

Solução da prova da 2ª Fase

QUESTÃO 1

Solução:

a) Como Maria ganhou um doce, ela fez 8 pontos. A menos da ordem, só existe uma maneira de decompor 8 em três parcelas em que cada parcela pertence ao conjunto $\{1, 2, 3\}$; nesse caso, as parcelas são 2, 3 e 3. Assim, os valores dos peixes pescados por Maria são 2, 3 e 3 e há 3 maneiras de isso ter acontecido:

1º peixe	2º peixe	3º peixe	total
2	3	3	8
3	2	3	8
3	3	2	8

b) Para ganhar uma pipoca é necessário fazer 7 pontos. Há 6 maneiras diferentes de conseguir isso:

1º peixe	2º peixe	3º peixe
1	3	3
3	1	3
3	3	1
2	2	3
2	3	2
3	2	2

c) O prêmio que sai com maior frequência é a pamonha, pois há 7 maneiras diferentes de conseguir somar 6 pontos:

1º peixe	2º peixe	3º peixe
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1
2	2	2

Os demais prêmios têm menor chance de sair, como mostra o quadro abaixo:

Total de pontos	3	4	5	6	7	8	9
prêmio	chapéu	cuscuz	bolo	pamonha	pipoca	doce	lenço
Número de maneiras de se obter os pontos	1 maneira $(1+1+1)$	3 maneiras $(1+1+2=$ $1+2+1=$ $2+1+1)$	6 maneiras $(1+1+3=$ $1+3+1=$ $3+1+1=$ $1+2+2=$ $2+1+2=$ $2+2+1)$	7 maneiras $(1+2+3=$ $1+3+2=$ $2+1+3=$ $2+3+1=$ $3+1+2=$ $3+2+1=$ $2+2+2)$	6 maneiras $(1+3+3=$ $3+1+3=$ $3+3+1=$ $2+2+3=$ $2+3+2=$ $3+2+2)$	3 maneiras $(2+3+3=$ $3+2+3=$ $3+3+2)$	1 maneira $(3+3+3)$

QUESTÃO 2

Solução:

a) Se o participante obtiver 6, 5 e 2, nessa ordem,

- o 6 obtido na primeira jogada leva à casa 6;
- o 5 obtido na segunda jogada leva à casa 11, que é amarela; a seta faz voltar à casa 3;
- o 2 obtido na terceira jogada leva à casa 5, que, novamente é amarela; a seta na casa 5 faz avançar à casa 13.

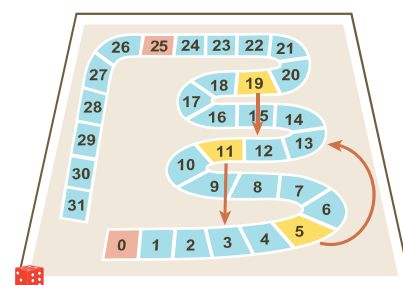
Portanto, com essa sequência, a posição final do participante será a casa 13.

Resumidamente, saiu 6: (casa 0 → casa 6), saiu 5: (casa 6 → casa 11 (amarela) → casa 3) e saiu 2: (casa 3 → casa 5 (amarela) → casa 13).

b) Uma forma de chegar ao 25 em quatro jogadas, é ir o mais longe possível na primeira jogada ($4 \times 6 = 24 < 25$ e as casas 11 e 19 fazem o jogador voltar para trás). Isso ocorre quando obtemos 5 nessa jogada, uma vez que da casa 5 vamos para a casa 13. A partir da casa 13 precisamos obter 12 pontos, distribuídos em três jogadas e de forma a evitar a casa 19. Temos, no quadro, algumas dessas possibilidades.

1ª Jogada	2ª Jogada	3ª Jogada	4ª Jogada
5	4	3	5
5	4	4	4
5	3	6	3
5	5	5	2
5	5	6	1

c) Vejamos por que é impossível chegar à casa 25 em apenas três jogadas. Como em três jogadas podemos obter, com os dados, no máximo 18 pontos, para chegar a 25 teremos que obter 5 pontos na primeira jogada para chegar à casa 13. Mesmo com essa otimização não poderemos chegar à casa 25 em duas jogadas, uma vez que os 12 pontos necessários para isso somente poderão ser obtidos com duas jogadas de 6 pontos, que levarão à casa 19, obrigando a voltar à casa 12.



