



SOLUÇÕES NÍVEL 1

1. A figura mostra os primeiros vagões do trenzinho da OBMEP. O primeiro vagão é branco, seguido de dois verdes, depois outro branco, seguido de dois verdes, e assim por diante. Além disso, em cada vagão de número par há uma bandeirinha.



- Qual é o número do primeiro vagão branco com bandeirinha após o vagão de número 8?
- Qual é a cor do vagão de número 2023?
- Quantas bandeirinhas há em vagões brancos até o vagão de número 2023?

Solução N1Q1

- O número do vagão branco com bandeirinha após o vagão de número 8 é 10, basta continuar com o padrão apresentado.



- Os vagões brancos são aqueles cujos números são múltiplos 3 mais 1. Dividindo 2023 por 3 obtemos $2023 = 3 \times 674 + 1$. Logo, o vagão de número 2023 é branco.
- A cada seis vagões consecutivos há exatamente um vagão branco com bandeirinha. Como $2023 = 6 \times 337 + 1$, há 337 bandeirinhas em vagões brancos até o vagão de número 2023.

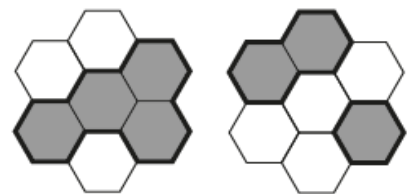
Outras soluções:

- Uma outra maneira de ver isso é observar que os vagões brancos com bandeira são os de números $4 + (n - 1) \times 6$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Quando $n = 337$, chegamos ao

vagão 2020; o próximo vagão branco com bandeira será, portanto, o vagão de número 2026.

- Como 1 a cada 3 vagões consecutivos é branco, há 674 vagões brancos anteriores ao 2023 ($2023 = 1 + 3 \times 674$). Observar que dois vagões brancos consecutivos alternam a paridade; assim, metade destes 674 vagões são de números pares (com bandeirinhas). Logo há $674/2 = 337$ vagões brancos com bandeirinha.
- Como há 1011 vagões pares anteriores a 2023 ($2023 = 1 + 2 \times 1011$), há 1011 vagões com bandeirinhas. Dentre estes vagões com bandeirinhas, 1 a cada 3 vagões consecutivos, a partir do número 4, são brancos. Assim, há $1011/3 = 337$ vagões brancos com bandeirinhas.

2. Em um tabuleiro formado por sete hexágonos de lado 1 cm, podemos fazer figuras diferentes pintando de cinza um ou mais desses hexágonos. Dizemos que o perímetro de uma dessas figuras é o comprimento total de seu contorno. Por exemplo, as duas figuras ao lado possuem perímetros iguais a 16 cm.



- a) Em cada um dos tabuleiros abaixo, pinte três hexágonos formando figuras com os perímetros indicados.



Perímetro 12 cm



Perímetro 18 cm

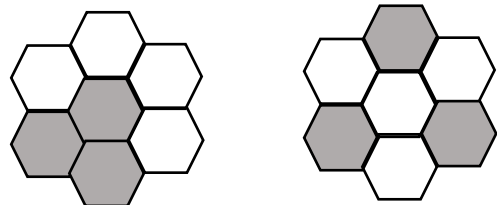
- b) Pinte quatro hexágonos no tabuleiro abaixo formando uma figura que tenha o maior perímetro possível.



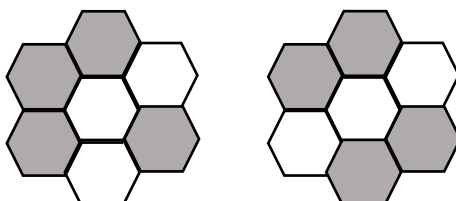
- c) Explique por que qualquer figura formada pintando hexágonos tem perímetro par.

Solução N1Q2

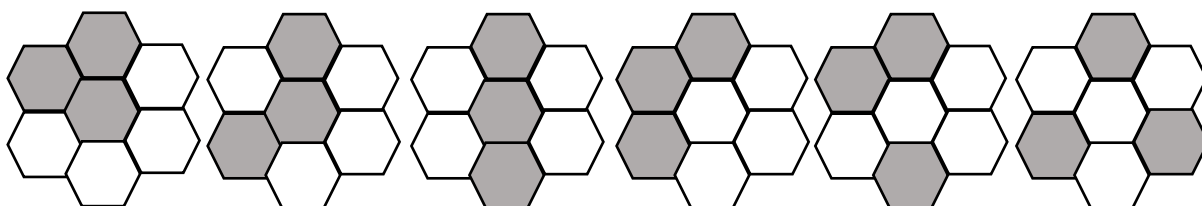
- a) Há várias maneiras de pintar. Veja exemplos:



