Solução da prova da 1ª Fase

QUESTÃO 1 – ALTERNATIVA E

Solução: O alfinete 4 não pode ser retirado e os dois alfinetes 7 e 9 não podem ser ambos retirados. Pensemos nos papéis A, C, D e F. Não podemos mantê-los fixos com apenas um alfinete, pois nenhum dos alfinetes segura 4 papéis, mas podemos mantê-los sem cair com 2 alfinetes, por exemplo, com os alfinetes 3 e 8. Assim, com 4 alfinetes podemos manter todos os papéis sem que nenhum caia; logo, podemos retirar 6 dos 10 alfinetes.

Outra solução:

Veja que manter os alfinetes 3, 4, 8 e 9 são suficientes para manter todos os papeis fixados. Agora, note que em cada um dos conjuntos de alfinetes a seguir, devemos manter pelo menos um dos alfinetes para que nenhum papel caia.

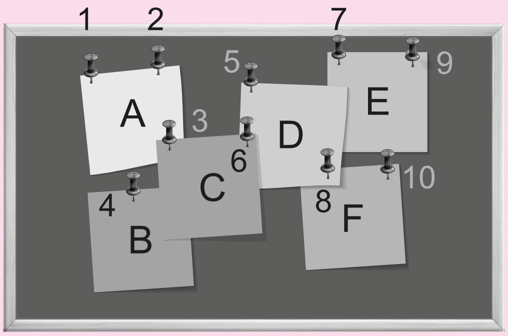
A = {1,2,3}

B = {4}

D = {5,6,8}

E = {7,9}

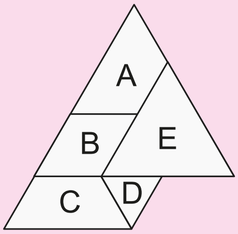
Portanto, podemos retirar no máximo 6 alfinetes.



QUESTÃO 2 – ALTERNATIVA B

Solução: Vamos fazer o problema de trás para frente, identificando qual foi o quinto e último cartão colado, depois o quarto cartão colado e, então, descobrir qual foi o terceiro cartão colado.

O cartão E está sobre todos os outros cartões; portanto, ele foi o quinto e último cartão colado. Depois, vemos que o cartão A está colado em cima do cartão B. Perceba que o cartão B está colado sobre os cartões C e D; logo, C e D foram os cartões iniciais na colagem. Note que o cartão D foi colado de cabeça para baixo.



QUESTÃO 3 – ALTERNATIVA A

Solução: Basta contar o número de fatias e observar se o resultado é um múltiplo de 9.

Se todas as cinco pizzas tivessem sido cortadas em 6 fatias, teríamos um total de 6 x 5 = 30 fatias, o que não permitiria a divisão exata entre os 9 amigos.

Se quatro pizzas tivessem sido cortadas em 6 e uma em 8, teríamos 6 x 4 + 8 x 1 = 32 pedaços, divisão novamente incorreta.

Se três pizzas tivessem sido cortadas em 6 e duas em 8, teríamos 6 x 3 + 2 x 8 = 34 pedaços, divisão novamente incorreta.

Se duas pizzas tivessem sido cortadas em 6 e três em 8, teríamos 6 x 2 + 3 x 8 = 36 pedaços. Nesse caso, cada amigo teria comido 4 pedaços, pois 9 x 4 = 36.

Se uma pizza tivesse sido cortada em 6 e quatro em 8, teríamos 6 x 1 + 4 x 8 = 38 pedaços, divisão novamente incorreta.

Finalmente, a possibilidade de termos as cinco pizzas com 8 fatias resultariam em 40 pedaços, impossível de dividir exatamente por 9.

Logo, os 9 amigos comeram 4 fatias cada. Note que eles não comeram a mesma quantidade de pizza, mas sim a mesma quantidade de fatias.

