

Solução da prova da 2ª Fase

QUESTÃO 1

Solução:

a) Ordenando os algarismos de 373 em ordem decrescente, obtemos 733. Ordenando-os em ordem crescente, obtemos 337. O resultado fornecido pela máquina é $733 - 337 = 396$.

b) **1ª solução:** Suponhamos que os algarismos do número que entra na máquina, em ordem decrescente, sejam a , b e c . A condição de que os algarismos não são todos iguais garante que, uma vez colocados em ordem decrescente (a, b, c) , tem-se $a > c$. Consideremos a conta armada:

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad c \\ - c \quad b \quad a \\ \hline \end{array}$$

Como $a > c$, é preciso tomar emprestada uma dezena e calcular $10 + c - a$.

$$\begin{array}{r} a \quad b-1 \quad c \\ - c \quad b \quad a \\ \hline 10 + c - a \end{array}$$

Para subtrair $b - 1$ de b , é preciso tomar uma centena emprestada e calcular $10 + b - 1 - b$, que sempre dá 9.

$$\begin{array}{r} a-1 \quad b-1 \quad c \\ - c \quad b \quad a \\ \hline 9 \quad 10 + c - a \end{array}$$

Finalmente, o algarismo das centenas será $a - 1 - c$.

$$\begin{array}{r} a-1 \quad b-1 \quad c \\ - c \quad b \quad a \\ \hline a-1-c \quad 9 \quad 10 + c - a \end{array}$$

Para o resultado ser 099, basta que $10 + c - a$ seja igual a 9, ou seja, que $a - c$ seja igual a 1 (note que, nesse caso, o algarismo das centenas será $a - 1 - c$, ou seja, 0). Portanto, qualquer número de três algarismos em que a diferença entre o maior e o menor algarismo seja 1, produz 099 na saída da máquina. Alguns exemplos de tais números: 334, 676, 100.

2ª solução: Suponhamos que os algarismos do número que entra na máquina, em ordem decrescente, sejam a , b e c . O resultado fornecido é

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$$

Portanto, para que o resultado seja 099, basta que se tenha $99(a - c) = 99$, ou seja, $a - c = 1$. Assim, qualquer número de três algarismos em que a diferença entre o maior e o menor algarismo seja 1, produz 099 na saída da máquina.

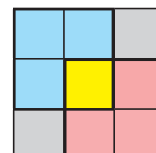
c) Como visto na 1ª solução acima, se os algarismos do número que entra na máquina, em ordem decrescente, são a , b e c , o resultado fornecido é $\underline{a-1-c} \quad \underline{9} \quad \underline{10+c-a}$. Logo, o algarismo das dezenas é sempre 9 e a soma do algarismo das unidades com o das centenas é $a - 1 - c + 10 + c - a = 9$.

QUESTÃO 2

Solução:

a) Escolhendo quatro números dentre os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, a menor soma possível que podemos obter ocorre quando esses números são os menores possíveis, isto é, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Portanto, Marco escreveu no quadrado destacado os números de 1 a 4. Fora desse quadrado, ele escreveu os números 5, 6, 7, 8 e 9, cuja soma é $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$.

b) Na figura ao lado, os dois quadrados 2×2 destacados estão indicados com cores diferentes e a casa central, comum a esses dois quadrados, em amarelo. As casas de cor cinza, uma no canto superior direito e outra no canto inferior esquerdo, estão fora dos quadrados destacados. A soma dos números que Marco escreveu nos quadrados destacados é igual a $21 + 26 = 47$. Esta soma pode ser representada graficamente como:



$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{blue} & \text{blue} \\ \hline \text{blue} & \text{blue} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \end{array} = 47$$

A soma de todos os números escritos por Marco é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$

Podemos representar esta soma graficamente como:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{gray} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{gray} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{blue} & \text{blue} \\ \hline \text{blue} & \text{blue} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \end{array} = 45$$

Nesta segunda soma podemos juntar mais um quadrado de cada lado do sinal $=$, obtendo

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{gray} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{gray} \\ \hline \end{array} + \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{yellow} & \text{yellow} \\ \hline \text{blue} & \text{blue} \\ \hline \text{red} & \text{red} \\ \hline \end{array}} = 45 + \begin{array}{|c|} \hline \text{yellow} \\ \hline \end{array}$$

$\swarrow$
 47

Vemos, então, que a soma dos números escritos nos cantos mais 47 é igual a 45 mais o número escrito na casa central. Logo, o número escrito na casa central é a soma dos números escritos nos cantos mais 2. A menor soma possível para os números escritos nos cantos é $1 + 2 = 3$, portanto o menor número que Marco pode ter escrito na casa central é $3 + 2 = 5$.

