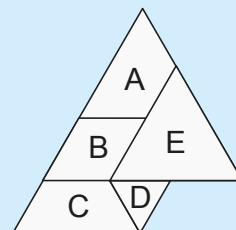


Solução da prova da 1ª Fase

QUESTÃO 1 – ALTERNATIVA B

Solução: Vamos fazer o problema de trás para frente, identificando qual foi o quinto e último cartão colado, depois o quarto cartão colado e, então, descobrir qual foi o terceiro cartão colado.

O cartão E está sobre todos os outros cartões; portanto, ele foi o quinto e último cartão colado. Depois, vemos que o cartão A está colado em cima do cartão B. Perceba que o cartão B está colado sobre os cartões C e D; logo, C e D foram os cartões iniciais na colagem. Note que o cartão D foi colado de cabeça para baixo.



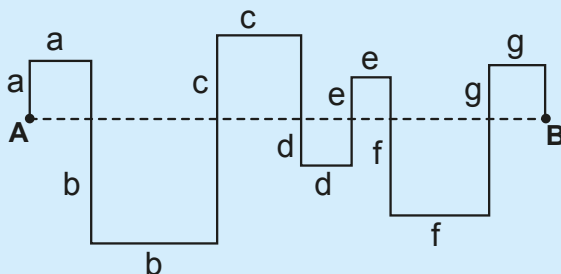
QUESTÃO 2 – ALTERNATIVA B

Solução: O enunciado nos diz que

$$3a + 3b + 3c + 3d + 3e + 3f + 3g = 6, \text{ logo,}$$

$$3(a + b + c + d + e + f + g) = 6. \text{ Portanto,}$$

$a + b + c + d + e + f + g = 2$. Logo, a distância em linha reta entre A e B é 2 km.



QUESTÃO 3 – ALTERNATIVA E

Solução: Vamos contar em grupos de 5.

Na 1ª caixa João colocou as bolas 1 e 2,

na 2ª caixa ele colocou as bolas 3, 4 e 5 $= 1 \times 5 = (2/2) \times 5$,

na 3ª caixa ele colocou as bolas 6 e 7,

na 4ª caixa ele colocou as bolas 8, 9 e 10 $= 2 \times 5 = (4/2) \times 5$,

na 5ª caixa ele colocou as bolas 11 e 12,

na 6ª caixa ele colocou as bolas 13, 14 e 15 $= 3 \times 5 = (6/2) \times 5$ e, procedendo indutivamente, vemos que

na 808ª caixa ele colocou as bolas 2018, 2019 e 2020 $= 404 \times 5 = (808/2) \times 5$,

na 809ª caixa ele colocou as bolas 2021, 2022,

na 810ª caixa ele colocou as bolas 2023, 2024 e 2025.

(utilizamos o fato que 2023 dividido por 5 tem quociente 404 e resto 3).

QUESTÃO 4 – ALTERNATIVA C

Solução: $20235 \times 20235 - 20238 \times 20232 = 20235^2 - (20235 + 3) \cdot (20235 - 3) =$
 $= 20235^2 - (20235^2 - 3^2) = 9$

QUESTÃO 5 – ALTERNATIVA D

Solução: Denote por x a distância entre Pirajuba e Arraial e por D a distância entre Pirajuba e Quixajuba. O problema pede D .

Em 4h (das 11h às 15h) o viajante percorreu $4 \times 60 = 240$ km. Esses 240 km equivalem a $\frac{3}{4}$ de x mais $\frac{3}{4}$ de $(D - x)$, ou seja, $(\frac{3}{4})x + (\frac{3}{4})(D - x) = 240$. Logo, $\frac{3}{4}D = 240 \Rightarrow D = 320$ km.