Outra solução:

Sejam x o número de pizzas cortadas em 6 fatias e y o número de pizzas cortadas em 8 fatias. O enunciado diz que $x + y = 5$, o que nos dá as possbilidades $(x,y) = (5,0),(4,1),(3,2),(2,3),(1,4),(0,5)$. Além disso, o número total de fatias em que as pizzas foram cortadas é $6x + 8y$; como essas foram igualmente divididas entre os 9 amigos, segue que $6x + 8y$ deve ser um múltiplo de 9. Substituindo os possíveis valores de (x,y) nessa expressão, vemos que o único múltiplo de 9 que aparece é $2 \times 6 + 3 \times 8 = 36$, ou seja, duas pizzas cortadas em 6 fatias e três pizzas em 8 fatias. Segue que cada um dos amigos comeu (36/9) = 4 fatias.

Uma maneira de tornar essa solução mais rápida é escrever o número de fatias como $9z$ e reescrever $6x + 8y = 9z$ como

$8y = 9z - 6x = 3(3x - 2z)$.

Isso mostra que 8y deve ser um múltiplo de 3, que só acontece para $y = 3$ e chegamos à solução (2,3), como acima.

QUESTÃO 4 – ALTERNATIVA E

Solução: Note que 2023 = 7 x 17 x 17. Portanto, é possível preencher 17 tabuleiros 7 x 17.

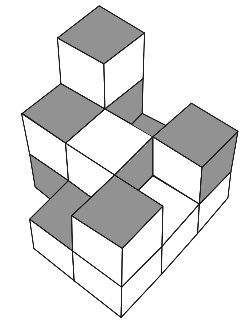
QUESTÃO 5 – ALTERNATIVA C

Solução: Observe que as 21 páginas foram lidas nos três primeiros dias: sexta, domingo e terça. Ou seja, ela lê (21/3) = 7 páginas por dia. Como (105/7) = 15, significa dizer que ela terá 15 dias de leitura. Fazendo a sequência de dias nos quais ela lê, temos:

SEX, DOM, TER, QUI, SAB, SEG, QUA, SEX, DOM, TER, QUI, SAB, SEG, QUA, SEX.

Portanto, ela terminará de ler o livro em uma sexta-feira.

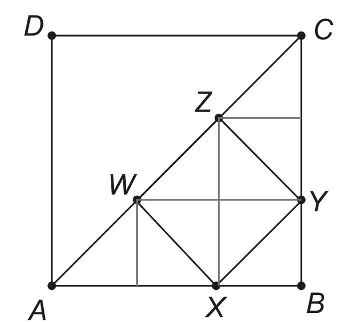
QUESTÃO 6 – ALTERNATIVA E



Solução: Na camada inferior, há 4 cubos que podem ter todas as suas faces azuis. Dois deles possuem uma de suas faces visíveis e dois deles estão completamente escondidos. Na camada intermediária há somente um cubo que pode ter suas faces todas azuis. O cubo do topo não pode ter todas as suas faces azuis. Logo, há 5 cubos que podem ter todas as suas faces azuis.

Podemos também descontar dos 14 cubos os 9 que mostram ao menos uma face branca (14 – 9 = 5).

QUESTÃO 7 – ALTERNATIVA A



Solução: A figura apresenta o quadrado *ABCD* dividido em duas metades pela diagonal *AC*. Traçando as diagonais do quadrado *XYZW* e as alturas dos triângulos *AXW* e *YZC*, relativas às bases *AX* e *YC*, respectivamente, percebe-se que metade do quadrado *ABCD* é formada por 9 triângulos congruentes a *XBY.* Consequentemente, todo o quadrado *ABCD* é formado por 18 desses mesmos triângulos. Uma vez que o quadrado *XYZW* é formado por 4 desses triângulos, a razão entre as áreas dos quadrados é 4/18 = 2/9.