Um quadrado do Marco que tem esse menor valor possível no centro é

6	3	2
7	5	4
1	9	8

Outra solução

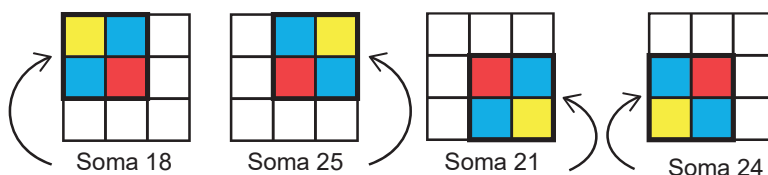
O total das somas dos dois quadrados destacados é $21 + 26 = 47$. Se x é o número escrito no quadrado central, então $47 - x$ é a soma dos sete números que Marco escreveu naqueles dois quadrados. Isto ocorre porque a soma de todos os números escritos num dos quadrados destacados mais a soma de todos os números escritos no outro quadrado destacado conta duas vezes x . Se y é a soma dos dois números escritos fora dos quadrados destacados, então $47 - x + y = 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$, logo $x = 2 + y$. Se y é o menor possível, então x é o menor possível. O menor valor possível de y é $1 + 2 = 3$; logo, o menor valor possível para o número escrito no quadrado central é $x = 5$.

Outro exemplo de preenchimento:

4	3	2
9	5	6
1	8	7

c) No quadriculado 3 x 3 temos quatro números nos cantos, um número no centro e quatro números na coluna do meio ou na linha do meio (excluindo o central).

Quando juntamos as quatro somas dos números escritos nos quadrados destacados, isto é, quando calculamos $18 + 25 + 21 + 24$, obtemos 88. Essa soma conta uma vez os números nos quatro cantos, 2 vezes os números nos quatro meios e 4 vezes o número do centro (isto é, nos quadrados destacados, os números dos cantos aparecem uma vez só em cada quadrado destacado, o número do centro aparece em todos os quatro quadrados, e cada um dos números dos meios aparece apenas em dois quadrados – verifique na figura abaixo).



Por outro lado, sabemos que a soma dos números de 1 a 9, escritos no tabuleiro 3 x 3, é 45. Assim, contando duas vezes cada número, a soma é $2 \times 45 = 90$.

Portanto,

2 vezes números dos cantos + 2 vezes números dos meios + 2 vezes número do centro = 90. Vimos que

1 vez números dos cantos + 2 vezes números dos meios + 4 vezes número do centro = 88.

Como $90 = 88 + 2$, temos

2 vezes números dos cantos + 2 vezes números dos meios + 2 vezes número do centro
 = 1 vez números dos cantos + 2 vezes números dos meios + 4 vezes número do centro + 2.

Simplificando, chegamos a

1 vez os números dos cantos = 2 vezes o número do centro + 2. Mas, o enunciado nos diz que a soma dos números nos quatro cantos é 16; logo, $16 = 2 \text{ vezes o número do centro} + 2$. Assim,

$8 = \text{número do centro} + 1$, ou seja, o número do centro é igual a 7.

A figura ao lado mostra uma possibilidade de preenchimento do quadriculado (em todas elas, o número no centro é obrigatoriamente 7).

