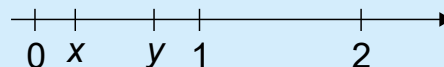


Solução da prova da 1ª Fase

QUESTÃO 1 – ALTERNATIVA A

Solução: Pela representação gráfica, sabemos que $0 < x < y < 1$. Com isso, faremos a comparação entre os valores expressos nos itens:



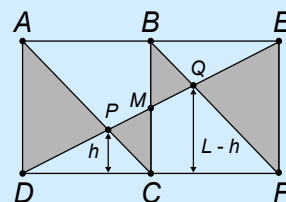
- $x < x + y$, pois y é positivo.
- $xy < x$, pois x é positivo e y é positivo e menor do que 1.
- $xy < x/y$, pois x é positivo e y é positivo e menor do que 1.
- $x^2 < xy$, pois x é positivo e $x < y$.

Logo, o menor valor é x^2 .

QUESTÃO 2 – ALTERNATIVA A

Solução: Os lados dos quadrados $ABCD$ e $BEFC$ têm medida $L = \sqrt{60}$. Sejam P , M e Q como na figura; M é o ponto médio de BC . Seja h a altura do triângulo DPC = altura do triângulo EQB , como indicado.

Os triângulos DPC e DQF são semelhantes; assim, $\frac{h}{L} = \frac{(L-h)}{2L}$



Resolvendo a equação, encontramos $h = \frac{L}{3}$. Portanto, a área do triângulo DPC é $\frac{L^2}{6} = \frac{60}{6} = 10 \text{ cm}^2$.

Logo,

área de APD = área de FQE = $(L^2/2) - 10 = (60/2) - 10 = 20 \text{ cm}^2$ e

a área de CPM = área de BQM = $(60/4) - 10 = 5 \text{ cm}^2$.

Concluimos que a área da região sombreada é $2 \times 20 + 2 \times 5 = 50 \text{ cm}^2$.

QUESTÃO 3 – ALTERNATIVA B

Solução: O tempo que resta é uma hora de gravação em qualidade normal e queremos saber quanto de tempo corresponde a essa hora em alta qualidade.

Três horas (180 minutos) em qualidade normal correspondem a 2 horas (120 minutos em qualidade alta); dividindo proporcionalmente por 3, concluímos que $180 \div 3 = 60$ minutos em qualidade normal, correspondem a $120 \div 3 = 40$ minutos em alta qualidade.

QUESTÃO 4 – ALTERNATIVA E

Solução: Seja S a soma comum das linhas e colunas. A condição do enunciado nos dá

$$1^{\text{a}} \text{ linha: } a + 11 = S$$

$$2^{\text{a}} \text{ linha: } b + c + 7 = S$$

$$3^{\text{a}} \text{ coluna: } c + 14 = S$$

3	a	8
7	b	c
d	e	6

Temos, então,

$$\begin{aligned}
 0 &= S + S - 2S = 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} - 2 \times 3^{\text{a}} \text{ coluna} \\
 &= (a + 11) + (b + c + 7) - 2 \times (c + 14) = (a + b - c) - 10
 \end{aligned}$$

Logo, $a + b - c = 10$.

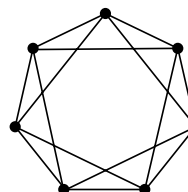
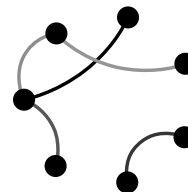
Outra solução: Comparando as somas da 2ª linha com a da 3ª coluna, temos $7 + b + c = 8 + c + 6$, de onde obtemos $b = 7$. Comparando a 1ª linha com a 3ª coluna, temos $3 + a + 8 = 8 + c + 6$, de onde obtemos $c = a - 3$. Logo, $a + b - c = a + 7 - (a - 3) = 10$.

QUESTÃO 5 – ALTERNATIVA A

Solução: Existe uma cidade da qual partem três estradas; a primeira tentativa seria fazer com que de cada cidade partissem exatamente três estradas, porém isso é impossível. De fato, se de cada uma das sete cidades partissem exatamente três estradas, no total teríamos $3 \times 7 = 21$ trajetos. Aqui, nesses 21 trajetos se contam de maneira distinta o percurso de uma cidade A para B e de uma cidade B para A. Porém, esses dois trajetos, de A para B e de B para A são feitos na mesma estrada, a que liga A para B (ou B para A). Portanto, o número de estradas deve ser a metade do número de trajetos. Como 21 é um número ímpar, então não é possível criar uma configuração da qual partam exatamente três estradas de cada uma das sete cidades. Entretanto, é possível criar uma configuração da qual partam de cada uma das sete cidades exatamente quatro estradas. Nesse caso temos $4 \times 7 = 28$ trajetos e, portanto, 14 estradas.