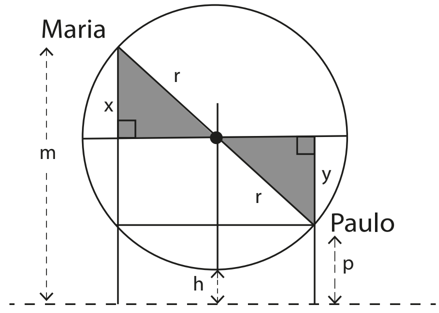
QUESTÃO 8 – ALTERNATIVA B

Solução: Maria e Paulo sentam-se em cadeiras diametralmente opostas na roda gigante, por isso, a altura que um deles se encontra com relação ao solo é igual à que falta para o outro atingir a altura total da roda gigante com relação ao solo, ou seja, 3 + 5 = 8 m – pense na situação em que um está no ponto mais baixo da roda e outro no ponto mais alto. Portanto, quando Maria estiver a 7 m do solo, Paulo estará a 8 – 7 = 1 m do solo.

Outra solução: Observe a figura; m denota a altura de Maria e p a altura de Paulo com relação ao solo, estamos supondo $p \leq m$, mas raciocínio análogo vale se $p > m$. Os triângulos em cinza são congruentes, o que garante que $x = y$. Portanto,

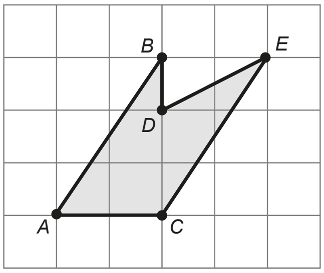
$m - x = p + x = r + h$, de onde se concluiu que $m + p = m - x + p + x = 2(r + h)$ é constante.

O enunciado nos diz que quando $m = 3$, $p = 5$ e nos pede p quando $m = 7$. Pelo que vimos, $7 + p = 3 + 5 = 8$; logo, $p = 1$, isto é, Paulo estará a 1 m do solo quando Maria estiver a 7 metros.



QUESTÃO 9 – ALTERNATIVA E

Solução: A área do polígono amarelo é igual a soma das áreas dos triângulos *ABC* e *CDE*. Seja *l* o lado de cada quadradinho do quadriculado, então a área do triângulo *ABC* é $\frac{AC.BC}{2} = \frac{2l.3l}{2} = 3l^2$ e a área do triângulo *CDE* é $\frac{CD.BE}{2} = \frac{2l.2l}{2} = 2l^2$;nesse último triângulo tomamos a base como *CD* e a altura como *BE*.



A área do polígono amarelo é, portanto, $3l^2 + 2l^2 = 5l^2 = 30$ cm². Logo, $l^2 = 6$ cm², ou seja, um quadradinho do quadriculado tem área de 6 cm².

QUESTÃO 10 – ALTERNATIVA C

Solução: Pelos dados fornecidos, $a^2b^2c^2 = \frac{1}{36}$

$$a^2b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow c^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{c^2} = 9$$

$$b^2c^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 4$$

$$a^2c^2 = \frac{1}{36} \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = 1$$

Logo, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 9 + 4 + 1 = 14$

Outra solução: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}$

Como $ab = \frac{1}{2}$, $bc = \frac{1}{3}$ e $ac = \frac{1}{6}$, a igualdade acima torna-se

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{6})^2 + (\frac{1}{2})^2}{a^2b^2c^2} = \frac{\frac{14}{36}}{a^2b^2c^2}$

Multiplicando membro a membro as igualdades $ab = \frac{1}{2}$, $bc = \frac{1}{3}$ e $ac = \frac{1}{6}$, chegamos a

$$a^2b^2c^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Logo, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{\frac{14}{36}}{a^2b^2c^2} = \frac{\frac{14}{36}}{\frac{1}{36}} = 14.$

QUESTÃO 11 – ALTERNATIVA C

Solução: A notação $\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{C}$ é usada para denotar o número $\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{C} = A.10^2 + B.10 + C$. É claro que $\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{C} = 10 \text{ x } \underline{A}\,\underline{B} + C$ e, assim, $(\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{C} / \underline{A}\,\underline{B}) = 10 + (C/\,\underline{A}\,\underline{B})$.