QUESTÃO 3

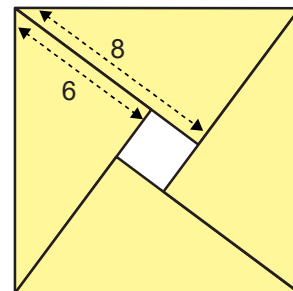
Solução:

a) Como os 4 triângulos são iguais, basta calcular a área da folha de cartolina e dividir por 4. Portanto, qualquer um desses triângulos tem área igual a $\frac{6 \times 16}{4} = 24 \text{ cm}^2$.

Alternativamente, vemos que os quatro triângulos são triângulos retângulos iguais e seus lados menores (catetos) têm medidas 6 e 8. Portanto, a área de cada um deles é igual a $\frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$.

b) O buraco no centro do quadrado tem lado cuja medida é igual à diferença entre as medidas dos dois catetos dos triângulos, ou seja, $8 - 6 = 2 \text{ cm}$. Logo, a área do buraco é $2^2 = 4 \text{ cm}^2$.

c) A área do quadrado que Janaína montou é igual à soma das áreas dos 4 triângulos, mais a área do buraco. Logo, a área desse quadrado é igual a $4 \times 24 + 4 = 96 + 4 = 100 \text{ cm}^2$ e o lado do quadrado é $\sqrt{100} = 10 \text{ cm}$.



QUESTÃO 4

Solução:

a) Aparecerá o número 6, observe: $99 \xrightarrow{A} 993 \xrightarrow{S} 21 \xrightarrow{A} 213 \xrightarrow{S} 6$

b) Podemos apertar a tecla [A] n vezes de modo a transformar o número 99 no número 99333...3 formado com dois "9's" seguidos de n "3's" para enfim apertar a tecla [S] e transformar esse número no número $(18 + 3n)$.

Agora é só determinar o valor de n para que tenhamos: $18 + 3n = 2022 \Rightarrow 3n = 2004 \Rightarrow n = 668$

Portanto, para transformar 99 em 2022, apertamos a tecla [A] 668 vezes e, em seguida, apertamos a tecla [S].

Em suma, para chegar em 2022 a partir de 99 é necessário usar [S] pelo menos uma vez; se isso for realizado logo na primeira vez, o 99 inicial vai contribuir com 18. A parcela restante é $2022 - 18 = 2004$ é divisível por 3 e chegamos às 668, o número de vezes que a tecla [A] deve ser apertada.

c) A soma dos algarismos de um número deixa o mesmo resto na divisão por 3 que o número original. Além disso, ao acrescentarmos um algarismo 3 no final de um número, a soma de seus algarismos continua deixando o mesmo resto na divisão por 3 que o número original.

De fato, utilizaremos um exemplo com 6 algarismos, mas a generalização é essencialmente a mesma:

$$N = \overline{abcdef} = 100.000a + 10.000b + 1.000c + 100d + 10e + f$$

$$\Rightarrow N = (99999a + 9999b + 999c + 99d + 9e) + (a + b + c + d + e + f)$$

$$\text{Se } a + b + c + d + e + f = 3q + r$$

$$\Rightarrow N = 3 \times (33333a + 3333b + 333c + 33d + 3e) + 3q + r$$

$\Rightarrow N = 3p + 3q + r \Rightarrow$ O resto de N na divisão por 3 também é r . Vale também a recíproca: se o resto de N na divisão por 3 é r , então $a + b + c + d + e + f$ tem o mesmo resto r na divisão por 3.