É possível criar uma configuração da qual partem exatamente 4 estradas, como exemplificado na figura.

Na figura do enunciado já temos 5 estradas, portanto, faltam incluir 9 estradas.

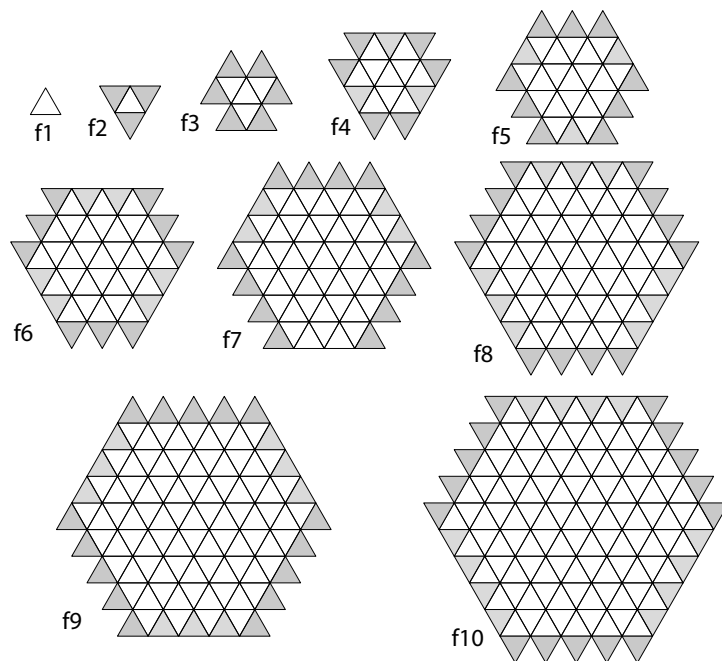


QUESTÃO 6 – ALTERNATIVA D

Solução: Supondo triângulos de lado 1, observamos, na ilustração dada, que a sequência constituída pelos números de triângulos que devem esconder o perímetro de uma figura para formar a figura seguinte é a progressão aritmética 3, 6, 9, 12, ...

Em outras palavras, 3 é número de triângulos acrescentados à figura 1 para formar a figura 2, 6 é o número de triângulos para formar a figura 3, 9 é o número de triângulos para formar a figura 4, 12 é o número de triângulos para formar a figura 5, etc. Na sequência acima, o 9º termo é 27. Logo, para esconder esse perímetro e formar a 10ª figura, serão necessários mais 27 triângulos.

De fato, a cada nova figura, é necessário um triângulo para cobrir o lado “de fora” (lado convexo da figura) de cada triângulo colocado no passo anterior mais um triângulo para encaixar em cada parte côncava formada no passo anterior, escondendo dois lados “de dentro” da figura. Na figura abaixo, os triângulos que cobrem “lados convexos” estão em cinza, e os que cobrem “lados côncavos” estão em amarelo.



$$f_1 = 1$$

$$f_2 = f_1 + 3 \text{ (no. de triângulos cinzas)} + 3 \text{ (no. de triângulos amarelos)} = f_1 + 3.1 + 3.0 = f_1 + 3$$

$$f_3 = f_2 + 3 \text{ (no. de triângulos cinzas)} + 3 \text{ (no. de triângulos amarelos)} = f_2 + 3.2 + 3.0 = f_2 + 6$$

$$f_4 = f_3 + 3 \text{ (no. de triângulos cinzas)} + 3 \text{ (no. de triângulos amarelos)} = f_3 + 3.2 + 3.1 = f_3 + 9$$

$$f_5 = f_4 + 3 \text{ (no. de triângulos cinzas)} + 3 \text{ (no. de triângulos amarelos)} = f_4 + 3.3 + 3.1 = f_4 + 12$$

$$f_6 = f_5 + 3 \text{ (no. de triângulos cinzas)} + 3 \text{ (no. de triângulos amarelos)} = f_5 + 3.3 + 3.2 = f_5 + 15$$

$$f_7 = f_6 + 3 \text{ (no. de triângulos cinzas)} + 3 \text{ (no. de triângulos amarelos)} = f_6 + 3.4 + 3.2 = f_6 + 18$$