2	6	4
3	7	8
9	5	1

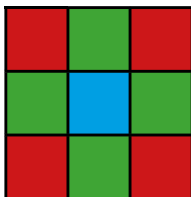
Outra solução

Se 16 é a soma dos quatro números escritos nos cantos, x o número escrito no centro e y a soma dos quatro números restantes, temos

$$\begin{cases} 16 + x + y = 45 \\ 16 + 4x + 2y = 18 + 21 + 24 + 25 = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32 + 2x + 2y = 90 \\ 16 + 4x + 2y = 88 \end{cases} \Rightarrow 16 - 2x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{14}{2} = 7.$$

A primeira equação acima refere-se à soma dos nove números escritos no tabuleiro. A segunda equação refere-se ao total das quatro somas nos quadrados destacados, na qual os números dos cantos aparecem uma única vez, os números do meio aparecem duas vezes e o número central aparece quatro vezes. Multiplicando a primeira equação por 2 e subtraindo uma equação da outra, eliminamos y .

Outra Solução:



Ao somarmos o números que aparecem nos quatro cantos (casas vermelhas) com os totais dos quatro quadrados 2×2 destacados (cada um com uma casa vermelha, duas casas verdes e uma casa azul), vemos que os números correspondentes às casas vermelhas são contados duas vezes, os que aparecem nas casas verdes são contados duas vezes e o que aparece na casa azul é contado quatro vezes, ou seja, essa soma nos dá duas vezes a soma de todos os números que preenchem o quadrado 3×3 mais duas vezes o número da casa azul. Assim, concluímos que o número da casa azul é

$$((16 + 18 + 25 + 21 + 24) - 2 \times 45)/2 = (104 - 90)/2 = 7.$$

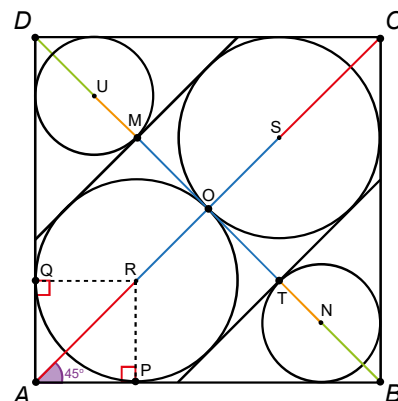
QUESTÃO 3

Solução:

A circunferência de centro R e raio a é tangente aos lados do quadrado que têm em comum o vértice A ; consequentemente, o centro R pertence à bissetriz do ângulo $\widehat{BAD}$ que está contida na diagonal do quadrado $ABCD$ e a distância do centro ao vértice A é $AR = a\sqrt{2}$.

Como esse argumento se aplica a todas as circunferências da figura, temos que os centros R e S pertencem à diagonal AC do quadrado $ABCD$ e os centros U e N à diagonal BD .

O ponto de tangência das circunferências de raio R e S é o centro do quadrado, ponto de encontro das duas diagonais.



a) Sendo c o comprimento do segmento BT , congruente ao segmento DM , ambos com comprimento $c = b + b\sqrt{2}$, temos que o comprimento da diagonal BD é igual a $2c + 2a$, ou seja, $2(a + c)$.

b) O comprimento do lado do quadrado $ABCD$ é 1, logo, suas diagonais têm comprimento $\sqrt{2}$.

O comprimento da diagonal AC pode ser escrito em função do raio a e temos:

$$\sqrt{2} = AR + RO + OS + SC = 2a + 2a\sqrt{2}$$

$$\text{Daí: } a = \frac{\sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{2(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)} = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2}.$$

c) O comprimento $\sqrt{2}$ da diagonal AC é dado, em função de a e de b , por:

$$\sqrt{2} = 2a + 2b(1 + \sqrt{2}). \text{ Usando o item b),}$$

$$\text{Daí: } b = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1 + \sqrt{2}} \text{ ou } b = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Outra solução:

Para facilitar a escrita, vamos primeiro retirar algumas informações da figura. Várias delas são visualmente imediatas por questões de simetria; no entanto, é importante justificá-las com algum detalhe, o que fazemos a seguir.

1. Em uma das circunferências de raio a marcamos o centro R e os pontos de tangência P e Q . Os ângulos marcados em P e Q são retos e logo $APRQ$ é um quadrado de lado a . O mesmo vale para o quadrado de vértices opostos C e S , onde S é o centro da outra circunferência de raio a , e logo $AR = CS$.

2. A diagonal AR do quadrado $APRQ$ faz um ângulo de 45° com o lado AP ; logo, R está na diagonal AC e o mesmo vale para S .

3. Como a reta que une os centros de duas circunferências tangentes passa pelo ponto de tangência, concluímos que AC passa por O .

