



SOLUÇÕES NÍVEL 3

1. Aninha tem nove cartões numerados de 1 a 9. Ela forma seqüências com esses cartões colocando alguns deles lado a lado. Uma seqüência de Aninha é chamada de especial quando, para quaisquer dois cartões vizinhos, o número de um deles é múltiplo do número do outro.

Seqüência especial

3	9
---	---

Seqüência especial

2	6	1	5
---	---	---	---

Seqüência **não** especial

4	2	3
---	---	---

a) Apresente uma seqüência especial com sete cartões começando com 6 e 2.

6	2					
---	---	--	--	--	--	--

b) Apresente uma seqüência especial com oito cartões.

--	--	--	--	--	--	--	--

c) Apresente uma seqüência especial com três cartões em que apareçam os cartões 5 e 7.

--	--	--

d) Explique por que é impossível formar uma seqüência especial com os nove cartões.

Solução N3Q1

- a) Para uma seqüência que começa com os cartões 6 e 2, nessa ordem, o próximo cartão pode ser o de número 4, 8 ou 1. Por exemplo, sendo o 4, o cartão seguinte pode ser 8, seguido do 1, resultando em (6, 2, 4, 8, 1). Os cartões seguintes podem ser os de números 9 e 3, resultando em (6, 2, 4, 8, 1, 9, 3), uma seqüência especial com sete cartões.

- b) Com base na sequência anterior, com sete cartões, é possível formar uma com oito cartões: os dois últimos cartões, 9 e 3, podem ser movidos para o início da sequência anterior e o cartão de número 5 (ou 7) pode vir à direita do cartão de número 1, resultando em (9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5) (ou (9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 7)).
- c) Os números 5 e 7 são ambos múltiplos do 1. Uma sequência especial com três cartões, dentre eles os de números 5 e 7, pode ser (5, 1, 7). A outra possível é (7, 1, 5).
- d) Dentre todos os cartões, os de números 5 e 7 são aqueles que podem ter menos vizinhos em uma sequência especial (exatamente um vizinho cada, que deve ser o cartão de número 1). Logo, se um deles é usado, o outro não pode ser usado para obter a maior sequência especial possível. Quando o 5 e o 7 são ambos utilizados, obtemos uma das sequências do item c). Portanto, as maiores sequências especiais com os cartões de números 5 ou 7 têm apenas um desses cartões, que deve ser posicionado em uma das suas pontas (ou no início ou no fim). Logo, é impossível formar uma sequência especial usando todos os cartões. As maiores delas têm oito cartões, tal como a do item b).

2. Zequinha quer colorir os inteiros positivos de branco ou preto, obedecendo às regras abaixo:

- se n é inteiro então n e $n + 5$ devem ter a mesma cor;
 - se a e b são inteiros e $n = ab$ for branco, então pelo menos um dos fatores a ou b deve ser branco.
- a) Explique por que se o 38 for branco, o 3 também deve ser branco.
- b) Explique por que se o 4 for branco, o 2 também deve ser branco.
- c) Explique por que se o 1 for branco, o 4 também deve ser branco.
- d) Explique por que o 2 e o 3 sempre devem ter a mesma cor.

Solução N3Q2

a) Aplicando a primeira regra para os inteiros $n = 33$ e $n + 5 = 38$, segue que

- 33 e $33 + 5 = 38$

devem ter a mesma cor, bem como os inteiros

- 28 e $28 + 5 = 33$
- 23 e $23 + 5 = 28$
- 18 e $18 + 5 = 23$
- 13 e $13 + 5 = 18$
- 8 e $8 + 5 = 13$
- 3 e $3 + 5 = 8$

Concluimos assim, pela primeira regra, que os inteiros 3, 8, 13, 18, 23, 28 e 33 devem ter a mesma cor. Logo, se Zequinha colorir o 38 de branco, a cor do 3 deve ser branca.

b) De acordo com a segunda regra, se a e b são inteiros e $n = ab$ for branco, então pelo menos um dos fatores a ou b deve ser branco. No caso em que $a = b = 2$ e $n = ab = 2 \cdot 2 = 4$ for branco, temos dois fatores a e b iguais a 2 em que pelo menos um deles, no

caso o 2, deve ser branco. A segunda regra aplicada em quadrados perfeitos $n = a^2$ diz que se $n = a^2$ for branco então a deve ser branco.

