



SOLUÇÕES NÍVEL 2

1. Aninha tem nove cartões numerados de 1 a 9. Ela forma sequências com esses cartões colocando alguns deles lado a lado. Uma sequência de Aninha é chamada de especial quando, para quaisquer dois cartões vizinhos, o número de um deles é múltiplo do número do outro.

Sequência especial

3	9
---	---

Sequência especial

2	6	1	5
---	---	---	---

Sequência **não** especial

4	2	3
---	---	---

a) Apresente uma sequência especial com sete cartões começando com 6 e 2.

6	2					
---	---	--	--	--	--	--

b) Apresente uma sequência especial com oito cartões.

--	--	--	--	--	--	--	--

c) Apresente uma sequência especial com três cartões em que apareçam os cartões 5 e 7.

--	--	--

d) Explique por que é impossível formar uma sequência especial com os nove cartões.

Solução N2Q1

- a) Para uma sequência que começa com os cartões 6 e 2, nessa ordem, o próximo cartão pode ser o de número 4, 8 ou 1. Por exemplo, sendo o 4, o cartão seguinte pode ser 8, seguido do 1, resultando em (6, 2, 4, 8, 1). Os cartões seguintes podem ser os de números 9 e 3, resultando em (6, 2, 4, 8, 1, 9, 3), uma sequência especial com sete cartões.

- b) Com base na sequência anterior, com sete cartões, é possível formar uma com oito cartões: os dois últimos cartões, 9 e 3, podem ser movidos para o início da sequência anterior e o cartão de número 5 (ou 7) pode vir à direita do cartão de número 1, resultando em (9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5) (ou (9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 7)).
- c) Os números 5 e 7 são ambos múltiplos do 1. Uma sequência especial com três cartões, dentre eles os de números 5 e 7, pode ser (5, 1, 7). A outra possível é (7, 1, 5).
- d) Dentre todos os cartões, os de números 5 e 7 são aqueles que podem ter menos vizinhos em uma sequência especial (exatamente um vizinho cada, que deve ser o cartão de número 1). Logo, se um deles é usado, o outro não pode ser usado para obter a maior sequência especial possível. Quando o 5 e o 7 são ambos utilizados, obtemos uma das sequências do item c). Portanto, as maiores sequências especiais com os cartões de números 5 ou 7 têm apenas um desses cartões, que deve ser posicionado em uma das suas pontas (ou no início ou no fim). Logo, é impossível formar uma sequência especial usando todos os cartões. As maiores delas têm oito cartões, tal como a do item b).

2. Carlinhos fez todas as adições possíveis com três parcelas diferentes, em que cada parcela é um número de três algarismos iguais, sempre colocando as parcelas em ordem crescente. Por exemplo, $222 + 555 + 888$ e $444 + 777 + 888$ foram adições feitas por Carlinhos. Ele não fez a adição $222 + 888 + 555$, pois as parcelas não estão em ordem crescente, nem a adição $444 + 444 + 777$, pois nela existem parcelas iguais.

- a) Escreva uma adição que Carlinhos fez em que o resultado é 1332.
- b) Escreva todas as adições que Carlinhos fez em que o resultado é 2109.
- c) Explique por que 2109 é o único resultado das adições que Carlinhos fez em que o algarismo das dezenas é diferente do algarismo das centenas.

Solução N2Q2

a) Há várias soluções, por exemplo: $111 + 555 + 666$, $222 + 333 + 777$, $333 + 444 + 555$.

b) Todos os números que Carlinhos considerou são múltiplos de 111, $1 \times 111 = 111$, $2 \times 111 = 222$, $3 \times 111 = 333$, e assim por diante. Por esse motivo, 2109, que é resultado da soma de três desses números, também é múltiplo de 111. Ao dividir 2109 por 111 obtemos quociente 19, ou seja, $2109 = 19 \times 111$.