Para que $\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{C} / \underline{A}\,\underline{B}$ seja um número inteiro, $C/\,\underline{A}\,\underline{B}$ deve ser inteiro, mas o denominador $\underline{A}\,\underline{B}$ é maior do que o numerador C e a única possibilidade de isso acontecer ocorre quando C = 0. O resultado $\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{0} / \underline{A}\,\underline{B} = 10$ é inteiro para todo algarismo A diferente de zero e para todo algarismo B. Há, então, 9 possibilidades para A e 8 possibilidades para B, já que C = 0 já foi utilizado e os algarismos A, B e C devem ser todos diferentes. Conclusão: são 9 x 8 = 72 as possibilidades de $\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{C} / \underline{A}\,\underline{B}$ ser um número inteiro.

QUESTÃO 12 – ALTERNATIVA B

Solução: Note que $2048 = 2^{11}$ é uma potência de 2. Portanto, todos os quatro números escritos no quadro são potências de 2. Assim, devemos escrever 67 como uma soma de 4 parcelas, todas elas potências de 2. Há duas maneiras de se fazer isso:

- $67 = 64 + 1 + 1 + 1$ (nesse caso o produto das parcelas é $64.1.1.1 \neq 2048$) e
- $67 = 32 + 32 + 2 + 1$ (é a única possibilidade de atender ao enunciado).

Portanto, a menor soma possível de três dessas potências é $2^5 + 2^1 + 2^0 = 32 + 3 = 35$.

QUESTÃO 13 – ALTERNATIVA B

Solução: Como a única criança que mentiu é a que tem 8 anos, a criança que diz que não tem 8 anos está mentindo, pois qualquer uma das outras duas que disser que não tem 8 anos está dizendo a verdade. Como as outras duas estão falando a verdade, a que diz que não tem 9 anos tem 7 anos e a que diz que não tem 7 anos tem 9 anos. Assim, a mais velha é a que diz que não tem 7 anos e a mais nova é a que diz que não tem 9 anos.

Outra solução: Analisemos a criança que diz "Não é 8". Há só duas possibilidades: ou ela mente ou fala a verdade.

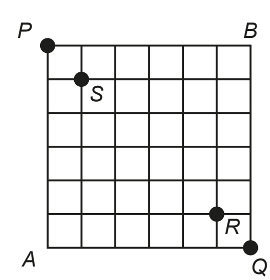
1) Se ela diz a verdade, sua idade só pode ser 7 ou 9 anos.

Se for 7, alguém deve ter 8 anos. Suponha que seja a criança de cabelo preto. Nesse caso a de cabelo preto estaria dizendo a verdade, mas sua idade é 8 anos, uma contradição, pois quem tem 8 anos mente. Analogamente, se a criança de 8 anos for a de cabelo loiro, ela estaria dizendo a verdade, novamente uma contradição.

Do mesmo modo, se a idade de quem diz "Não é 8" for 9 anos, uma das outras duas crianças teria 8 anos e estaria falando a verdade, contradição.

2) Se ela mente, então tem 8 anos. Como só há uma pessoa mentirosa, as outras duas falam a verdade; a de cabelo preto tem 9 anos e a de cabelo loiro tem 7.

QUESTÃO 14 – ALTERNATIVA E



Solução: Vamos nomear os quatro pontos indicados no enunciado de P, Q, R e S, conforme a figura.

Observe que só há um único caminho que vai de A até B passando por P. O mesmo ocorre com o ponto Q. Assim, até agora contamos dois caminhos.