QUESTÃO 6 – ALTERNATIVA A

Solução: Como $x^2 - 3x + 1 = 0$, temos que $x^2 = 3x - 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
 x^2 + \frac{1}{x^2} &= 3x - 1 + \frac{1}{3x - 1} = \frac{(3x - 1)^2 + 1}{3x - 1} = \frac{9x^2 - 6x + 2}{3x - 1} = \\
 &= \frac{9(3x - 1) - 2(3x - 1)}{3x - 1} = \frac{(3x - 1)(9 - 2)}{3x - 1} = 7
 \end{aligned}$$

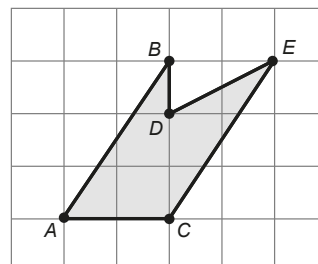
Pode-se também resolver a equação de 2º grau e, com as raízes, fazer o cálculo direto de

$$x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

QUESTÃO 7 – ALTERNATIVA E

Solução: A área do polígono amarelo é igual a soma das áreas dos triângulos ABC e CDE . Seja l o lado de cada quadradinho do quadriculado, então a área do triângulo ABC é $\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{2l \cdot 3l}{2} = 3l^2$ e a área do triângulo CDE é $\frac{CD \cdot BE}{2} = \frac{2l \cdot 2l}{2} = 2l^2$; nesse último triângulo tomamos a base como CD e a altura como BE .

A área do polígono amarelo é, portanto, $3l^2 + 2l^2 = 5l^2 = 30 \text{ cm}^2$. Logo, $l^2 = 6 \text{ cm}^2$, ou seja, um quadradinho do quadriculado tem área de 6 cm^2 .



QUESTÃO 8 – ALTERNATIVA A

Solução: Agrupando convenientemente os números

$$\begin{array}{llll}
 +1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}, & +1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}, & +1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}, & +1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}, \\
 -1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}, & -1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}, & -1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}, & -1 - \sqrt{2} - \sqrt{3},
 \end{array}$$

e sabendo que

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \text{ e que}$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}, \text{ teremos:}$$

$$\begin{aligned}
 & [1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2 \times [1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2 \times [1 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})]^2 \times [1 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})]^2 \\
 &= [(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 1]^2 \times [(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 1]^2 = \\
 &= (4 + 2\sqrt{6})^2 \times (4 - 2\sqrt{6})^2 = [(4 + 2\sqrt{6}) \times (4 - 2\sqrt{6})]^2 = (16 - 24)^2 = (-8)^2 \\
 &= 64
 \end{aligned}$$

QUESTÃO 9 – ALTERNATIVA B

Solução: Como a única criança que mentiu é a que tem 8 anos, a criança que diz que não tem 8 anos está mentindo, pois qualquer uma das outras duas que disser que não tem 8 anos está dizendo a verdade. Como as outras duas estão falando a verdade, a que diz que não tem 9 anos tem 7 anos e a que diz que não tem 7 anos tem 9 anos. Assim, a mais velha é a que diz que não tem 7 anos e a mais nova é a que diz que não tem 9 anos.

Outra solução: Analisemos a criança que diz “Não é 8”. Há só duas possibilidades: ou ela mente ou fala a verdade.

1) Se ela diz a verdade, sua idade só pode ser 7 ou 9 anos.

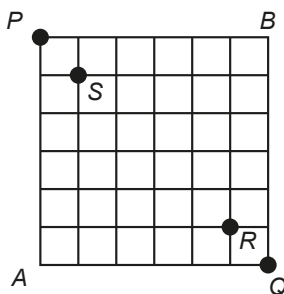
Se for 7, alguém deve ter 8 anos. Suponha que seja a criança de cabelo preto. Nesse caso a de cabelo preto estaria dizendo a verdade, mas sua idade é 8 anos, uma contradição, pois quem tem 8 anos mente. Analogamente, se a criança de 8 anos for a de cabelo loiro, ela estaria dizendo a verdade, novamente uma contradição.

Do mesmo modo, se a idade de quem diz “Não é 8” for 9 anos, uma das outras duas crianças teria 8 anos e estaria falando a verdade, contradição.

2) Se ela mente, então tem 8 anos. Como só há uma pessoa mentirosa, as outras duas falam a verdade; a de cabelo preto tem 9 anos e a de cabelo loiro tem 7.

QUESTÃO 10 – ALTERNATIVA E

Solução: Vamos nomear os quatro pontos indicados no enunciado de P , Q , R e S , conforme a figura.



Observe que só há um único caminho que vai de A até B passando por P . O mesmo ocorre com o ponto Q . Assim, até agora contamos dois caminhos.