Em outras palavras, devemos encontrar todas as somas ordenadas de três parcelas para obtermos 19×111 . Existem 5 possibilidades, listadas a seguir.

$$(2 + 8 + 9) \times 111 = 222 + 888 + 999$$

$$(3 + 7 + 9) \times 111 = 333 + 777 + 999$$

$$(4 + 6 + 9) \times 111 = 444 + 666 + 999$$

$$(4 + 7 + 8) \times 111 = 444 + 777 + 888$$

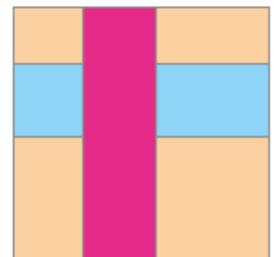
$$(5 + 6 + 8) \times 111 = 555 + 666 + 888$$

c) As somas de três parcelas de Carlinhos resultando em um número até 999 possuem todas os mesmos algarismos da dezena e centena (não ocorre o “vai um”). Vimos no item anterior que os resultados das contas de Carlinhos são sempre múltiplos de 111. Ao somarmos 111 a 999 obtemos $111 + 999 = 110 + 1 + 999 = 110 + 1000 = 1110$, cujos algarismos da dezena e centena são iguais. Ao somarmos múltiplos de 111 até 888 percebemos que não há alteração na igualdade dos algarismos da dezena e centena; portanto, esses algarismos continuam iguais até $1110 + 888 = 1998$. Mas, agora, ao somarmos 111, obtemos exatamente $111 + 1998 = 109 + 2 + 1998 = 109 + 2000 = 2109$, que possui algarismos de dezena e centena distintos. Continuando, notamos que ao somar 111 a esse número obtemos $2109 + 111 = 2220$, que volta a ter os mesmos algarismos da dezena e da centena, e qualquer soma de múltiplos de 111 até 777 não vai mudar essa situação. O maior número que Carlinhos pode obter é $777 + 888 + 999 = (7 + 8 + 9) \times 111 = 24 \times 111 = 2664$; portanto, 2109 é o único número que Carlinhos obtém com algarismos distintos na dezena e na centena.

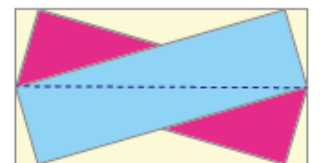
Outra solução: As somas de Carlinhos são todas do tipo $aaa + bbb + ccc$, com $a < b < c$. A única maneira do algarismo das dezenas do resultado da conta ser diferente do das centenas ocorre quando $a + b + c = 19$ (“vai um” das unidades para as dezenas, depois “vai dois” das dezenas para as centenas), pois a soma $a + b + c$ varia de 6 a 24.

3. Marco ganhou dois tapetes retangulares medindo 2 metros de largura por 7 metros de comprimento cada um. Inicialmente, Marco colocou os dois tapetes de modo a encaixá-los exatamente sobre o piso de uma sala quadrada, conforme mostrado na figura.

a) Qual é a área do piso da sala não coberta pelos tapetes?



Marco resolveu tirar os tapetes dessa sala e colocá-los em um quarto retangular, conforme indicado na figura. A linha tracejada é uma diagonal comum a ambos os tapetes. Todos os vértices dos tapetes estão sobre o contorno do piso.



b) Qual é a área do piso do quarto?

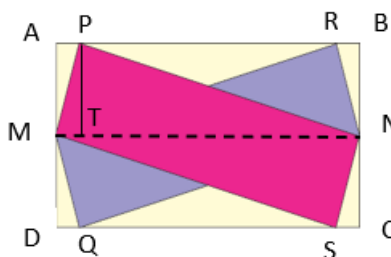
c) Explique por que a área do piso do quarto não coberta pelos tapetes é igual à área da sobreposição dos tapetes.

Solução N2Q3

a) O comprimento e a largura do piso da sala são iguais ao comprimento dos tapetes, ou seja, 7 m. Logo, o piso da sala é um quadrado cuja área é igual a $7 \times 7 = 49 \text{ m}^2$. A área coberta pelos tapetes é igual à soma das áreas dos tapetes menos a área do quadrado

2×2 que é a sobreposição dos mesmos. Logo, a área não coberta pelos tapetes é igual a $49 - (2 \times 14) + 4 = 25 \text{ m}^2$.

b) Na figura, o retângulo ABCD representa o piso do quarto e o segmento MN é a diagonal comum aos dois retângulos que representam os tapetes. Como os dois tapetes têm as mesmas medidas, os quatro triângulos PMN, MSN, MQN e MNR são congruentes, portanto, eles têm as mesmas alturas; assim, os pontos P e R equidistam de MN e estão, desta maneira, sobre uma reta paralela a MN. Analogamente Q e S estão sobre outra reta paralela a MN pois equidistam dela. Além disso, como as alturas dos mencionados quatro triângulos são iguais, M é ponto médio de AD e N é ponto médio de BC.