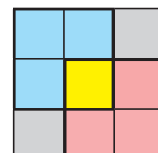
Portanto, todos os números gerados após sucessivas aplicações de teclas [S] e [A] deixam o mesmo resto na divisão por 3 que o número original. O número 99 deixa resto 0 na divisão por 3 e o número 22 deixa resto 1 na divisão por 3; logo, não é possível partir de 99 e chegar em 22.

QUESTÃO 5

Solução:

a) Escolhendo quatro números dentre os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, a menor soma possível que podemos obter ocorre quando esses números são os menores possíveis, isto é, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Portanto, Marco escreveu no quadrado destacado os números de 1 a 4. Fora desse quadrado, ele escreveu os números 5, 6, 7, 8 e 9, cuja soma é $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$.

b) Na figura ao lado, os dois quadrados 2×2 destacados estão indicados com cores diferentes e a casa central, comum a esses dois quadrados, em amarelo. As casas de cor cinza, uma no canto superior direito e outra no canto inferior esquerdo, estão fora dos quadrados destacados. A soma dos números que Marco escreveu nos quadrados destacados é igual a $21 + 26 = 47$. Esta soma pode ser representada graficamente como:



$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{blue} & \text{blue} \\ \hline \text{blue} & \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \end{array} = 47$$

A soma de todos os números escritos por Marco é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$

Podemos representar esta soma graficamente como:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{gray} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{gray} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{blue} & \text{blue} \\ \hline \text{blue} & \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \end{array} = 45$$

Nesta segunda soma podemos juntar mais um quadrado de cada lado do sinal $=$, obtendo

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{gray} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{gray} \\ \hline \end{array} + \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{yellow} & \text{yellow} \\ \hline \text{blue} & \text{red} \\ \hline \end{array}} = 45 + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array}$$

$\swarrow$
 47

Vemos, então, que a soma dos números escritos nos cantos mais 47 é igual a 45 mais o número escrito na casa central. Logo, o número escrito na casa central é a soma dos números escritos nos cantos mais 2. A menor soma possível para os números escritos nos cantos é $1 + 2 = 3$, portanto o menor número que Marco pode ter escrito na casa central é $3 + 2 = 5$.

Um quadrado do Marco que tem esse menor valor possível no centro é

6	3	2
7	5	4
1	9	8

Outra solução

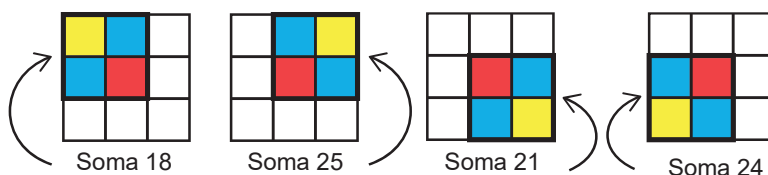
O total das somas dos dois quadrados destacados é $21 + 26 = 47$. Se x é o número escrito no quadrado central, então $47 - x$ é a soma dos sete números que Marco escreveu naqueles dois quadrados. Isto ocorre porque a soma de todos os números escritos num dos quadrados destacados mais a soma de todos os números escritos no outro quadrado destacado conta duas vezes x . Se y é a soma dos dois números escritos fora dos quadrados destacados, então $47 - x + y = 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$, logo $x = 2 + y$. Se y é o menor possível, então x é o menor possível. O menor valor possível de y é $1 + 2 = 3$; logo, o menor valor possível para o número escrito no quadrado central é $x = 5$.

Outro exemplo de preenchimento:

4	3	2
9	5	6
1	8	7

c) No quadriculado 3 x 3 temos quatro números nos cantos, um número no centro e quatro números na coluna do meio ou na linha do meio (excluindo o central).

Quando juntamos as quatro somas dos números escritos nos quadrados destacados, isto é, quando calculamos $18 + 25 + 21 + 24$, obtemos 88. Essa soma conta uma vez os números nos quatro cantos, 2 vezes os números nos quatro meios e 4 vezes o número do centro (isto é, nos quadrados destacados, os números dos cantos aparecem uma vez só em cada quadrado destacado, o número do centro aparece em todos os quatro quadrados, e cada um dos números dos meios aparece apenas em dois quadrados – verifique na figura abaixo).