c) Se o 1 for branco então, pela primeira regra, os inteiros 1, $1 + 5 = 6$, $6 + 5 = 11$ e $11 + 5 = 16$ devem ter a mesma cor branca. Por outro lado, a segunda regra aplicada ao quadrado perfeito $16 = 4^2$ diz que se 16 for branco então 4 deve ser branco. Logo, se o 1 for branco, o 16 e o 4 também serão brancos.

d) Temos que explicar por que o 2 e o 3 sempre terão a mesma cor segundo as regras de pintura que Zequinha deve obedecer. Vamos fazer isso justificando por que essas regras não permitem que o 2 e o 3 sejam pintados de cores diferentes. Temos duas possibilidades para o 2 e o 3 terem cores diferentes:

- Caso em que 2 é preto e 3 é branco:

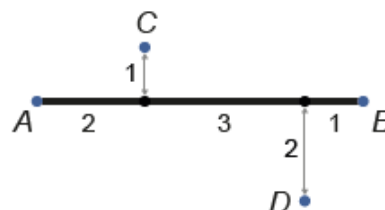
Nesse caso, como 3 é branco segue, pela primeira regra, que $8 = (3 + 5)$ será branco. Como $8 = 2 \cdot 4$ e 2 é preto, segue, pela segunda regra, que 4 será necessariamente branco. Sendo $4 = 2^2$ branco segue, pela segunda regra, que 2 será branco. Mas 2 não pode ser branco porque estamos no caso em que 2 é preto.

- Caso em que 2 é branco e 3 é preto:

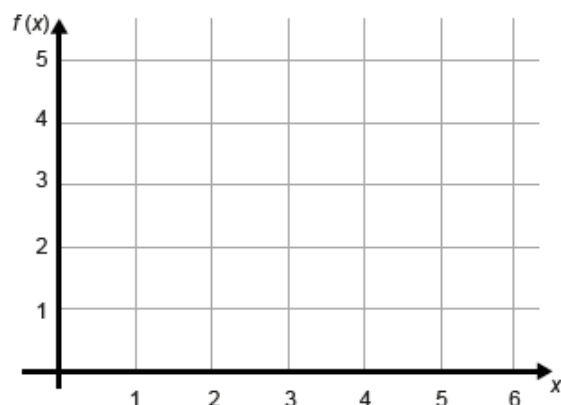
Nesse caso, como 2 é branco segue pela primeira regra que $12 = (2 + 5) + 5$ será branco. Como $12 = 3 \cdot 4$ e 3 é preto, segue, pela segunda regra, que 4 será necessariamente branco. Sendo 4 branco, segue, pela primeira regra, que $9 = 4 + 5$ será branco. Sendo $9 = 3^2$ branco, segue pela segunda regra, que 3 será branco. Mas 3 não pode ser branco porque estamos no caso em que 3 é preto.

Assim, os casos em que 2 e 3 tem cores diferentes nunca ocorrem segundo as regras de pintura que Zequinha deve obedecer.

3. Um carro percorre o trajeto AB indicado na figura. Nas proximidades do trajeto, existem antenas de celular com suas bases nos pontos C e D , também indicados. A distância do carro ao ponto A é representada por x . Considere a função f que associa x ao quadrado da distância do carro à base da antena mais próxima. Por exemplo, quando o carro está em A , a antena mais próxima é C e o quadrado da distância do carro a ela é $2^2 + 1^2 = 5$; portanto, $f(0) = 5$.



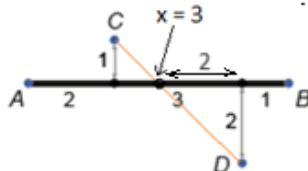
- Qual é o valor de $f(3)$?
- Qual é o valor de x para que as distâncias do carro às antenas sejam iguais?
- Faça o gráfico da função f .



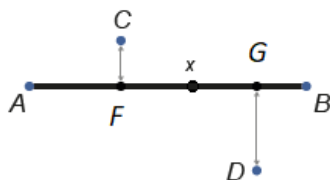
Solução N3Q3

Consideraremos a posição do carro como um ponto no segmento AB .

- A distância ao quadrado do ponto $x = 3$ até o ponto C é, pelo Teorema de Pitágoras, igual a $1^2 + 1^2 = 2$, enquanto que a distância ao quadrado de $x = 3$ até o ponto D é $2^2 + 2^2 = 8$. Logo, $f(3) = 2$.