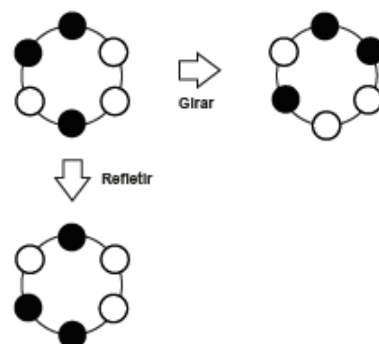
Se P é o vértice do tapete indicado na figura e o segmento PT é a altura do triângulo PNM relativa ao lado MN, então a área desse triângulo é metade do produto $MN \times PT$, que, por sua vez, é igual à área do retângulo ABNM. Vemos também que o triângulo PNM é metade do tapete. Como a área do tapete é $7 \times 2 = 14$, concluímos que a área do retângulo ABNM é igual a 14 m^2 . Da mesma maneira, por simetria, concluímos que a área do retângulo MNCD é igual a 14 m^2 . Portanto, a área do piso do quarto é igual a $14 + 14 = 28 \text{ m}^2$. Note que essa área é igual à soma das áreas dos dois tapetes.

c) A área da parte do piso que não está coberta pelos tapetes é igual à área total do piso menos a área coberta pelos tapetes. Esta, como já vimos, é igual a duas vezes a área de cada tapete, menos a área de sobreposição dos dois tapetes. Temos, assim,

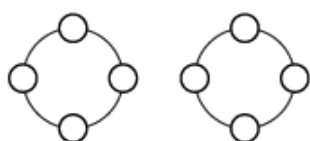
$$\text{Área (piso não coberta)} = \text{Área (piso)} - [2 \times \text{Área (tapete)} - \text{Área (sobreposição)}]$$

Vimos acima que $\text{Área (piso)} = 2 \times \text{Área (tapete)}$; logo, $\text{Área (piso não coberta)} = \text{Área (sobreposição)}$.

4. Isabel faz pulseiras com bolinhas pretas e brancas igualmente espaçadas entre si. Girar ou refletir a pulseira não produz uma pulseira diferente. A figura mostra uma mesma pulseira em três posições diferentes sobre uma mesa.



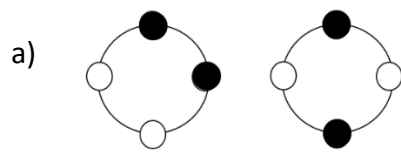
a) Com duas bolinhas pretas e duas brancas, Isabel consegue fazer apenas duas pulseiras diferentes. Represente essas pulseiras na figura abaixo pintando as bolinhas pretas.



b) Quantas pulseiras diferentes Isabel pode fazer usando três bolinhas pretas e três bolinhas brancas?

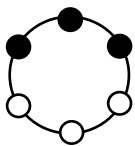
c) Quantas pulseiras diferentes Isabel pode fazer usando quatro bolinhas pretas e quatro bolinhas brancas?

Solução N2Q4

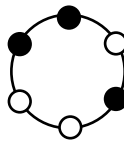


b) São três pulseiras diferentes.

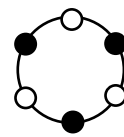
Para três bolinhas pretas seguidas temos uma pulseira.



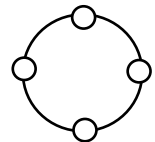
Para exatamente duas bolinhas pretas seguidas temos uma pulseira.



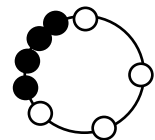
Para as bolinhas pretas e brancas alternadas temos uma pulseira.



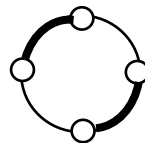
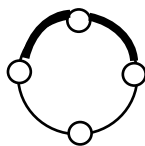
c) São oito pulseiras diferentes. Primeiro imaginamos que já foram colocadas 4 bolinhas brancas em um círculo; formam-se 4 intervalos entre elas. A ideia é escolher organizadamente alguns desses intervalos e colocar neles as 4 bolinhas pretas, identificando pulseiras a menos de giros e de reflexões.



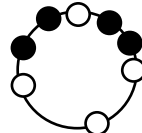
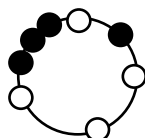
Escolhemos somente um dos intervalos e colocamos nele as 4 bolinhas pretas, como na figura ao lado.



Existem 2 maneiras de selecionar dois dos 4 intervalos (vizinhos ou não vizinhos).