4. Temos

$$OA = OR + RA = OS + SC = OC$$

e segue que O é o ponto médio da diagonal AC , ou seja, O é o centro do quadrado.

5. O triângulo APR é retângulo; pelo teorema de Pitágoras temos

$$AR^2 = AP^2 + PR^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

e então $AR = \sqrt{2}a = CS$.

6. Como antes, temos que a diagonal BD passa pelos centros N e U das circunferências de raio b e que $BN = DU = \sqrt{2}b$.

Então,

$$BT = DM = c = TN + NB = b + \sqrt{2}b = (1 + \sqrt{2})b$$

onde M e T são os pontos de tangência indicados na figura.

7. A diagonal BD passa pelo ponto O ; como em um quadrado as diagonais são perpendiculares, segue que BC é tangente às circunferências de centros R e S em O .

8. Como as retas tangentes às circunferências menores em M e T são paralelas a RS , segue que $OM = OT = a$. Em particular, vemos que

$$c = BT = AR = CS.$$

Solução:

a) Temos

$$AC = BD = BT + TM + MD = c + 2a + c = 2(a + c)$$

b) O teorema de Pitágoras mostra que $AC = \sqrt{2}$. Por outro lado,

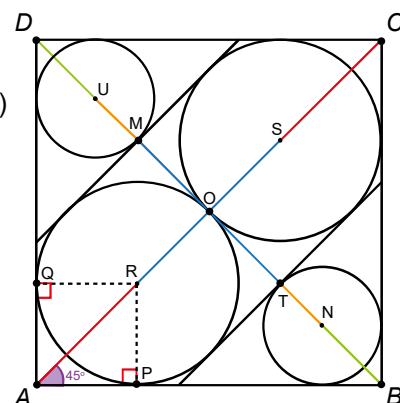
$$AC = AR + RO + OS + SC = 2(AR + RO)$$

ou seja,

$$\sqrt{2} = 2(\sqrt{2}a + a) = 2(1 + \sqrt{2})a$$

e, então,

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$



Como $BT = AR = c$, usando o valor de a encontrado no item b), temos

$$(1 + \sqrt{2})b = \sqrt{2}a = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

e, assim,

$$b = \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^2} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

Notamos, como curiosidade, que $b = (\sqrt{2} - 1)^2 = c^2$.

QUESTÃO 4

Primeira Solução:

a) Os zerímpares de dois algarismos são precisamente os números que possuem apenas um algarismo zero que figura nas unidades: 10, 20, 30, ..., 90. Portanto, existem 9 números zerímpares de 2 algarismos.

b) Os zerímpares de 3 algarismos podem apresentar apenas um algarismo 0, que pode ocupar tanto as dezenas quando as unidades. Em ambos os casos, o algarismo das centenas pode ser escolhido de 9 formas e o outro algarismo não nulo também de 9 formas. Portanto, há $2 \cdot 9 \cdot 9 = 162$ números zerímpares de 3 algarismos.

c) Se $\overline{abcde}$ é um zerímpar de 5 algarismos e e é não nulo, então $\overline{abcd}$ é um zerímpar de 4 algarismos. Em virtude da informação do enunciado, existem $2196 \cdot 9 = 19764$ números dessa forma, pois e pode ser escolhido de 9 formas distintas. Se e é zero, o número $\overline{abcd}$ deve possuir uma quantidade par de algarismos zero. Como existem $9 \cdot 10^3 = 9000$ números de 4 algarismos e 2196 possuem uma quantidade ímpar de algarismos zero, existem $9000 - 2196 = 6804$ opções para $\overline{abcd}$. Portanto, existem $19764 + 6804 = 26568$ números zerímpares de 5 algarismos.