Para ir de A até R há 6 caminhos: cada um desses seis caminhos é determinado pela escolha da coluna na qual a formiga realiza um movimento para cima. De R para B há seis caminhos. Portanto, há $6 \times 6 = 36$ caminhos que saem de A até B passando por R .

O mesmo ocorre para o ponto S ; ou seja, há 36 caminhos saindo de A até B passando por S .

Portanto, o total de caminhos é igual a $36 + 36 + 1 + 1 = 74$.

QUESTÃO 11 – ALTERNATIVA E

Solução: Vamos denotar as velocidades de André, Bruno e Carlos por V_A, V_B e V_C , respectivamente e o tempo por t .

Do enunciado temos que

$$\text{i)} \quad V_A t = 100 \text{ e } V_B t = 80 \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{80}{100}$$

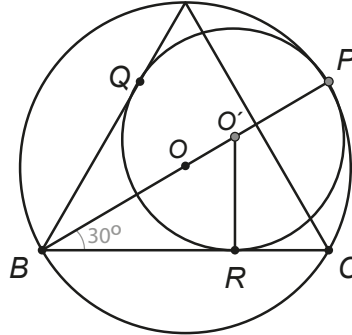
$$\text{ii)} \quad V_B t = 400 \text{ e } V_C t = 380 \Rightarrow \frac{V_C}{V_B} = \frac{380}{400}$$

$$\text{iii)} \quad V_A t = 800 \text{ e } V_C t = 800 - x, \text{ em que } x \text{ é a vantagem que André dará a Carlos na corrida de 800 metros.}$$

$$\text{Assim, } \frac{V_C}{V_A} = \frac{V_C}{V_B} \times \frac{V_B}{V_A} = \frac{380 \times 80}{400 \times 100} = \frac{800 - x}{800} \Rightarrow x = 192 \text{ m.}$$

QUESTÃO 12 – ALTERNATIVA B

Solução: Observamos, em primeiro lugar, que os centros O e O' das duas circunferências tangentes pertencem ao diâmetro $(\overline{BP})$ da circunferência externa.



Como a circunferência interna é tangente aos lados $(\overline{BA})$ e $(\overline{BC})$ do triângulo ABC , seu centro O' pertence à bissetriz do ângulo do vértice B desse triângulo. Por outro lado, o raio $(\overline{O'R})$ é perpendicular ao lado $(\overline{BC})$ no ponto de tangência, logo o triângulo $O'BR$ é retângulo e a medida do ângulo $\widehat{O'BR}$ é 30° , como assinalado na figura. Temos, portanto, que o triângulo retângulo $O'BR$ é a metade de um triângulo equilátero e os comprimentos dos seus lados $(O'B)$ e $(O'R)$ são tais que $O'B = 2 \cdot O'R$.

Vamos chamar de S e r os comprimentos dos raios das circunferências maior e menor, respectivamente; com essa notação, temos que $O'B = 2S - r$ e $O'R = r$, e

$$2S - r = 2r. \text{ Daí, } S = \frac{3r}{2}.$$

A área do círculo destacado em azul será $r^2 \pi$ e a área na cor rosa será igual à diferença entre as áreas dos dois círculos ou seja: $\frac{9}{4}r^2\pi - r^2\pi = \frac{5}{4}r^2\pi$.

A razão entre as áreas destacadas em azul e rosa será: $\frac{r^2\pi}{\frac{5}{4}r^2\pi} = \frac{4}{5}$.

QUESTÃO 13 – ALTERNATIVA D

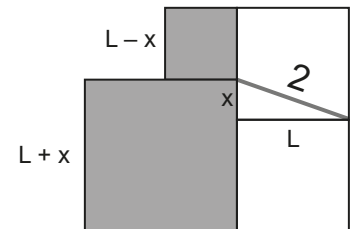
Solução: Vamos indicar por x e L os comprimentos dos catetos do triângulo cuja hipotenusa está destacada na figura, sendo L o comprimento do lado dos quadrados brancos.

Com essas notações, os comprimentos dos lados dos quadrados de cor azul serão $L + x$ e $L - x$ e a soma de suas áreas será dada pela expressão

$$(L + x)^2 + (L - x)^2 = 2(x^2 + L^2)$$

Pelo teorema de Pitágoras sabemos que $x^2 + L^2 = 4$.

Portanto, a soma das áreas dos quadrados de cor azul é 8.