- As distâncias até as bases das antenas serão iguais em um ponto x localizado entre os pontos F e G descritos na figura abaixo.

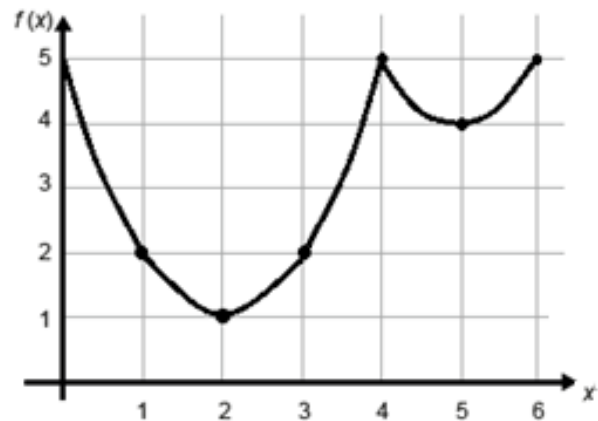


O quadrado da distância de x até C é $1 + (x - 2)^2 = 5 - 4x + x^2$ e o quadrado da distância de x até D é $4 + (5 - x)^2 = 29 - 10x + x^2$.

Igualando as duas expressões temos $6x = 24$; logo, $x = 4$ é o ponto em que as distâncias até as bases são iguais.

c) Do item b) e da simetria do quadrado da distância aos pontos F e G , temos

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 4x + x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 29 - 10x + x^2, & \text{se } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$



4. Três pessoas entram em um elevador no andar térreo de um prédio com quatro andares, além do térreo. Cada uma delas escolhe um andar ao acaso, independentemente das demais.

- Qual é a probabilidade de que o elevador pare em um único andar?
- Qual é a probabilidade de que o elevador pare no 1º andar?
- Qual é a probabilidade de que o elevador pare em três andares consecutivos?

Solução N3Q4

Primeira solução:

Nesta solução não há a possibilidade de uma pessoa apertar a tecla do térreo, estando nele.

As três pessoas que entram no elevador podem escolher seus andares de $4 \times 4 \times 4 = 64$ modos.

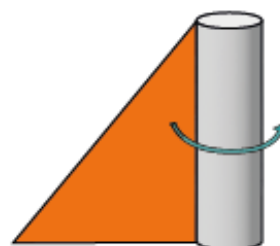
- O andar comum das três pessoas pode ser escolhido de 4 modos. Logo, a probabilidade de que todos se dirijam ao mesmo andar é $\frac{\text{no. casos favoráveis}}{\text{no. casos possíveis}} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$.
- Para que o elevador **não** pare no 1º andar, as três pessoas devem escolher um andar diferente do primeiro, o que pode ser feito de $3 \times 3 \times 3 = 27$ modos. Logo, a probabilidade de que o elevador não pare no 1º andar é $\frac{\text{no. casos favoráveis}}{\text{no. casos possíveis}} = \frac{27}{64}$ e, portanto, a probabilidade de que ele pare nesse andar é $1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$.
- Os três andares consecutivos podem ser 1, 2 e 3 ou 2, 3 e 4 (duas possibilidades). Em cada um desses casos, a primeira pessoa pode escolher seu andar de 3 modos, a segunda de 2 modos e, para a terceira, só resta 1 modo de fazer essa escolha. Logo, a probabilidade de que o elevador pare em três andares consecutivos é $\frac{\text{no. casos favoráveis}}{\text{no. casos possíveis}} = \frac{2 \times 3 \times 2 \times 1}{64} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$.

Segunda solução N3Q4

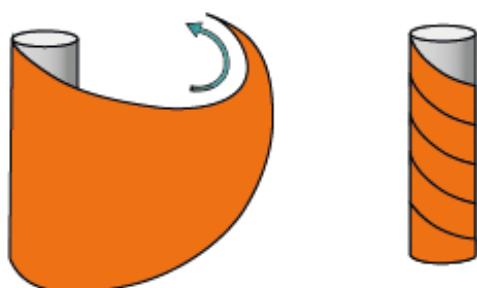
Podemos considerar o andar térreo como um dos andares do prédio como os demais, com a possibilidade de uma pessoa apertar a tecla desse andar, mesmo estando nele. Assim, as três pessoas que entram no elevador podem escolher seus andares de $5 \times 5 \times 5 = 125$ modos.