Segunda Solução:

Se a_n denota o número de zerímpares de n algarismos e b_n o número dos demais números de n algarismos, então $a_n + b_n = 9 \cdot 10^{n-1}$. Além disso, se um número zerímpar de n algarismos termina em 0, podemos escolher os seus primeiros $n - 1$ algarismos de

$$b_{n-1} = 9 \cdot 10^{n-2} - a_{n-1}$$

formas. Por outro lado, se ele não termina em 0, temos 9 opções para escolhermos o algarismo das unidades e a_{n-1} formas de escolhermos os primeiros $n - 1$ algarismos. Assim,

$$a_n = 9a_{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} - a_{n-1} = 8a_{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} \quad (*)$$

Uma maneira de resolver a recorrência acima é a seguinte: Sejam a_n e b_n como definidos; em particular, $a_1 = 0$ e $b_1 = 9$. Temos $a_n + b_n = 9 \cdot 10^{n-1}$ e as recorrências $a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1}$ e $b_n = 9b_{n-1} + a_{n-1}$. Logo $a_n - b_n = 8(a_{n-1} - b_{n-1})$;

iterando, chegamos a $a_n - b_n = 8_{n-1}(a_1 - b_1) = -9 \cdot 8^{n-1}$ e segue que $a_n = 9 \cdot \frac{(10^{n-1} - 8^{n-1})}{2}$ para todo $n \geq 1$.

criar a sequência auxiliar $C_k = \frac{a_k}{8^k}$. A partir da recorrência(*), temos

$$C_n = C_{n-1} + \frac{9}{8^2} \cdot \frac{10^{n-2}}{8^{n-2}}$$

Somando as equações correspondendo a $c_n, c_{n-1}, \dots, c_2$, obtemos um cancelamento telescópico e, assim,

$$c_n = c_1 + \frac{9}{8^2} \cdot \left(1 + \frac{10}{8} + \left(\frac{10}{8}\right)^2 + \dots + \left(\frac{10}{8}\right)^{n-2} \right) \Rightarrow a_n = 9 \cdot \frac{(10^{n-1} - 8^{n-1})}{2}, \quad n > 1$$

Com essa fórmula, podemos obter o resultado dos três itens.

Terceira Solução

Dados dois símbolos, digamos 0 e 9, ao preencheremos uma sequência de k posições com eles, em metade delas teremos um número ímpar de zeros. Isso se deve ao fato de que, para qualquer escolha dos primeiros $k - 1$ símbolos, em exatamente metade dos completamentos possíveis teremos um número ímpar de zeros e, na outra metade, um número par na sequência inteira. Vamos usar esse fato a seguir.

Para contar o número de zerímpares de n algarismos, primeiro escolha o algarismo mais à esquerda de 9 formas possíveis. Lembre-se que esse algarismo não pode ser zero. Agora, para contar os preenchimentos possíveis dos $n - 1$ algarismos restantes, primeiro considere todos os preenchimentos possíveis deles (total 10^{n-1}) e retire aqueles preenchimentos em que não são usados os algarismos 0 e 9 (total 8^{n-1}). Restam assim $10^{n-1} - 8^{n-1}$ preenchimentos de $n - 1$ algarismos que contém pelo menos um algarismo 0 ou 9 e formamos assim uma primeira lista de $9 \cdot (10^{n-1} - 8^{n-1})$ números de n algarismos (perceba que todos os zerímpares de n algarismos estão entre eles). Troque cada algarismo 0 ou 9 por um mesmo símbolo, digamos um #. Nessa segunda lista de números, queremos preencher os símbolos de # com os símbolos de 0 ou 9 de modo a obter um número da primeira lista em que a quantidade total de zeros seja ímpar. Pelo comentário inicial, para cada número da segunda lista o número de preenchimentos em que isso acontece é metade do total de preenchimentos possíveis. Ou seja, metade dos números da primeira lista são zerímpares e isso nos dá o total de $9 \cdot \frac{(10^{n-1} - 8^{n-1})}{2}$ zerímpares.

Outra solução para o item c)

Os zerímpares de 5 algarismos podem apresentar um algarismo 0 ou três algarismos 0. No caso de um algarismo 0, ele pode ocupar as unidades de milhar ou as centenas ou as dezenas ou as unidades. Em todos esses casos, os outros algarismos podem ser escolhidos de 9 formas diferentes, portanto há $9 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561 \cdot 4 = 26244$.

E no caso de três algarismos 0, eles podem ocupar as unidades de milhar, centenas e dezenas; ou centenas, dezenas e unidades; ou unidades de milhar, dezenas e unidades; ou unidades de milhar, centenas e unidades. Em todos esses casos, os outros algarismos podem ser escolhidos de 9 formas diferentes, portanto há $9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 = 81 \cdot 4 = 324$.