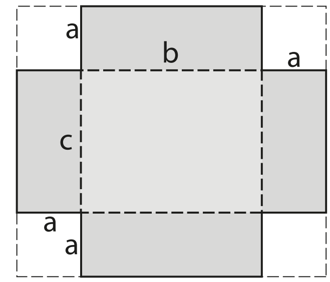
Para ir de A até R há 6 caminhos: cada um desses seis caminhos é determinado pela escolha da coluna na qual a formiga realiza um movimento para cima. De R para B há seis caminhos. Portanto, há $6 \times 6 = 36$ caminhos que saem de A até B passando por R.

O mesmo ocorre para o ponto S; ou seja, há 36 caminhos saindo de A até B passando por S.

Portanto, o total de caminhos é igual a $36 + 36 + 1 + 1 = 74$.

QUESTÃO 15 – ALTERNATIVA D

Solução: Sejam a, b e c as dimensões da caixa. Como o volume é 168, abc = 168. Além disso, o enunciado nos fornece ab = 28 e ca = 24. O que queremos calcular é a área do cartão antes dos cortes, ou seja, A = (a+b+a).(a+c+a) =(b+2a).(c+2a).

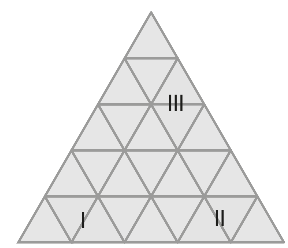


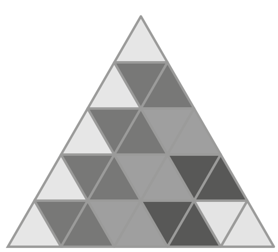
abc = 168 → 28c = 168, logo, c = 6. Como ca = 24, a = 4, e como abc = 168, 4.b.6 = 168, logo, b = 7.

Portanto, A = (7 + 2.4).(6 + 2.4) = 15.14 = 210 cm^2.

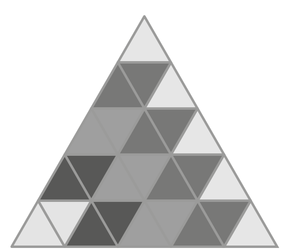
QUESTÃO 16 – ALTERNATIVA B

Solução: Os losangos que podem ser formados se dividem nos tipos I, II e III, como na figura ao lado. Os possíveis losangos do tipo I estão indicados com as cores vermelho, verde, azul e amarelo na primeira das figuras abaixo; contando em linhas de baixo para cima, vemos que eles são em número de 4+3+2+1=10. De modo análogo, o número de possíveis losangos do tipo II também é 10, assim como os do tipo III. No total, temos 10+10+10=30 losangos possíveis.

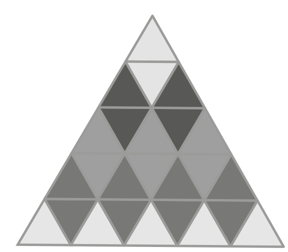




Tipo I



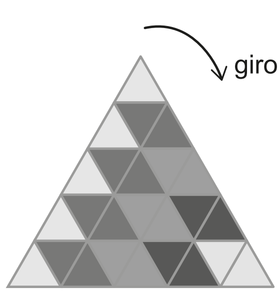
Tipo II



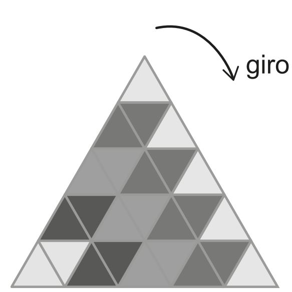
Tipo III

Outra maneira de contar é observar que os triângulos menores, com exceção dos cinco triângulos que têm um lado em comum com o lado esquerdo do triângulo maior, podem ser divididos em pares de modo a formar todos os possíveis losangos do tipo I, que são então em número de $\frac{25-5}{2}=10$. O mesmo argumento com relação aos lados esquerdo e inferior do triângulo maior, respectivamente, se aplica a losandos dos tipos II e III, e chegamos novamente a 30 losangos possíveis.