QUESTÃO 14 – ALTERNATIVA C

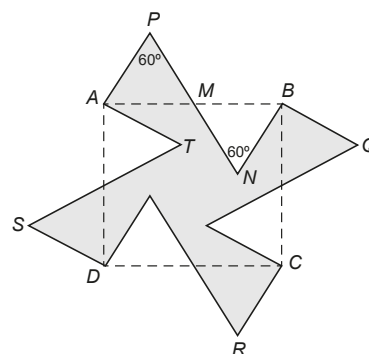
Solução: Todos os 23 números de dois algarismos maiores do que ou iguais a 77 podem ser escolhidos, pois a soma de um deles com qualquer outro número de dois algarismos é maior do que 86. Para analisar os números de 10 a 76, considere os pares:

(10, 76), (11, 75), (12, 74), ..., (42, 44)

Todos eles são diferentes e, em cada um, temos dois números que somam 86. Em cada um deles só podemos escolher um de seus elementos e assim dessa coleção podemos escolher no máximo 33 números. O número 43 também pode ser escolhido porque não há outro número de dois algarismos diferente de 43 que somado com ele produza 86. Portanto, o total de números que podem ser escolhidos é $23 + 33 + 1 = 57$.

QUESTÃO 15 – ALTERNATIVA D

Solução: Como os ângulos APM e BNM são congruentes (medem ambos 60°), bem como os segmentos AP e BN (que medem 10 cm), concluímos que o quadrilátero $PANB$ é um paralelogramo. Portanto, suas diagonais AB e PN se encontram em seu ponto médio M . Consequentemente, são congruentes os triângulos AMP e BMN (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Logo, a área do triângulo AMP é igual à área do triângulo BMN . Podemos concluir o mesmo com os demais triângulos fora do quadrilátero $ADCB$, dada a simetria de rotação de 90° da figura. Dessa maneira, concluímos que a área da figura dada é igual à área do quadrilátero $ADCB$, que é um quadrado, pois $AB = AD = CD = CB$ e ângulos internos são retos (note que o triângulo AMP é equilátero, logo a medida do ângulo BAT é 30° . Como o triângulo adjacente também é equilátero, concluímos que o ângulo BAD é reto. Provamos da mesma forma que os outros ângulos internos são retos. Assim, $ADCB$ é um quadrado cujo lado mede 20 cm, portanto sua área é igual a $20 \times 20 = 400 \text{ cm}^2$. Essa é a área da figura dada.



QUESTÃO 16 – ALTERNATIVA D

Solução: Sejam a e b os números escolhidos. Assim, temos

$$(1 + 2 + \dots + 17) - a - b = ab,$$

ou seja, $153 = a + b + ab$. Logo,

$$154 = a + b + ab + 1 = (a + 1)(b + 1).$$

Considerando os divisores inteiros positivos de $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$ e lembrando que tanto $a + 1$ quanto $b + 1$ são menores que 19, a única possibilidade é $\{a + 1, b + 1\} = \{11, 14\}$ e assim

$$a \cdot b = 10 \cdot 13 = 130.$$

QUESTÃO 17 – ALTERNATIVA E

Solução: Sejam a , b , c números inteiros positivos tais que $1 \cdot a = 3 \cdot b = 6 \cdot c$. Sabemos que nenhum deles é igual a 1, 3 ou 6. Vemos na tabela abaixo alguns ternos de inteiros que satisfazem as condições dadas. Como $98 = 1 \times 2 \times 7 \times 7$, podemos concluir que três dos números distintos que apareceram nas faces são 1, 7 e 14. O 1 certamente é um dos números que podem aparecer, conforme visto na figura. Na tabela abaixo, se fizermos $c = 7$, teremos $b = 14$ e $a = 42$. Ou seja, os números 7 e 14 também podem aparecer em algumas das faces; isto ocorre quando os números das faces são 1, 3, 6, 42 (face oposta à de número 1), 14 (oposta a 3) e 7 (oposta a 6). O maior dentre os números que aparecem em alguma face desse cubo é 42. Esta resposta é única, pois o número 7 não pode aparecer como valor de a ou de b .