- b) O maior perímetro possível com 4 hexágonos pintados é 20 cm. Veja dois exemplos:



Por que isso ocorre? Há apenas 6 padrões que podem ser obtidos quando pintamos 3 hexágonos (não levando em conta rotações e reflexões); são eles:



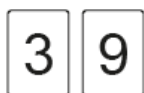
Se pintarmos de cinza um quarto hexágono, somente as duas últimas figuras poderiam produzir uma nova figura com perímetro superior a 20 cm; entretanto, como pode ser verificado diretamente, isso não ocorre já que o quarto hexágono deveria partilhar pelo menos um de seus lados com um hexágono já pintado.

c) Toda vez que pintarmos de cinza dois hexágonos com um lado em comum, a figura formada perde duas unidades de perímetro correspondentes aos lados que se tocam; logo, ou dois hexágonos pintados não se tocam (e o perímetro total é um múltiplo de 6) ou, quando se tocam, a figura formada diminui seu perímetro em um múltiplo de 2.

Assim, não existem figuras pintadas com perímetro ímpar.

3. Aninha tem nove cartões numerados de 1 a 9. Ela forma seqüências com esses cartões colocando alguns deles lado a lado. Uma seqüência de Aninha é chamada de especial quando, para quaisquer dois cartões vizinhos, o número de um deles é múltiplo do número do outro.

Seqüência especial



Seqüência especial



Seqüência **não** especial



a) Apresente uma seqüência especial com sete cartões começando com 6 e 2.



b) Apresente uma seqüência especial com oito cartões.



c) Apresente uma seqüência especial com três cartões em que apareçam os cartões 5 e 7.



d) Explique por que é impossível formar uma seqüência especial com os nove cartões.

Solução N1Q3

- a) Para uma sequência que começa com os cartões 6 e 2, nessa ordem, o próximo cartão pode ser o de número 4, 8 ou 1. Por exemplo, sendo o 4, o cartão seguinte pode ser 8, seguido do 1, resultando em (6, 2, 4, 8, 1). Os cartões seguintes podem ser os de números 9 e 3, resultando em (6, 2, 4, 8, 1, 9, 3), uma sequência especial com sete cartões.
- b) Com base na sequência anterior, com sete cartões, é possível formar uma com oito cartões: os dois últimos cartões, 9 e 3, podem ser movidos para o início da sequência anterior e o cartão de número 5 (ou 7) pode vir à direita do cartão de número 1, resultando em (9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5) (ou (9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 7)).
- c) Os números 5 e 7 são ambos múltiplos do 1. Uma sequência especial com três cartões, dentre eles os de números 5 e 7, pode ser (5, 1, 7). A outra possível é (7, 1, 5).
- d) Dentre todos os cartões, os de números 5 e 7 são aqueles que podem ter menos vizinhos em uma sequência especial (exatamente um vizinho cada, que deve ser o cartão de número 1). Logo, se um deles é usado, o outro não pode ser usado para obter a maior sequência especial possível. Quando o 5 e o 7 são ambos utilizados, obtemos uma das sequências do item c). Portanto, as maiores sequências especiais com os cartões de números 5 ou 7 têm apenas um desses cartões, que deve ser posicionado em uma das suas pontas (ou no início ou no fim). Logo, é impossível formar uma sequência especial usando todos os cartões. As maiores delas têm oito cartões, tal como a do item b).

4. Carlinhos fez todas as adições possíveis com três parcelas diferentes, em que cada parcela é um número de três algarismos iguais, sempre colocando as parcelas em ordem crescente. Por exemplo, $222 + 555 + 888$ e $444 + 777 + 888$ foram adições feitas por Carlinhos. Ele não fez a adição $222 + 888 + 555$, pois as parcelas não estão em ordem crescente, nem a adição $444 + 444 + 777$, pois nela existem parcelas iguais.

- a) Escreva uma adição que Carlinhos fez em que o resultado é 1332.
- b) Escreva todas as adições que Carlinhos fez em que o resultado é 2109.
- c) Explique por que 2109 é o único resultado das adições que Carlinhos fez em que o algarismo das dezenas é diferente do algarismo das centenas.

Solução N1Q4

a) Há várias soluções, por exemplo: $111 + 555 + 666$, $222 + 333 + 777$, $333 + 444 + 555$.

b) Todos os números que Carlinhos considerou são múltiplos de 111, $1 \times 111 = 111$, $2 \times 111 = 222$, $3 \times 111 = 333$, e assim por diante. Por esse motivo, 2109, que é resultado da soma de três desses números, também é múltiplo de 111. Ao dividir 2109 por 111 obtemos quociente 19, ou seja, $2109 = 19 \times 111$.