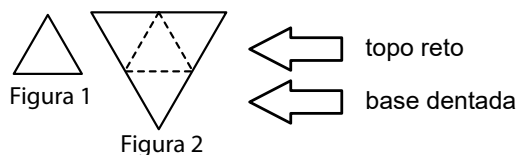
$$f_8 = f_7 + 3 \text{ (no. de triângulos cinzas)} + 3 \text{ (no. de triângulos amarelos)} = f_7 + 3.4 + 3.3 = f_7 + 21$$

$$f_9 = f_8 + 3 \text{ (no. de triângulos cinzas)} + 3 \text{ (no. de triângulos amarelos)} = f_8 + 3.5 + 3.3 = f_8 + 24$$

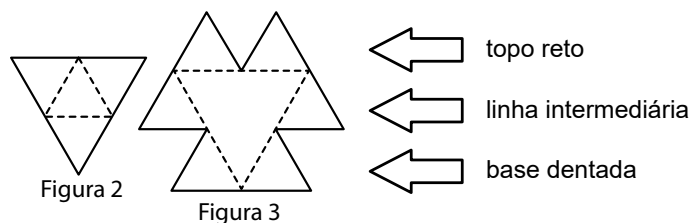
$$f_{10} = f_9 + 3 \text{ (no. de triângulos cinzas)} + 3 \text{ (no. de triângulos amarelos)} = f_9 + 3.5 + 3.4 = f_9 + 27$$

Os padrões são diferentes entre figuras pares e ímpares, vão se alternando, mas, em ambos os casos, $f_{n+1} = f_n + 3n$.

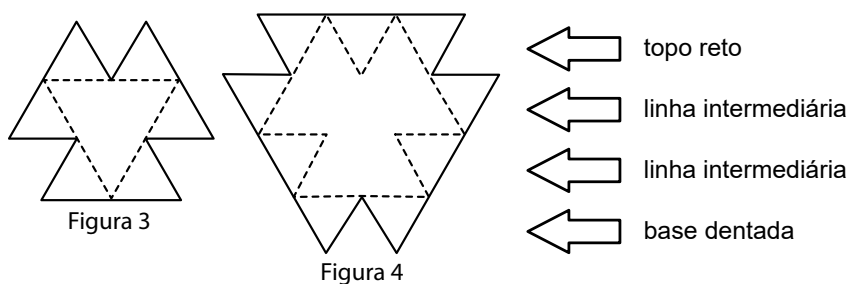
Outra solução: Da Figura 1 para a Figura 2 foram acrescentados 3 triângulos, 1 na base e 2 no topo.



Da Figura 2 para a Figura 3 foram acrescentados 6 triângulos, 2 na base, 2 no topo e 2 na linha intermediária entre a base e o topo.



Da Figura 3 para a Figura 4 foram acrescentados 9 triângulos, 2 na base, 3 no topo e 2 em cada uma das duas linhas intermediárias.



Observe que uma figura de número $n > 2$ sempre terá $n - 2$ linhas intermediárias, e em cada linha intermediária sempre serão acrescentados dois triângulos (um de cada lado). As figuras pares sempre terão topo reto e base dentada, e as figuras ímpares sempre terão topo dentado e base reta. Para se formar um topo ou uma base reta de uma figura é acrescentado um triângulo a mais do que foi acrescentado para formar o topo ou a base dentada da figura anterior. Para se formar um topo ou uma base dentada de uma figura é acrescentada a mesma quantidade de triângulos acrescentados para formar o topo ou a base reta da figura anterior.

Com isso, temos as seguintes quantidades de triângulos acrescentados para formar as figuras.

	Figura 2 Topo reto Base dentada	Figura 3 Topo dentado Base reta	Figura 4 Topo reto Base dentada	Figura 5 Topo dentado Base reta	Figura 6 Topo reto Base dentada	Figura 7 Topo dentado Base reta	Figura 8 Topo reto Base dentada	Figura 9 Topo dentado Base reta	Figura 10 Topo reto Base dentada
Topo	2	2	3	3	4	4	5	5	6
Linhas Intermediárias	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Base	1	2	2	3	3	4	4	5	5
Total	3	6	9	12	15	18	21	24	27

Observe que a soma dos triângulos acrescentados no topo e na base de uma Figura n é igual a $n + 1$ e que a soma dos triângulos acrescentados nas linhas intermediárias é igual a $2(n - 2)$. Logo, o total de triângulos acrescentados para formar a Figura n é $n + 1 + 2(n - 2) = 3n - 3 = 3(n - 1)$.