a	b	c
12	4	2
24	8	4
30	10	5
42	14	7

QUESTÃO 18 – ALTERNATIVA C

Solução: Dado que as meninas ocupam 5 lugares consecutivos, há 6 possibilidades para a localização desses lugares (o lugar mais à esquerda pode ser o 1º, o 2º, etc, até o 6º). Dessas localizações, apenas na primeira e na última os outros 5 lugares são consecutivos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Logo, a probabilidade de que os meninos fiquem juntos quando as meninas estão juntas é

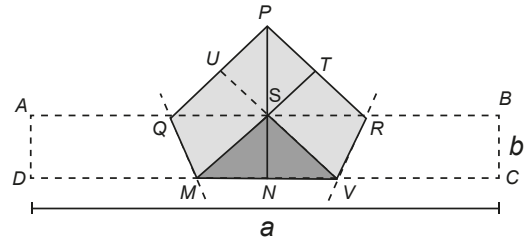
$$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Alternativamente, poderíamos contar as posições específicas das meninas:

$$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

QUESTÃO 19 – ALTERNATIVA B

Solução: A tira retangular $ABCD$, em linhas tracejadas na figura, tem largura $AB = a$ e altura $BC = b$. Depois das dobras em RV e QM , nessa ordem, vemos o lado esquerdo da tira dobrado sobre o lado direito dobrado da tira, de modo que a sobreposição das duas partes dobradas seja exatamente o quadrado $PTSU$, na figura. Além disso, o vértice inferior S desse quadrado pertence à borda superior da tira AB (há casos em que S cai fora da tira e há casos em que S cai dentro da tira, dependendo das dimensões a e b). Assim, $RS = PS = \sqrt{2} PU = \sqrt{2}b$.



Da simetria da figura, temos também que $SB = \frac{a}{2}$, logo $RB = SB - SR = \frac{a}{2} - \sqrt{2}b$.

Por outro lado, no triângulo PRS , temos $PR = \sqrt{2}SR = 2b$. Como $PR = RB$ concluímos que $2b = \frac{a}{2} - \sqrt{2}b$.

Logo, $\frac{a}{b} = 2(2 + \sqrt{2})$.

QUESTÃO 20 – ALTERNATIVA D

Solução: Vamos chamar de “permanecentes” os jogadores que foram até o fim do torneio, e “desistentes” os jogadores que desistiram do torneio.

Suponha que há N permanecentes. Esses jogadores jogaram $N \times (N-1)/2$ partidas entre si.

Suponha que os três desistentes jogaram k partidas entre si, com $k = 0, 1, 2$ ou 3 , e, as demais, quando necessário para completar duas partidas cada um, com alguns dos permanecentes.

Vamos calcular quantas partidas os três desistentes jogaram com os demais jogadores. Se jogaram k partidas entre si, isso dá $2k$ partidas para a soma de partidas dos desistentes. Como essa soma é $3 \times 2 = 6$ (cada um jogou duas partidas), eles têm que ter jogado $6 - 2k$ partidas com os permanecentes.

Assim, temos: $[(N) \times (N-1)/2] + 6 - 2k + k = 50$, ou seja, $N \times (N-1)/2 = 44 + k$

O lado direito é um número entre $44 + 0 = 44$ e $44 + 3 = 47$. O lado esquerdo é, para $N = 1, 2, 3, \dots$ igual a: $0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \dots$ A única possibilidade para N e k , portanto, é $N = 10$ e $k = 1$, quando temos $10 \times 9/2 = 45$ partidas somente entre permanecentes, uma partida entre desistentes ($k = 1$), e quatro partidas entre algum desistente e algum permanente ($6 - 2 \times 1 = 4$). No total, temos $45 + 1 + 4 = 50$ partidas jogadas.

Logo, o total de jogadores no início do torneio era $10 + 3 = 13$.

Podemos também pensar em resolver o problema estimando o número de jogadores permanecentes; esse número não pode ser 11 ou mais, pois, só entre eles, seriam jogados $11 \times 10/2 = 55$ jogos ou mais, ultrapassando 50. O número de permanecentes também não poderia ter sido 9 ou menos senão, entre eles, seriam jogados $9 \times 8/2 = 36$ jogos e, mesmo contando com os jogos dos desistentes, daria menos do que 50 jogos no total. Logo, o número de permanecentes deve ser 10 e, com apenas um jogo entre os desistentes e 4 jogos entre os desistentes e permanecentes, totalizariamos 50.