Em outras palavras, devemos encontrar todas as somas ordenadas de três parcelas para obtermos 19×111 . Existem 5 possibilidades, listadas a seguir.

$$\begin{aligned}
 (2 + 8 + 9) \times 111 &= 222 + 888 + 999 \\
 (3 + 7 + 9) \times 111 &= 333 + 777 + 999 \\
 (4 + 6 + 9) \times 111 &= 444 + 666 + 999 \\
 (4 + 7 + 8) \times 111 &= 444 + 777 + 888 \\
 (5 + 6 + 8) \times 111 &= 555 + 666 + 888
 \end{aligned}$$

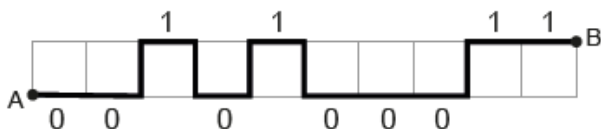
c) As somas de três parcelas de Carlinhos resultando em um número até 999 possuem todas os mesmos algarismos da dezena e centena (não ocorre o “vai um”). Vimos no item anterior que os resultados das contas de Carlinhos são sempre múltiplos de 111. Ao somarmos 111 a 999 obtemos $111 + 999 = 110 + 1 + 999 = 110 + 1000 = 1110$, cujos algarismos da dezena e centena são iguais. Ao somarmos múltiplos de 111 até 888 percebemos que não há alteração na igualdade dos algarismos da dezena e centena; portanto, esses algarismos continuam iguais até $1110 + 888 = 1998$. Mas, agora, ao somarmos 111, obtemos exatamente $111 + 1998 = 109 + 2 + 1998 = 109 + 2000 = 2109$, que possui algarismos de dezena e centena distintos. Continuando, notamos que ao somar 111 a esse número obtemos $2109 + 111 = 2220$, que volta a ter os mesmos algarismos da dezena e da centena, e qualquer soma de múltiplos de 111 até 777 não vai mudar essa situação. O maior número que Carlinhos pode obter é $777 + 888 + 999 = (7 + 8 + 9) \times 111 = 24 \times 111 = 2664$; portanto, 2109 é o único número que Carlinhos obtém com algarismos distintos na dezena e na centena.

Outra solução: As somas de Carlinhos são todas do tipo $aaa + bbb + ccc$, com $a < b < c$. A única maneira do algarismo das dezenas do resultado da conta ser diferente do das centenas ocorre quando $a + b + c = 19$ (“vai um” das unidades para as dezenas, depois “vai dois” das dezenas para as centenas), pois a soma $a + b + c$ varia de 6 a 24.

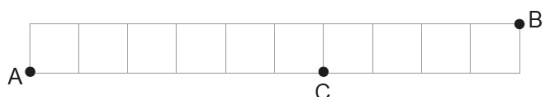
5. A formiguinha da OBMEP caminha do ponto A até o ponto B ao longo dos lados dos 10 quadradinhos da figura abaixo.



Ela só pode andar para a direita, para cima ou para baixo, sem passar por onde já passou. Para representar um caminho ela inventou o seguinte código: para cada quadradinho, da esquerda para a direita, se ela passar por baixo escreve 0, e se passar por cima escreve 1. Na figura a seguir observamos o caminho 0010100011.



- a) Desenhe o caminho 1001001100.
- b) De quantas maneiras diferentes a formiguinha pode ir de A até B?
- c) De quantas maneiras diferentes a formiguinha pode ir de A até B passando pelo ponto C?



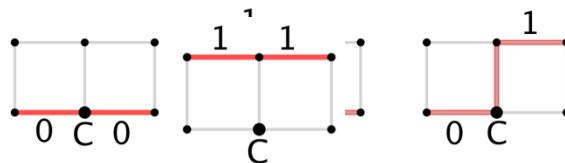
Solução N1Q5

a)



- b) Um caminho de A até B é determinado pelas escolhas da formiguinha de como ela vai passar por cada quadradinho. Ela pode escolher se vai passar por baixo (0) ou por cima (1). Dessa maneira, ela tem 10 escolhas a fazer e, para cada escolha, ela tem 2 possibilidades. Como qualquer escolha independe das anteriores, segue que o número de caminhos de A até B é $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024$.

- c) A formiguinha pode passar por C de 3 maneiras diferentes, como mostrado na figura abaixo.

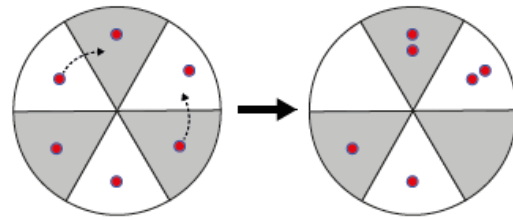


Dessa maneira, para escolher um caminho passando por C, ela pode primeiro escolher uma das 3 possibilidades acima e depois escolher como vai passar pelos outros 8 quadradinhos. Dessa maneira, ela pode ir de A para B passando por C de $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^8 = 768$ maneiras diferentes.