No primeiro desses casos, podemos colocar as bolinhas pretas de 2 maneiras diferentes:



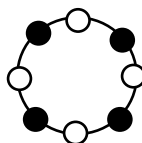
No segundo desses casos, também podemos colocar as bolinhas pretas de 2 maneiras diferentes:



Existe, de acordo com o enunciado, apenas uma maneira de escolher 3 intervalos seguidos (os 3 devem ser vizinhos) e, neste caso, duas maneiras diferentes de colocar as bolinhas pretas:



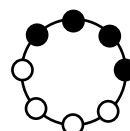
Só há uma maneira de selecionar os 4 intervalos e, portanto, só uma maneira de colocar neles as 4 bolinhas pretas:



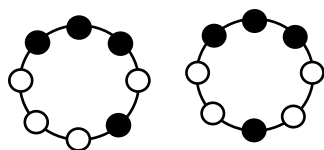
Assim, há 8 pulseiras diferentes com 4 bolinhas pretas e 4 bolinhas brancas.

Outra solução:

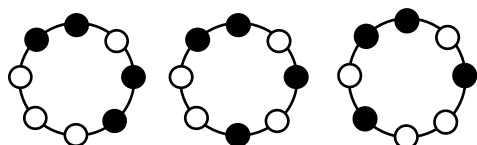
Para quatro bolinhas pretas seguidas temos uma pulseira:



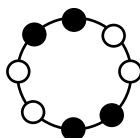
Para exatamente três bolinhas pretas seguidas temos duas pulseiras:



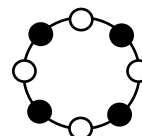
Para exatamente duas bolinhas pretas seguidas temos três pulseiras:



Para um par de duas pretas seguidas:



Para as bolinhas pretas e brancas alternadas temos uma pulseira:



5. Zequinha quer colorir os inteiros positivos de branco ou preto, obedecendo às regras abaixo:

- se n é inteiro então n e $n + 5$ devem ter a mesma cor;
- se a e b são inteiros e $n = ab$ for branco, então pelo menos um dos fatores a ou b deve ser branco.

- Explique por que se o 38 for branco, o 3 também deve ser branco.
- Explique por que se o 4 for branco, o 2 também deve ser branco.
- Explique por que se o 1 for branco, o 4 também deve ser branco.
- Explique por que o 2 e o 3 sempre devem ter a mesma cor.

Solução N2Q5

a) Aplicando a primeira regra para os inteiros $n = 33$ e $n + 5 = 38$, segue que

- 33 e $33 + 5 = 38$

devem ter a mesma cor, bem como os inteiros

- 28 e $28 + 5 = 33$
- 23 e $23 + 5 = 28$
- 18 e $18 + 5 = 23$
- 13 e $13 + 5 = 18$
- 8 e $8 + 5 = 13$
- 3 e $3 + 5 = 8$

Concluimos assim, pela primeira regra, que os inteiros 3, 8, 13, 18, 23, 28 e 33 devem ter a mesma cor. Logo, se Zequinha colorir o 38 de branco, a cor do 3 deve ser branca.

b) De acordo com a segunda regra, se a e b são inteiros e $n = ab$ for branco, então pelo menos um dos fatores a ou b deve ser branco. No caso em que $a = b = 2$ e $n = ab = 2 \cdot 2 = 4$ for branco, temos dois fatores a e b iguais a 2 em que pelo menos um deles, no caso o 2, deve ser branco. A segunda regra aplicada em quadrados perfeitos $n = a^2$ diz que se $n = a^2$ for branco então a deve ser branco.

c) Se o 1 for branco então, pela primeira regra, os inteiros 1, $1 + 5 = 6$, $6 + 5 = 11$ e $11 + 5 = 16$ devem ter a mesma cor branca. Por outro lado, a segunda regra aplicada ao quadrado perfeito $16 = 4^2$ diz que se 16 for branco então 4 deve ser branco. Logo, se o 1 for branco, o 16 e o 4 também serão brancos.

d) Temos que explicar por que o 2 e o 3 sempre terão a mesma cor segundo as regras de pintura que Zequinha deve obedecer. Vamos fazer isso justificando por que essas regras não permitem que o 2 e o 3 sejam pintados de cores diferentes. Temos duas possibilidades para o 2 e o 3 terem cores diferentes:

- Caso em que 2 é preto e 3 é branco:

Nesse caso, como 3 é branco segue, pela primeira regra, que $8 = (3 + 5)$ será branco. Como $8 = 2 \cdot 4$ e 2 é preto, segue, pela segunda regra, que 4 será necessariamente branco. Sendo $4 = 2^2$ branco segue, pela segunda regra, que 2 será branco. Mas 2 não pode ser branco porque estamos no caso em que 2 é preto.

