos dois números escritos fora dos quadrados destacados, então  $47 - x + y = 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ , logo  $x = 2 + y$ . Se  $y$  é o menor possível, então  $x$  é o menor possível. O menor valor possível de  $y$  é  $1 + 2 = 3$ ; logo, o menor valor possível para o número escrito no quadrado central é  $x = 5$ .

Outro exemplo de preenchimento:

|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 |
| 9 | 5 | 6 |
| 1 | 8 | 7 |

c) No quadriculado 3 x 3 temos quatro números nos cantos, um número no centro e quatro números na coluna do meio ou na linha do meio (excluindo o central).

Quando juntamos as quatro somas dos números escritos nos quadrados destacados, isto é, quando calculamos  $18 + 25 + 21 + 24$ , obtemos 88. Essa soma conta uma vez os números nos quatro cantos, 2 vezes os números nos quatro meios e 4 vezes o número do centro (isto é, nos quadrados destacados, os números dos cantos aparecem uma vez só em cada quadrado destacado, o número do centro aparece em todos os quatro quadrados, e cada um dos números dos meios aparece apenas em dois quadrados – verifique na figura abaixo).



Por outro lado, sabemos que a soma dos números de 1 a 9, escritos no tabuleiro 3 x 3, é 45. Assim, contando duas vezes cada número, a soma é  $2 \times 45 = 90$ .

Portanto,

2 vezes números dos cantos + 2 vezes números dos meios + 2 vezes número do centro = 90. Vimos que

1 vez números dos cantos + 2 vezes números dos meios + 4 vezes número do centro = 88.

Como  $90 = 88 + 2$ , temos

2 vezes números dos cantos + 2 vezes números dos meios + 2 vezes número do centro  
 = 1 vez números dos cantos + 2 vezes números dos meios + 4 vezes número do centro + 2.

Simplificando, chegamos a

1 vez os números dos cantos = 2 vezes o número do centro + 2. Mas, o enunciado nos diz que a soma dos números nos quatro cantos é 16; logo,  $16 = 2 \text{ vezes o número do centro} + 2$ . Assim,

$8 = \text{número do centro} + 1$ , ou seja, o número do centro é igual a 7.

A figura ao lado mostra uma possibilidade de preenchimento do quadriculado (em todas elas, o número no centro é obrigatoriamente 7). Para obter uma solução, escrevemos 7 no centro e, nos cantos, escolhemos quatro números cuja soma é 16, por exemplo 1, 2, 4 e 9. Os números que restam para ficar nos meios são 3, 5, 6 e 8. Fazendo algumas tentativas controladas, obtemos uma solução como a apresentada.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 4 |
| 5 | 7 | 6 |
| 9 | 3 | 2 |

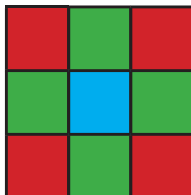
### Outra solução

Se 16 é a soma dos quatro números escritos nos cantos,  $x$  o número escrito no centro e  $y$  a soma dos quatro números restantes, temos

$$\begin{cases} 16 + x + y = 45 \\ 16 + 4x + 2y = 18 + 21 + 24 + 25 = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32 + 2x + 2y = 90 \\ 16 + 4x + 2y = 88 \end{cases} \Rightarrow 16 - 2x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{14}{2} = 7.$$

A primeira equação acima refere-se à soma dos nove números escritos no tabuleiro. A segunda equação refere-se ao total das quatro somas nos quadrados destacados, na qual os números dos cantos aparecem uma única vez, os números do meio aparecem duas vezes e o número central aparece quatro vezes. Multiplicando a primeira equação por 2 e subtraindo uma equação da outra, eliminamos  $y$ .

### Outra Solução:



Ao somarmos o números que aparecem nos quatro cantos (casas vermelhas) com os totais dos quatro quadrados  $2 \times 2$  destacados (cada um com uma casa vermelha, duas casas verdes e uma casa azul), vemos que os números correspondentes às casas vermelhas são contados duas vezes, os que aparecem nas casas verdes são contados duas vezes e o que aparece na casa azul é contado quatro vezes, ou seja, essa soma nos dá duas vezes a soma de todos os números que preenchem o quadrado  $3 \times 3$  mais duas vezes o número da casa azul. Assim, concluímos que o número da casa azul é

$$((16 + 18 + 25 + 21 + 24) - 2 \times 45)/2 = (104 - 90)/2 = 7.$$

Um outro preenchimento possível é

|   |   |   |
|---|---|---|
| 2 | 6 | 4 |
| 3 | 7 | 8 |
| 9 | 5 | 1 |

## QUESTÃO 6

### Solução:

a) Para que a abelha volte a casa inicial em três passos ela deve ir para a casa rosa (abaixo e à esquerda), em seguida deve subir para a casa amarela (acima) e, por fim, retornar à casa inicial (abaixo e à direita).

b) Observe que de qualquer casa rosa (R) da colmeia a abelha só pode ir, com os movimentos permitidos, para casas amarelas (A). Das casas amarelas a abelha só pode ir para casas brancas (B) e das casas brancas ela só pode ir para casas rosas. Assim, partindo de uma casa B, a sequência de cores é RABRABRA, ou seja, após 8 passos ela estará em uma casa amarela.

Em outras palavras, de R só se pode ir para A, de A para B e de B para R; logo, partindo de B, o movimento é descrito por RABRABRA e a casa de chegada, depois de 8 passos, é A.

c) A colmeia tem 6 casas rosas, 7 casas amarelas e 6 casas brancas. Partindo de uma casa branca, temos a sequência de casas visitadas BRA BRA BRA BRA BRA BRA B, ou seja, depois de visitar 6 casas brancas, 6 rosas e 6 amarelas ela deve ir para uma branca, que com certeza é repetida, além de não ter visitado pelo menos uma casa amarela.