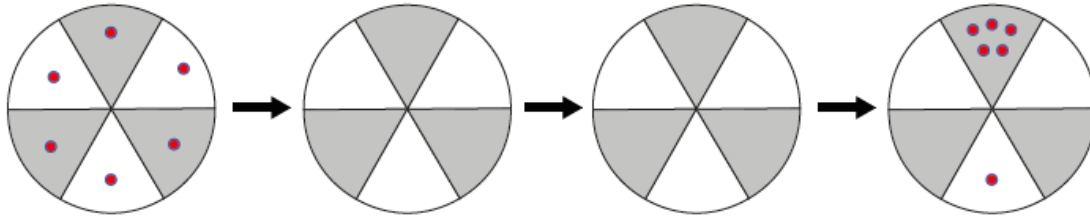
Outra maneira de resolver esse item é notar que para **não** passar por C a formiguinha tem que percorrer o seguinte trajeto em seu caminho de A até B e isso pode ser feito de 2^8 maneiras diferentes. Desse modo, ela pode passar por C de $2^{10} - 2^8 = (2^2 - 1) \times 2^8 = 3 \times 2^8 = 768$ maneiras diferentes, como antes.

6. Um tabuleiro circular é dividido em seis setores iguais pintados alternadamente de cinza e branco. Inicialmente há uma bolinha em cada setor. As bolinhas são movimentadas em etapas obedecendo as seguintes regras:

- escolhemos duas bolinhas quaisquer;
- em seguida deslocamos uma dessas bolinhas para o setor vizinho no sentido horário e, simultaneamente, deslocamos a outra bolinha para o setor vizinho no sentido anti-horário.



a) Indique na figura abaixo como chegar ao tabuleiro final em três etapas.

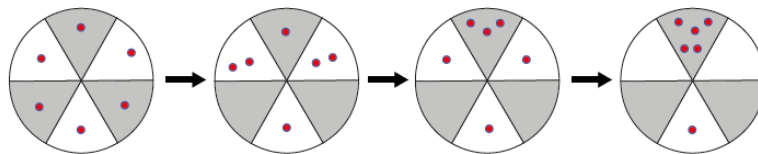


b) Explique por que, partindo do tabuleiro inicial e após qualquer número de etapas, a quantidade de bolinhas em setores brancos é sempre ímpar.

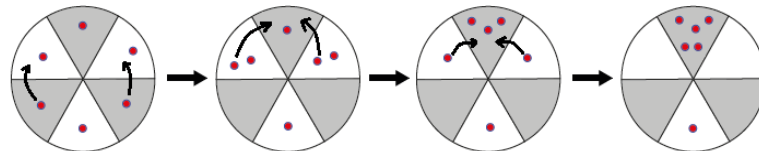
c) Explique por que é impossível, partindo do tabuleiro inicial, colocar todas as bolinhas em um mesmo setor.

Solução N1Q6

a)



ou, indicando os movimentos,



b) As bolinhas que serão movimentadas podem estar:

1. ambas em setores cinzas;
2. ambas em setores brancos;
3. uma em um setor cinza e uma em um setor branco.

Analisemos o que acontece após um movimento em cada um desses casos.

1. Ambas bolinhas em setores cinzas – após um movimento, cada uma delas irá para um setor branco, ou seja, o número total de bolinhas em setores brancos irá aumentar em duas unidades;

2. Ambas bolinhas em setores brancos – após um movimento, cada uma delas irá para um setor cinza, ou seja, o número total de bolinhas em setores brancos irá diminuir em duas unidades;

3. Uma bolinha em um setor cinza e uma bolinha em setor branco – após um movimento, a bolinha do setor cinza irá para um setor branco e a bolinha do setor branco irá para um setor cinza, ou seja, o número total de bolinhas em setores brancos fica inalterado.

Pelo que vimos, após cada movimento, o número de bolinhas em setores brancos aumenta em duas unidades, diminui em duas unidades ou fica inalterado, ou seja, se é

ímpar inicialmente, permanecerá sempre ímpar. Note que o mesmo argumento vale para a quantidade de bolinhas em setores cinzas, ou seja, a partir da configuração inicial, essa quantidade também será sempre ímpar.

c) Se colocarmos todas as bolinhas em um mesmo setor cinza (ou branco), teremos um número par de bolinhas (seis) em um setor cinza (ou branco). Mas a quantidade total de bolinhas nos setores brancos (ou da cor cinza), iniciando-se como no enunciado, é sempre ímpar; logo, é impossível colocá-las todas em um mesmo setor.