- a) O andar comum das três pessoas pode ser escolhido de 5 modos. Logo, a probabilidade de que todos se dirijam ao mesmo andar é $\frac{\text{no. casos favoráveis}}{\text{no. casos possíveis}} = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}$.
- b) Para que o elevador **não** pare no 1º andar, as três pessoas devem escolher um andar diferente do primeiro, o que pode ser feito de $4 \times 4 \times 4 = 64$ modos. Logo, a probabilidade de que o elevador não pare no 1º andar é $\frac{\text{no. casos favoráveis}}{\text{no. casos possíveis}} = \frac{64}{125}$ e, portanto, a probabilidade de que ele pare nesse andar é $1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$.
- c) Os três andares consecutivos podem ser: térreo, 1 e 2 ou 1, 2 e 3 ou 2, 3 e 4 (três possibilidades). Em cada um desses casos, a primeira pessoa pode escolher seu andar de 3 modos, a segunda de 2 modos e, para a terceira, só resta 1 modo de fazer essa escolha. Logo, a probabilidade de que o elevador pare em três andares consecutivos é $\frac{\text{no. casos favoráveis}}{\text{no. casos possíveis}} = \frac{3 \times 3 \times 2 \times 1}{125} = \frac{18}{125}$.

5. Um adesivo, na forma de triângulo retângulo, será colado sobre a superfície lateral de uma lata cilíndrica, com um dos catetos coincidindo com a altura da lata, como na figura. A altura da lata é 15 cm e o comprimento da circunferência da base é 12 cm.



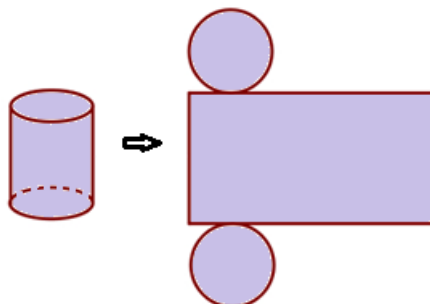
- a) Se os catetos do triângulo medem 15 cm e 10 cm, qual será a área da superfície lateral da lata não coberta pelo adesivo?
- b) Se os catetos do triângulo medem 15 cm e 60 cm, o adesivo poderá ser enrolado cinco vezes sobre a lata. Qual será a área da superfície lateral da lata não coberta pelo adesivo?



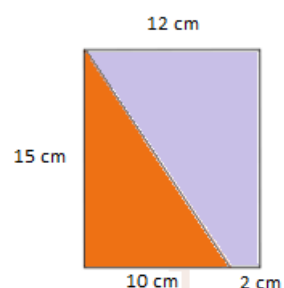
- c) Se um adesivo de catetos 15 e 90 cm for completamente enrolado no cilindro, qual será a área da superfície lateral da lata coberta por exatamente três camadas desse adesivo?

Solução N3Q5

Observamos, inicialmente, que a planificação da superfície de um cilindro circular reto é a reunião de dois círculos (as bases do cilindro) e um retângulo cuja medida de um dos lados é igual ao comprimento da circunferência dos círculos, conforme a figura.

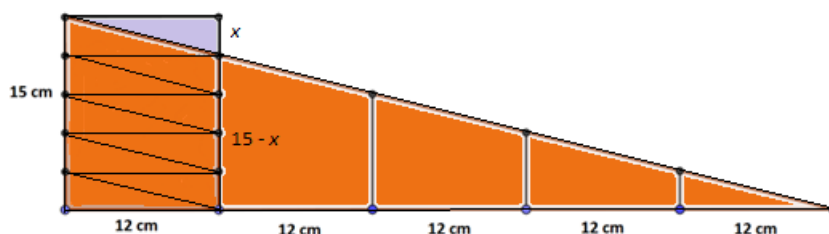


- a) Se altura da lata é 15 cm e o comprimento da circunferência da base é 12 cm, esses serão os comprimentos dos lados do retângulo da planificação do cilindro; a figura ao lado mostra, na planificação, como o adesivo triangular cujos catetos medem 15 e 10 cm será colado sobre a superfície lateral do cilindro. A área descoberta está em cinza no retângulo dessa planificação.