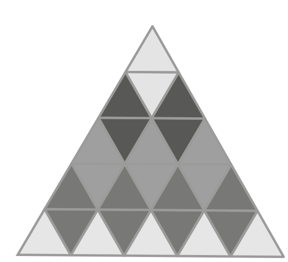
Ainda outra solução é ilustrada abaixo



Tipo I



Tipo II



Tipo III

Aqui vemos a figura que ilustra os losangos do tipo I na posição original e também rotacionada duas vezes de modo que sua base fique horizontal, ilustrando assim todos os losangos dos tipos II e III, respectivamente. O número de losangos não muda a cada rotação, e como ele é 10 na primeira figura segue, mais uma vez, que temos 30 losangos possíveis.

QUESTÃO 17 – ALTERNATIVA D

Solução: De acordo com o enunciado, Tia Zélia tem 10 sobrinhos cujas idades somam 110 anos. Mariana não pode ter menos do que (110/10) = 11 anos; se tivesse, todos os sobrinhos também teriam, pois ela é a mais velha, e a soma das idades de todos seria inferior a 110. Se todos pudessem ter a mesma idade, então teríamos dez sobrinhos com 11 anos.

$$11+11+11+11+11+11+11+11+11+11=110$$

Como todos os sobrinhos de Tia Zélia têm idades diferentes, devemos ir diminuindo as idades dos sobrinhos mais novos nas parcelas acima e aumentando as idades dos sobrinhos mais velhos, até que todas as idades fiquem diferentes. Porém, ao diminuir a idade de um sobrinho mais novo em um ano, temos que aumentar a idade de um sobrinho mais velho também em um ano, para manter a soma das idades igual a 110. Vamos fazer isto aumentando a idade de Mariana de 1 em 1. Podemos proceder da seguinte forma:

- diminuindo a idade de um dos sobrinhos mais novos:
- 10+11+11+11+11+11+11+11+11+12=110
- diminuindo a idade de dois dos sobrinhos mais novos:
- 9+10+11+11+11+11+11+11+12+13=110
- diminuindo a idade de três dos sobrinhos mais novos:
- 8+9+10+11+11+11+11+12+13+14=110
- diminuindo a idade de quatro dos sobrinhos mais novos:
- 7+8+9+10+11+11+12+13+14+15=110
- diminuindo a idade de cinco dos sobrinhos mais novos:
- 6+7+8+9+10+12+13+14+15+16=110

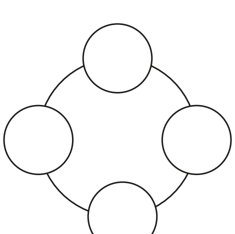
Logo, a menor idade que Mariana, a sobrinha mais velha, pode ter é 16 anos.

QUESTÃO 18 – ALTERNATIVA E

Solução: De acordo com o enunciado, a frase "A menina de azul, que não é nem Alice nem Cláudia, está entre a menina de branco e Daniela" nos revela que Alice, Beatriz e Daniela não vestem azul. Logo, Beatriz veste azul e está ao lado de Daniela, que veste preto ou vermelho. Já a frase "A menina de preto está entre a menina de vermelho e Cláudia" nos revela que Cláudia não veste preto nem vermelho, e como também não veste azul, a única cor possível para Cláudia vestir é branco. Resta saber se Alice e Daniela vestem preto ou vermelho. Como Beatriz (a menina de azul) está entre Cláudia (a menina de branco) e Daniela, e como a menina de preto está entre a menina de vermelho e a menina de branco (Cláudia), a menina de preto não está ao lado de Beatriz, e assim Daniela só pode vestir vermelho. Conclusão: Alice veste preto; Beatriz, azul; Cláudia, branco; e Daniela, vermelho.