- Caso em que 2 é branco e 3 é preto:

Nesse caso, como 2 é branco segue pela primeira regra que $12 = (2 + 5) + 5$ será branco. Como $12 = 3 \cdot 4$ e 3 é preto, segue, pela segunda regra, que 4 será necessariamente branco. Sendo 4 branco, segue, pela primeira regra, que $9 = 4 + 5$ será

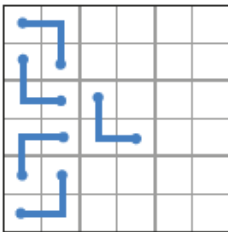
branco. Sendo $9 = 3^2$ branco, segue pela segunda regra, que 3 será branco. Mas 3 não pode ser branco porque estamos no caso em que 3 é preto.

Assim, os casos em que 2 e 3 tem cores diferentes nunca ocorrem segundo as regras de pintura que Zequinha deve obedecer.

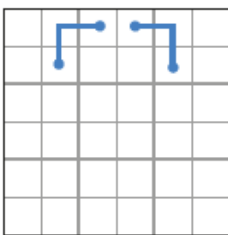
6. Jade possui um tabuleiro 6×6 e 12 peças em formato de L, como na figura. Cada peça cobre três quadradinhos do tabuleiro. Ela coloca as peças no tabuleiro sem sobreposição.



a) Jade já colocou algumas peças no tabuleiro abaixo. Termine de colocar as peças que faltam, cobrindo todas as casas do tabuleiro.



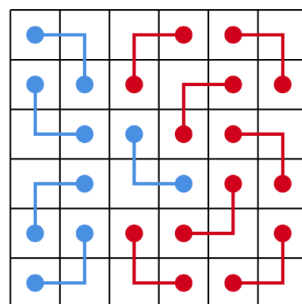
b) Jade colocou 2 peças no tabuleiro como na figura. Coloque mais 4 peças nesse tabuleiro de modo que seja impossível colocar uma sétima peça.



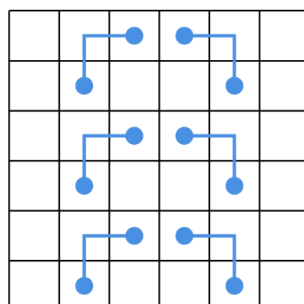
c) Explique por que, qualquer que seja a maneira que Jade colocar 5 peças no tabuleiro, sempre será possível colocar mais uma.

Solução N2Q6

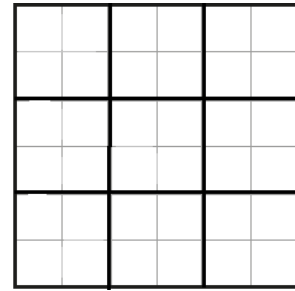
a)



b)

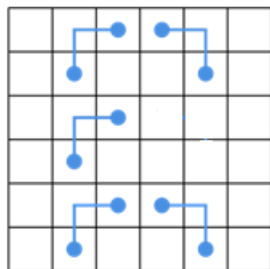


- c) Dividimos o tabuleiro em 9 subtabuleiros 2×2 , conforme a ilustração e vamos usar o Princípio das Casas de Pombos. Vamos pintar de preto as casas ocupadas pelas cinco peças. Como cada peça ocupa três casas, 15 casas serão pintadas de preto.



Observe que se existir um subtabuleiro 2×2 com no máximo uma casa preta, isto é, com 0 ou 1 casa preta, será possível colocar uma peça nesse subtabuleiro. Como particionamos o tabuleiro 6×6 em 9 subtabuleiros 2×2 , para evitar que uma nova peça seja colocada, precisaríamos garantir que pelo menos $2 \times 9 = 18$ casas fossem pretas. Fato que não ocorre, pois com 5 peças cobrimos 15 casas. Logo, sempre será possível colocar uma peça a mais.

Observação: depois de colocadas 5 peças no tabuleiro, existirá sempre uma maneira de se colocar mais duas peças. De fato, por mais atenciosos que sejamos em colocar 5 peças e tentar evitar a colocação de outras peças, no máximo 7 dos subtabuleiros 2×2 terão duas ou mais casas pretas cobertas por essas peças (para que houvesse 8, precisaríamos de pelo menos 16 casas pretas e há apenas 15). É o que ocorre, por exemplo, na situação abaixo:



Logo, há pelo menos dois tabuleiros 2×2 com menos de duas casas cobertas, nas quais podemos colocar novas peças.