Por outro lado, sabemos que a soma dos números de 1 a 9, escritos no tabuleiro 3 x 3, é 45. Assim, contando duas vezes cada número, a soma é $2 \times 45 = 90$.

Portanto,

2 vezes números dos cantos + 2 vezes números dos meios + 2 vezes número do centro = 90. Vimos que

1 vez números dos cantos + 2 vezes números dos meios + 4 vezes número do centro = 88.

Como $90 = 88 + 2$, temos

2 vezes números dos cantos + 2 vezes números dos meios + 2 vezes número do centro
 = 1 vez números dos cantos + 2 vezes números dos meios + 4 vezes número do centro + 2.

Simplificando, chegamos a

1 vez os números dos cantos = 2 vezes o número do centro + 2. Mas, o enunciado nos diz que a soma dos números nos quatro cantos é 16; logo, $16 = 2 \text{ vezes o número do centro} + 2$. Assim,

$8 = \text{número do centro} + 1$, ou seja, o número do centro é igual a 7.

A figura ao lado mostra uma possibilidade de preenchimento do quadriculado (em todas elas, o número no centro é obrigatoriamente 7).

2	6	4
3	7	8
9	5	1

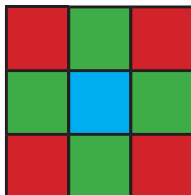
Outra solução

Se 16 é a soma dos quatro números escritos nos cantos, x o número escrito no centro e y a soma dos quatro números restantes, temos

$$\begin{cases} 16 + x + y = 45 \\ 16 + 4x + 2y = 18 + 21 + 24 + 25 = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32 + 2x + 2y = 90 \\ 16 + 4x + 2y = 88 \end{cases} \Rightarrow 16 - 2x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{14}{2} = 7.$$

A primeira equação acima refere-se à soma dos nove números escritos no tabuleiro. A segunda equação refere-se ao total das quatro somas nos quadrados destacados, na qual os números dos cantos aparecem uma única vez, os números do meio aparecem duas vezes e o número central aparece quatro vezes. Multiplicando a primeira equação por 2 e subtraindo uma equação da outra, eliminamos y .

Outra Solução:



Ao somarmos o números que aparecem nos quatro cantos (casas vermelhas) com os totais dos quatro quadrados 2×2 destacados (cada um com uma casa vermelha, duas casas verdes e uma casa azul), vemos que os números correspondentes às casas vermelhas são contados duas vezes, os que aparecem nas casas verdes são contados duas vezes e o que aparece na casa azul é contado quatro vezes, ou seja, essa soma nos dá duas vezes a soma de todos os números que preenchem o quadrado 3×3 mais duas vezes o número da casa azul. Assim, concluímos que o número da casa azul é

$$((16 + 18 + 25 + 21 + 24) - 2 \times 45)/2 = (104 - 90)/2 = 7.$$

QUESTÃO 6

Solução:

a) Se o voo direto entre Santiago e Brasília fosse feito pela CONTI, teríamos o diagrama ao lado e seria possível viajar de La Paz a Brasília pela CONTI, o que é não é possível de acordo com o enunciado. Logo, o trajeto Santiago-Brasília é feito pela TRACE.

b) A companhia TRACE faz os voos diretos (em ambos os sentidos) em pelo menos um dos trechos: Buenos Aires – La Paz ou Buenos Aires – Brasília. Caso contrário, se os voos em ambos os trechos fossem feitos pela CONTI, seria possível viajar entre La Paz e Brasília pela CONTI com conexão em Buenos Aires (como indicado no diagrama abaixo), o que não é possível de acordo com o enunciado.