Portanto, a área descoberta corresponde à diferença entre a área do retângulo e a área do triângulo, ou seja, $180 - 75 = 105 \text{ cm}^2$. Podemos também calcular, alternativamente, a área do trapézio cujas bases medem 2 cm e 12 cm e cuja altura mede 15 cm, e temos: $7 \times 15 = 105 \text{ cm}^2$.

- b) Em razão da semelhança, os comprimentos das divisões verticais do triângulo que representa o adesivo são iguais a $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{5}$ da altura da planificação, ou seja, 12 cm, 9 cm, 6 cm e 3 cm, respectivamente



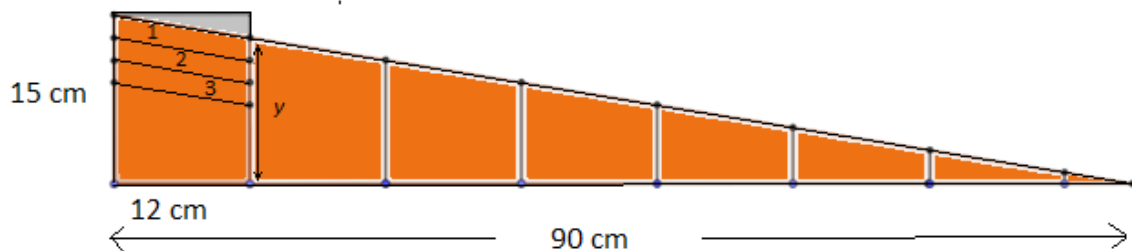
A figura acima mostra, sobre o retângulo da planificação, as sobreposições das divisões do adesivo triangular correspondentes à sobreposição que ocorre a cada volta, e a divisão da altura em cinco partes de mesmo comprimento 3 cm.

Na primeira volta, o adesivo deixará descoberto apenas o triângulo retângulo cinza com catetos medindo 12 cm e 3 cm; nas quatro voltas seguintes, o adesivo

será colado sobre a parte já adesivada na volta anterior. Portanto, a área não coberta pelo adesivo será: $(3 \times 12) \div 2 = 18 \text{ cm}^2$.

Outra solução: o triângulo cinza de catetos x e 12 é semelhante ao triângulo de catetos $15 - x$ e 48 . Logo, $(x \div 12) = ((15 - x) \div 48)$; disso segue que $x = 3 \text{ cm}$ e a área não coberta é $3 \times 12 \div 2 = 18 \text{ cm}^2$.

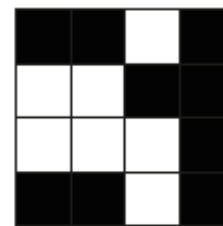
c) O triângulo cujo cateto tem 90 cm de comprimento dará 7 voltas e meia ($90 = 7 \times 12 + 6$) em torno da circunferência da base do cilindro.



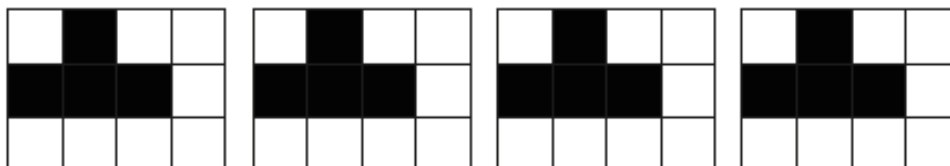
Na primeira volta, apenas o triângulo em cinza da figura acima ficará sem adesivo na superfície cilíndrica. Completada a segunda volta, somente o paralelogramo 1 indicado na figura ficará com apenas uma camada de adesivo; após a terceira volta, somente o paralelogramo 2 ficará com apenas duas camadas de adesivo; após a quarta volta, teremos somente a região indicada como paralelogramo 3 coberta por apenas 3 camadas de adesivo, e é essa a região cuja área devemos calcular.

Para determinar a altura y da intersecção do adesivo com a vertical inicial, após a primeira volta, podemos usar a semelhança: $\frac{90}{15} = \frac{78}{y}$, ou seja, $y = \frac{78}{6}$; daí, os paralelogramos sucessivos 1, 2 e 3 terão os lados verticais medindo $15 - \frac{78}{6} = 2 \text{ cm}$. Como a altura relativa a esses lados mede 12 cm , a área dos paralelogramos, em especial a do paralelogramo 3, será 24 cm^2 .