Portanto, existem $26244 + 324 = 26568$ números zerímpares de 5 algarismos.

QUESTÃO 5

Solução:

a) São 4 bolas brancas dentre 20 escolhas possíveis. A probabilidade de que uma bola branca saia logo na primeira retirada $4/20$ ou $1/5$.

b) A presença de bolas de outras cores não influi na probabilidade de que uma bola preta saia antes de uma bola branca. Considerando apenas bolas brancas e pretas, temos um total de 10 bolas, das quais 4 são brancas e 6 pretas. A probabilidade de que a primeira delas a sair seja preta é $6/10 = 3/5$.

c) Do mesmo modo que na solução acima, a presença de bolas de outras cores não influi na probabilidade de que saia exatamente uma bola vermelha antes da primeira branca. Considerando apenas bolas brancas e vermelhas, temos um total de 10 bolas, das quais 4 são brancas e 6 vermelhas. Para que haja exatamente uma bola vermelha antes da primeira brancas, é preciso que, considerando apenas essas 10 bolas, as duas primeiras bolas retiradas sejam vermelha e branca, nesta ordem. A probabilidade de que isto ocorra é

$$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{6 \times 4}{10 \times 9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$$

Outra solução

a) Como temos 4 bolas brancas, 4 azuis, 6 vermelhas e 6 pretas, o total de bolas é $N_T = 20$. Portanto, a probabilidade de que a primeira bola retirada seja branca é

$$P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

b) Podemos modelar a retirada sem devolução da seguinte forma: consideremos todas as listas formadas por quatro letras **A** (azul), quatro letras **B** (branca), seis letras **P** (preta) e seis letras **V** (vermelha). Um processo de retirada sem devolução é equivalente a escolher uma dessas listas e selecionar letras, uma a uma, da esquerda para a direita.

Por exemplo, para a permutação **PPAPVBBBBAPVVABAVPVPV**, a retirada sem devolução corresponde a, inicialmente, tirar uma bola preta, em seguida outra bola preta, depois uma bola azul, e assim por diante.

O número total de listas pode ser calculado usando o princípio multiplicativo. Se as bolas fossem todas distintas, para a primeira posição teríamos 20 possibilidades, para a segunda posição teríamos 19 possibilidades, e assim por diante, o que nos dá $20 \times 19 \times \dots \times 2 \times 1 = 20!$ listas. Como há bolas da mesma cor, devemos dividir pelo número de permutações entre bolas de cada cor. Para bolas azuis (ou brancas) temos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ permutações. Para bolas pretas (ou vermelhas) temos $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$ permutações. Assim, temos $\frac{20!}{4! 4! 6! 6!}$ possíveis listas.

Para calcularmos a probabilidade de que uma bola preta saia antes de uma bola branca devemos calcular o número de casos favoráveis. Inicialmente colocaremos as 10 bolas azuis e vermelhas em algumas das 20 posições possíveis.

Se as 10 bolas fossem distintas teríamos $(20 \times 19 \times \dots \times 11)$ modos de distribuir as bolas. Como temos quatro bolas azuis e seis vermelhas, devemos dividir por $4!6!$. Esse número pode ser escrito como

$$n = \frac{20 \times 19 \times \dots \times 11}{4! \times 6!} = \frac{20!}{4! 6! 10!}$$

Para calcular as configurações favoráveis, devemos preencher as 10 posições restantes com bolas brancas e pretas. Como queremos pelo menos uma bola preta antes de uma bola branca, analisando apenas essas 10 posições, a primeira posição da esquerda para a direita deve ser preta. Assim, o número de modos de distribuir as bolas brancas e pretas é

$$n_2 = \frac{9!}{4! 5!}$$

pois colocamos uma bola preta na primeira posição livre da esquerda para a direita e, em seguida, preenchemos as demais posições livres usando cinco bolas pretas e quatro bolas brancas.