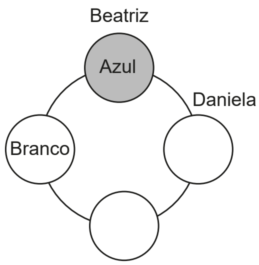
Outra solução:

Montamos um grafo e um a tabela para nos ajudar a organizar as informações do enunciado:



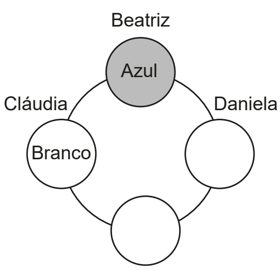
	Alice	Beatriz	Cláudia	Daniela
Azul				
Branco				
Vermelho				
Preto				

A frase “A menina de azul, que não é nem Alice nem Cláudia, está entre a menina de branco e Daniela” nos permite preencher alguns dados:



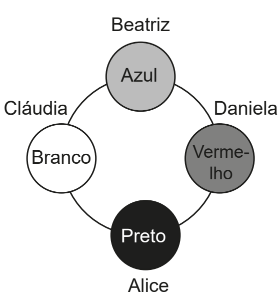
	Alice	Beatriz	Cláudia	Daniela
Azul	não	sim	não	não
Branco		não		
Vermelho		não		
Preto		não		

Continuamos os preenchimentos com as informações da frase: “A menina de preto está entre a menina de vermelho e Cláudia”:



	Alice	Beatriz	Cláudia	Daniela
Azul	não	sim	não	não
Branco	não	não	sim	não
Vermelho		não	não	
Preto		não	não	

Finalmente, se Daniela vestisse preto, ela estaria entre a de vermelho e Cláudia, o que não ocorre, como vemos no grafo acima. Logo, Daniela veste vermelho e, como consequência, Alice veste preto. Podemos completar assim todas as informações:



	Alice	Beatriz	Cláudia	Daniela
Azul	não	sim	não	não
Branco	não	não	sim	não
Vermelho	não	não	não	sim
Preto	sim	não	não	não

QUESTÃO 19 – ALTERNATIVA C

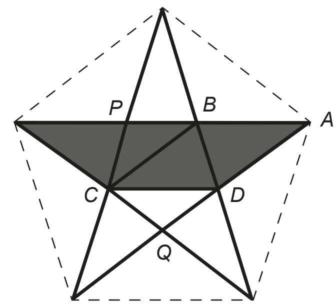
Solução: Todos os 23 números de dois algarismos maiores do que ou iguais a 77 podem ser escolhidos, pois a soma de um deles com qualquer outro número de dois algarismos é maior do que 86. Para analisar os números de 10 a 76, considere os pares:

$$(10,76), (11, 75), (12, 74), ..., (42, 44)$$

Todos eles são diferentes e, em cada um, temos dois números que somam 86. Em cada um deles só podemos escolher um de seus elementos e assim dessa coleção podemos escolher no máximo 33 números. O número 43 também pode ser escolhido porque não há outro número de dois algarismos diferente de 43 que somado com ele produza 86. Portanto, o total de números que podem ser escolhidos é 23 + 33 + 1 = 57.

QUESTÃO 20 – ALTERNATIVA C

Solução: Na figura, *ABCD* é um losango (*AB*//*CD*, *AD*//*BC* e *AB* ≡ *AD*). Então, os triângulos *ABD* e *CDB* são congruentes.



Temos também que os triângulos *PBC* e *QCD* são congruentes pois *CD* ≡ *CB* (diagonais do pentágono regular *BPCQD*) e

BP ≡ *PC* ≡ *CQ* ≡ *QD* (lados do pentágono regular *BPCQD*).

Temos então que:

(Área da parte azul) = 3 x (área do triângulo *ABD*) + (área do triângulo *PCB*) = (Área da parte branca).

Logo, a área em azul dessa estrela representa 1/2 da área total da estrela.