6. Pedro deseja pintar quadradinhos de tabuleiros de modo que a quantidade de quadradinhos pintados em qualquer subtabuleiro 3×3 seja sempre um número ímpar. Veja um exemplo em um tabuleiro 4×4 na figura ao lado.



a) Pedro já pintou as duas primeiras linhas de um tabuleiro 3×4 . Indique as 4 maneiras diferentes de completar a pintura desse tabuleiro pintando somente casas da última linha.

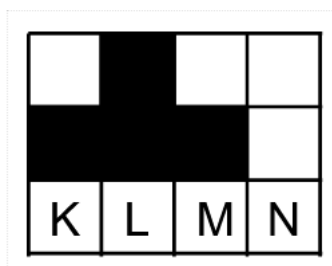


- b) De quantas maneiras ele pode pintar um tabuleiro 3×4 ?
- c) De quantas maneiras ele pode pintar um tabuleiro 4×4 ?
- d) De quantas maneiras ele pode pintar um tabuleiro 2023×2023 ?

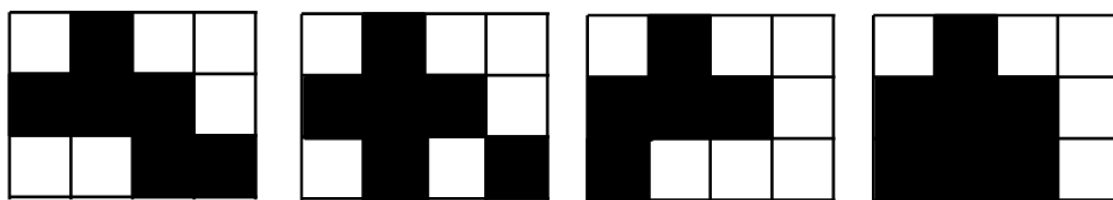
Solução N3Q6

Solução

a)



Sejam K, L, M e N os quatro quadrados que faltam ser pintados. Perceba que a escolha das cores dos quadrados K e L determina unicamente a cor do quadrado M, porque nas três primeiras colunas juntas devemos ter um número ímpar de quadrados pretos. De modo semelhante, uma vez escolhidas as cores de L e M, temos uma apenas uma possibilidade de escolha para a cor de N porque nas três colunas finais, juntas, também temos um número ímpar de casas pretas. As possibilidades para as cores de K e L são 4: (Branco, Branco) = (B, B), (Branco, Preto) = (B, P), (Preto, Branco) = (P, B) e (Preto, Preto) = (P, P). Para escolher M, temos, respectivamente, as seguintes possibilidades: (K, L, M) = (B, B, P), (B, P, B), (P, B, B) e (P, P, P). Finalmente, para escolher N, temos (K, L, M, N) = (B, B, P, P), (B, P, B, P), (P, B, B, B) e (P, P, P, B).

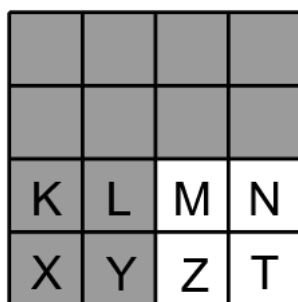


Observação: Outra forma de fazer essa contagem é escolher inicialmente as cores de L e M. Assim ficam determinadas as cores de K e N.

b) A mesma análise que foi feita no item anterior poderia ser realizada para qualquer coloração das duas primeiras linhas. Existem 2^8 escolhas possíveis das cores dos quadradinhos dessas duas linhas e 2^2 escolhas possíveis para as cores dos quadradinhos K e L. Portanto, há $2^8 \cdot 2^2 = 2^{10} = 1024$ formas de pintar o tabuleiro.

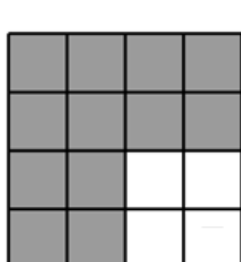
Observação: Outra explicação possível é pintar todos os quadradinhos que não estão nos cantos de 2^8 formas e pintar dois quadradinhos dos cantos em uma mesma diagonal de 2^2 formas. Isso determina unicamente a pintura do tabuleiro.

c) Resposta: 2^{12} maneiras.