QUESTÃO 7 – ALTERNATIVA D

Solução: Há 24 retas desenhadas no plano, cada uma paralela a exatamente outras três e de modo que três retas não se encontrem em um mesmo ponto. Isso significa que essas retas estão distribuídas em 6 conjuntos, cada um com quatro retas paralelas entre si e concorrentes com as demais no plano. Para cada um desses conjuntos, há 16 intersecções com as retas de cada um dos demais 5 conjuntos. Além disso, as intersecções das retas de quaisquer dois conjuntos devem ser levadas em conta apenas uma vez. Portanto, há no total $(6 \times 16 \times 5) / 2 = 240$ pontos de intersecção entre essas retas.

Outra solução: o número de intersecções é $16 + 2 \times 16 + 3 \times 16 + 4 \times 16 + 5 \times 16 = 15 \times 16 = 240$.

QUESTÃO 8 – ALTERNATIVA B

Solução:

Quantidade de bilhetes	Número de alunos que compraram essa quantidade de bilhetes	Total de bilhetes
1	16	16
2	14	28
3	7	21
4	5	20
5	3	15

O total de bilhetes vendidos foi 100. Observe que é mais provável ser escolhido um bilhete do grupo em que há 28 bilhetes (28/100), ou seja, de um aluno que comprou 2 bilhetes.

QUESTÃO 9 – ALTERNATIVA C

Solução: Primeiramente vamos escolher as cartolas que serão ocupadas. Temos 6 possibilidades: 1 e 2, 1 e 3, 1 e 4, 2 e 3, 2 e 4, 3 e 4. Agora vamos escolher a dupla que ocupará a cartola escolhida de menor número, que também nos fornece 6 duplas distintas: (Branco e Cinza), (Branco e Preto), (Branco e Rosa), (Cinza e Preto), (Cinza e Rosa) e (Preto e Rosa) (observe que a segunda dupla fica determinada pela escolha da primeira dupla de coelhos). Logo, pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, temos $6 \times 6 = 36$ possibilidades.

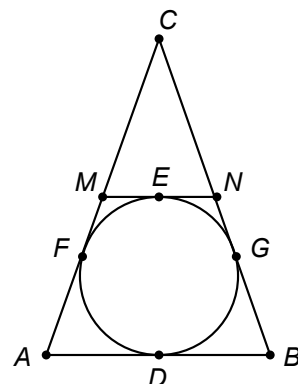
Outra solução:

Podemos formar 3 divisões em duplas, a saber, (Branco e Cinza) + (Preto e Rosa), (Branco e Preto) + (Cinza e Rosa) ou (Branco e Rosa) + (Cinza e Preto). A primeira dupla tem 4 possibilidades de escolha de cartola e a segunda, 3. No total, são $3 \times 4 \times 3 = 36$ modos diferentes de colocar os coelhos nas cartolas.

QUESTÃO 10 – ALTERNATIVA A

Solução: Como M e N são pontos médios de AC e BC , respectivamente, os triângulos ABC e MNC são semelhantes, na razão 2:1. MN é a chamada base média do triângulo ABC , e como $AB = 8$ então $MN = 4$, que é a metade. Considere os pontos de tangência entre a circunferência e os lados do trapézio $ABNM$ como sendo D, G, E e F , como mostrado na figura. Perceba que AF e AD são congruentes, uma vez que F e D são pontos de tangência, podemos escrever $AF = AD = x$. De modo análogo, $BG = BD = y$, $MF = ME = z$ e finalmente $NE = NG = w$. Veja agora que $AB + MN = x + y + z + w = AF + BG + MF + NG = AM + BN$, como $AB = 8$ e $MN = 4$ temos então que $AM + BN = 12$, e como o triângulo ABC é isósceles, $AM = BN = 6$. Sendo M e N pontos médios, temos que $AC = BC = 2 \cdot 6 = 12$.

Portanto o perímetro do triângulo ABC é $12 + 12 + 8 = 32$ cm.