O número total de configurações favoráveis é, portanto, $n_1 \times n_2 = 20! \cdot 9! / (4! \cdot 6! \cdot 10! \cdot 4! \cdot 5!)$. A probabilidade de que saia pelo menos uma bola preta antes de uma bola branca é, então

$$P = \frac{n_1 n_2}{N} = \frac{\frac{20! \cdot 9!}{4! \cdot 6! \cdot 10! \cdot 4! \cdot 5!}}{\frac{20!}{4! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 6!}} = \frac{20! \cdot 9!}{4! \cdot 6! \cdot 10! \cdot 4! \cdot 5!} \cdot \frac{4! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 6!}{20!} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

c) Usando o mesmo raciocínio do item anterior, para quatro bolas azuis e seis bolas pretas em algumas das 20 posições possíveis temos

$$n = \frac{20 \times 19 \times \dots \times 11}{4! \times 6!} = \frac{20!}{4! \cdot 6! \cdot 10!}$$

Como queremos a probabilidade de que saia exatamente uma bola vermelha antes de uma bola branca, analisando as 10 posições vazias, a primeira posição da esquerda para a direita, deve ser uma bola vermelha e a segunda posição da esquerda para a direita deve ser uma bola branca. Assim

$$n = \frac{8!}{3! \cdot 5!}$$

pois temos três bolas brancas e cinco bolas vermelhas preenchendo cinco posições. O número de casos favoráveis agora é $n_1 \times n_2 = 20! \cdot 8! / (4! \cdot 6! \cdot 10! \cdot 3! \cdot 5!)$.

A probabilidade de que saia exatamente uma bola vermelha antes de uma bola branca é, portanto,

$$P = \frac{n_1 n_2}{N} = \frac{\frac{20! \cdot 8!}{4! \cdot 6! \cdot 10! \cdot 3! \cdot 5!}}{\frac{20!}{4! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 6!}} = \frac{20! \cdot 8!}{4! \cdot 6! \cdot 10! \cdot 3! \cdot 5!} \cdot \frac{4! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 6!}{20!} = \frac{4 \times 6}{10 \times 9} = \frac{4}{15}$$

Observação

Podemos resolver o item a) usando a mesma ideia usada nos itens b) e c). O número n de listas que começam com uma bola branca é $n = 19! / (3! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 6!)$. A probabilidade é dada, então, por

$$P = \frac{n}{N} = \frac{\frac{19!}{3! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 6!}}{\frac{20!}{4! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 6!}} = \frac{19!}{3! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 6!} \cdot \frac{4! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 6!}{20!} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

QUESTÃO 6

Solução:

a) Se o voo direto entre Santiago e Brasília fosse feito pela CONTI, teríamos o diagrama ao lado e seria possível viajar de La Paz a Brasília pela CONTI, o que é não é possível de acordo com o enunciado. Logo, o trajeto Santiago-Brasília é feito pela TRACE.

b) A companhia TRACE faz os voos diretos (em ambos os sentidos) em pelo menos um dos trechos: Buenos Aires – La Paz ou Buenos Aires – Brasília. Caso contrário, se os voos em ambos os trechos fossem feitos pela CONTI, seria possível viajar entre La Paz e Brasília pela CONTI com conexão em Buenos Aires (como indicado no diagrama abaixo), o que não é possível de acordo com o enunciado.

Assim, pelo menos uma das seguintes viagens é possível:

- Buenos Aires $\leftrightarrow$ TRACE $\leftrightarrow$ Brasília (voo direto) ou
- Buenos Aires $\leftrightarrow$ TRACE $\leftrightarrow$ La Paz $\leftrightarrow$ TRACE $\leftrightarrow$ Brasília (com escala em La Paz).

c) O argumento de (b) mostra que para qualquer capital X, não apenas Buenos Aires, pelo menos uma entre as conexões X-Brasília ou X-La Paz é da TRACE. Se C e D são duas capitais,

- TRACE faz C-Brasília e D-Brasília: Aqui TRACE faz C-D com escala em Brasília e, analogamente, para C-La Paz e D-La Paz.
- TRACE faz C-Brasília e D-La Paz, com C e D distintas: Se TRACE faz C-D, há voo direto entre elas e terminou. Caso contrário, CONTI faz C-D e, então, CONTI não faz pelo menos uma entre C-La Paz ou D-Brasília (se fizesse as duas, faria La Paz-C-D-Brasília), contradizendo o enunciado. Logo, pelo menos uma dessas conexões é da TRACE e o resultado segue.