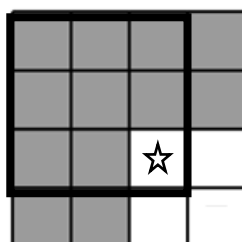


Podemos pintar as duas primeiras linhas de 2^8 formas. Uma vez escolhidas as cores dos quadrados K e L, as cores dos quadrados M e N ficam determinadas. Perceba se as duas linhas do meio estão determinadas, podemos repetir o mesmo procedimento do item anterior com a última linha: ao escolhermos as cores dos quadrados X e Y, as cores de Z e T ficam determinadas. Temos assim 2^{12} formas de escolher as cores dos quadrados cinzas da figura e isso determina por completo as cores dos demais quadrados.

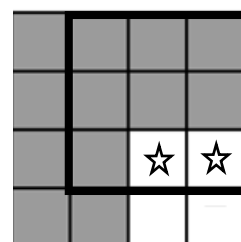
Mais especificamente, pintamos inicialmente as casas de cor cinza da maneira que quisermos usando preto ou branco.



Destacamos o quadrado 3×3 superior esquerdo. A cor da casa com a estrela fica determinada pela paridade ímpar.

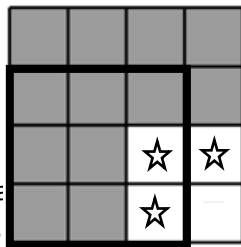


Destacamos o quadrado 3×3 superior esquerdo. A cor da casa com uma nova estrela fica determinada pela paridade ímpar.



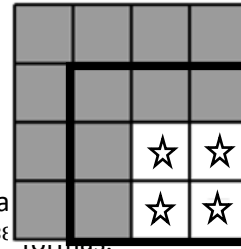
Destacamos o quadrado 3×3 inferior esquerdo. A cor da casa com uma nova estrela fica novamente determinada.

→ Pintar de qual
2023 x 2023

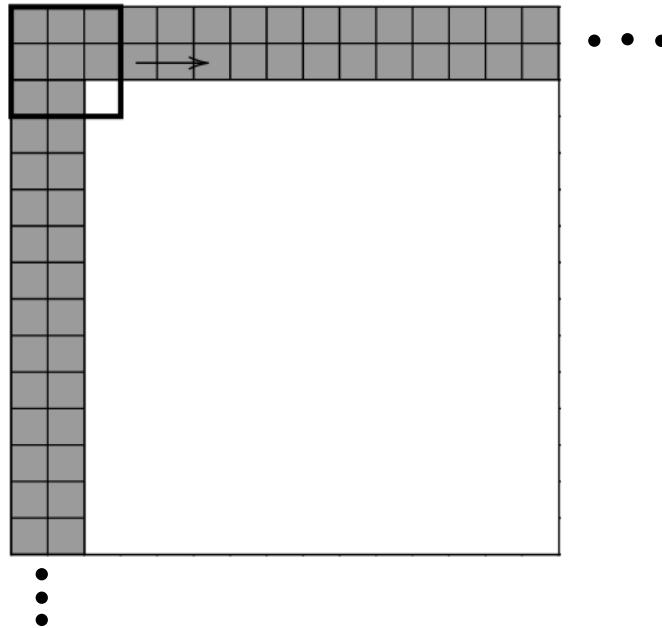


Destacamos o quadrado 3×3 inferior direito. A cor da casa com uma nova estrela fica novamente determinada.

→ primeiras linhas e as duas
de $2^{2 \cdot 2023 + 2 \cdot 2021} = 2^{8088}$



As casas de cor cinza determinam a pintura completa, de acordo com o enunciado. Há 2^{12} possibilidades de pintar as casas de cor cinza.



Uma vez que uma dessas escolhas tenha sido realizada, o terceiro quadradinho da terceira linha tem sua cor determinada, pois há uma única escolha possível a depender da paridade de quadradinhos pretos pintados na área cinza do quadrado 3×3 no canto superior esquerdo. Deslocando esse quadrado 3×3 para a direita, podemos concluir que o quarto quadradinho da terceira linha também está determinado. O mesmo vale para todos os quadrados dessa linha. Como a segunda e a terceira linha estão pintadas e os dois primeiros da quarta, pelo mesmo argumento anterior, toda a quarta linha está determinada. Esse processo pode ser repetido até a última linha e irá gerar um tabuleiro que atende as exigências do enunciado. Portanto, podemos pintar o tabuleiro 2023×2023 , em conformidade com o enunciado, de 2^{8088} formas diferentes.