Assim, pelo menos uma das seguintes viagens é possível:

- Buenos Aires $\leftarrow$ TRACE $\rightarrow$ Brasília (voo direto) ou
- Buenos Aires $\leftarrow$ TRACE $\rightarrow$ La Paz $\leftarrow$ TRACE $\rightarrow$ Brasília (com escala em La Paz).



c) O argumento de (b) mostra que para qualquer capital X, não apenas Buenos Aires, pelo menos uma entre as conexões X-Brasília ou X-La Paz é da TRACE. Se C e D são duas capitais,

- TRACE faz C-Brasília e D-Brasília: Aqui TRACE faz C-D com escala em Brasília e, analogamente, para C-La Paz e D-La Paz.
- TRACE faz C-Brasília e D-La Paz, com C e D distintas: Se TRACE faz C-D, há voo direto entre elas e terminou. Caso contrário, CONTI faz C-D e, então, CONTI não faz pelo menos uma entre C-La Paz ou D-Brasília (se fizesse as duas, faria La Paz-C-D-Brasília), contradizendo o enunciado. Logo, pelo menos uma dessas conexões é da TRACE e o resultado segue.

Mais detalhadamente:

Entre La Paz e Brasília os voos diretos são feitos pela TRACE. Para outras duas capitais quaisquer dividimos a análise em casos:

Caso 1. Viagens entre La Paz e outra capital C diferente de Brasília.

Nesse caso, pela análise feita no item b), podemos trocar Buenos Aires por outra capital e proceder de modo análogo ao que foi feito acima, sempre é possível realizar **pelo menos uma** das seguintes viagens:

C $\leftrightarrow$ TRACE $\leftrightarrow$ La Paz (voo direto).

C $\leftrightarrow$ TRACE $\leftrightarrow$ Brasília $\leftrightarrow$ TRACE $\leftrightarrow$ La Paz (uma conexão em Brasília).

Caso 2. Viagens entre Brasília e outra capital C diferente de La Paz.

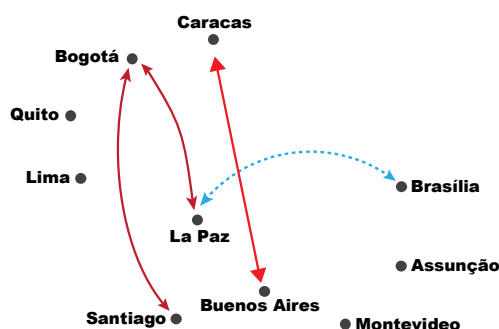
Esse é precisamente o que ocorre com a cidade C = Buenos Aires no item b) e, de forma análoga ao Caso 1, sempre é possível realizar **pelo menos uma** das seguintes viagens:

C $\leftrightarrow$ TRACE $\leftrightarrow$ Brasília (voo direto).

C $\leftrightarrow$ TRACE $\leftrightarrow$ La Paz $\leftrightarrow$ TRACE $\leftrightarrow$ Brasília (uma conexão em La Paz).

Caso 3. Viagens entre duas capitais C1 e C2, diferentes de La Paz e de Brasília.

Para facilitar a análise, fixamos C1 = Caracas e C2 = Buenos Aires, não haverá perda de generalidade, os outros casos são análogos. Caso a TRACE não faça os voos diretos entre Caracas e Buenos Aires, teríamos uma situação como a indicada no seguinte diagrama:



Subcaso 3.1. A TRACE faz as seguintes viagens: *Buenos Aires* $\longleftrightarrow$ *La Paz* $\longleftrightarrow$ *Caracas*.

Nesse caso seria possível viajar entre Buenos Aires e Caracas com uma conexão em La Paz.

Subcaso 3.2. Pelo menos um dos trechos *Buenos Aires* — *La Paz* ou *La Paz* — *Caracas* é feito pela CONTI. Aqui estão as possibilidades:



Nesse caso, os trechos *Buenos Aires* – *Brasília* e *Brasília* – *Caracas* serão feitos pela TRACE, pois, caso contrário, seria possível viajar com escalas entre La Paz e Brasília, o que não é possível pelo enunciado. Portanto, nessa situação, a TRACE fará as viagens: *Buenos Aires* $\longleftrightarrow$ *Brasília* $\longleftrightarrow$ *Caracas*, ou seja, seria possível viajar entre Buenos Aires e Caracas com uma conexão em Brasília.