Mais detalhadamente:

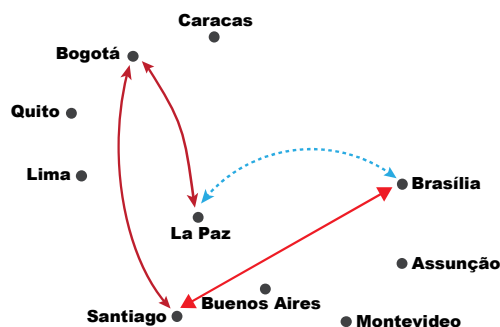
Entre La Paz e Brasília os voos diretos são feitos pela TRACE. Para outras duas capitais quaisquer dividimos a análise em casos:

Caso 1. Viagens entre La Paz e outra capital C diferente de Brasília.

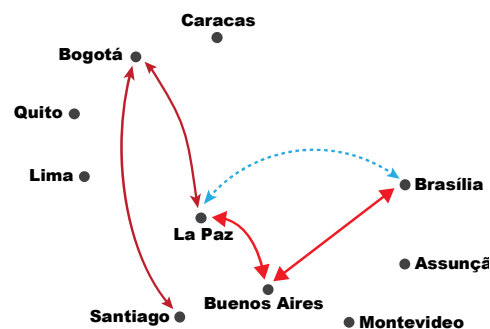
Nesse caso, pela análise feita no item b), podemos trocar Buenos Aires por outra capital e proceder de modo análogo ao que foi feito acima, sempre é possível realizar **pelo menos uma** das seguintes viagens:

C $\leftrightarrow$ TRACE $\leftrightarrow$ La Paz (voo direto).

C $\leftrightarrow$ TRACE $\leftrightarrow$ Brasília $\leftrightarrow$ TRACE $\leftrightarrow$ La Paz (uma conexão em Brasília).



Situação que não pode ocorrer



Situação que não pode ocorrer

Caso 2. Viagens entre Brasília e outra capital C diferente de La Paz.

Esse é precisamente o que ocorre com a cidade $C = \text{Buenos Aires}$ no item b) e, de forma análoga ao Caso 1, sempre é possível realizar **pelo menos uma** das seguintes viagens:

$C \xleftrightarrow{\text{TRACE}}$ Brasília (voo direto).

$C \xleftrightarrow{\text{TRACE}}$ La Paz $\xleftrightarrow{\text{TRACE}}$ Brasília (uma conexão em La Paz).

Caso 3. Viagens entre duas capitais C_1 e C_2 , diferentes de La Paz e de Brasília.

Para facilitar a análise, fixamos $C_1 = \text{Caracas}$ e $C_2 = \text{Buenos Aires}$, não haverá perda de generalidade, os outros casos são análogos. Caso a TRACE não faça os voos diretos entre Caracas e Buenos Aires, teríamos uma situação como a indicada no seguinte diagrama:



Subcaso 3.1. A TRACE faz as seguintes viagens: $\text{Buenos Aires} \xleftrightarrow{\text{TRACE}} \text{La Paz} \xleftrightarrow{\text{TRACE}} \text{Caracas}$.

Nesse caso seria possível viajar entre Buenos Aires e Caracas com uma conexão em La Paz.

Subcaso 3.2. Pelo menos um dos trechos $\text{Buenos Aires} \text{ -- } \text{La Paz}$ ou $\text{La Paz} \text{ -- } \text{Caracas}$ é feito pela CONTI. Aqui estão as possibilidades:



Nesse caso, os trechos $\text{Buenos Aires} \text{ -- } \text{Brasília}$ e $\text{Brasília} \text{ -- } \text{Caracas}$ serão feitos pela TRACE, pois, caso contrário, seria possível viajar com escalas entre La Paz e Brasília, o que não é possível pelo enunciado. Portanto, nessa situação, a TRACE fará as viagens: $\text{Buenos Aires} \xleftrightarrow{\text{TRACE}} \text{Brasília} \xleftrightarrow{\text{TRACE}} \text{Caracas}$, ou seja, seria possível viajar entre Buenos Aires e Caracas com uma conexão em Brasília.