QUESTÃO 11 – ALTERNATIVA A

Solução: Um preenchimento válido usa cada um dos números 1, 2, 3, 4, 5 quatro vezes (uma vez em cada linha). Para determinar que valores a soma dos números nas duas colunas extremas pode tomar, vamos encontrar os valores mínimo e máximo dessa soma. Para o valor mínimo, é natural tentar preencher as duas colunas usando apenas os números de 1 a 4, sem repetir números nas linhas, o que levaria a uma soma igual a 20. Isto é possível, como na figura abaixo.

1				2
2				1
3				4
4				3

No entanto, ao preencher o resto do tabuleiro, o 5, que não foi usado nas duas colunas, teria que ser usado 4 vezes e há apenas 3 colunas disponíveis, o que levaria a repeti-lo em alguma coluna. Logo, não é possível nem ter soma igual a 20, nem ter soma igual a 28 (que corresponde a usar apenas os números de 2 a 5 nas duas colunas extremas). Para obter um preenchimento válido, é preciso utilizar todos os números de 1 a 5 nas colunas extremas (três deles em ambas as colunas e os outros dois em apenas uma delas). Quando isto acontece, é sempre possível completar o tabuleiro de modo válido, como mostrado abaixo, onde a , b e c representam os números usados em ambas as colunas e d e e os números usados em apenas uma delas.

a	c	d	e	b
b	d	e	c	a
c	b	a	d	e
d	e	b	a	c

Escolhendo adequadamente os valores de a , b , c , d e e , conseguimos obter para as duas colunas extremas todas as somas entre 21 e 27, como mostra o quadro abaixo.

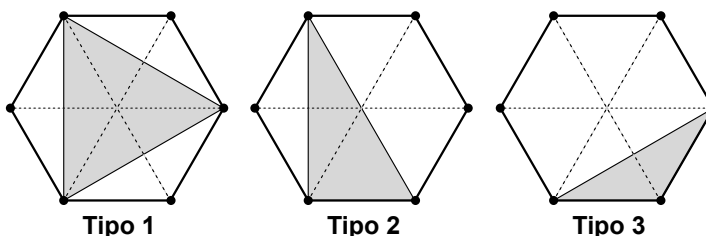
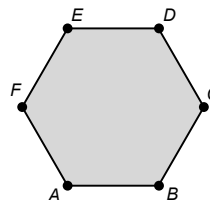
a	b	c	d	e	Soma das colunas extremas
1	2	3	4	5	21
1	2	4	3	5	22
1	3	4	2	5	23
2	3	4	1	5	24
2	3	5	1	4	25
2	4	5	1	3	26
3	4	5	1	2	27

Portanto, de todas as alternativas, a única que mostra uma soma que não pode ser obtida é a alternativa A.

QUESTÃO 12 – ALTERNATIVA A

Solução: Existem três tipos de triângulos cujos vértices são também vértices do hexágono:

- Tipo 1: os que não possuem vértices consecutivos do hexágono em seus lados: ACE e BDF;
- Tipo 2: os que possuem vértices consecutivos do hexágono em um só lado: ABD, ABE, BCE, BCF, CDF, CDA, DEA, DEB, EFB, EFC, FAC e FAD;
- Tipo 3: os que possuem vértices consecutivos do hexágono em dois lados: ABC, BCD, CDE, DEF, EFA e FAB.



Por decomposição de áreas vemos que a área dos triângulos de Tipo 1 é $\frac{1}{2}$ da área do hexágono, a área dos triângulos de Tipo 2 é $\frac{1}{3}$ da área do hexágono e a área dos triângulos de Tipo 3 é $\frac{1}{6}$ da área do hexágono. Temos 2 triângulos de Tipo 1, 12 triângulos de Tipo 2 e 6 triângulos de Tipo 3. Logo a soma das áreas de todos os triângulos cujos vértices são também vértices do hexágono é

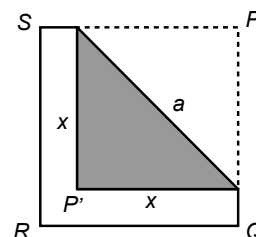
$$2 \times \frac{1}{2} + 12 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{6} = 1 + 4 + 1 = 6$$

QUESTÃO 13 – ALTERNATIVA E

Solução: Área cinza = área branca visível = $75/3 = 25 \text{ cm}^2$.

Seja x a medida dos catetos do triângulo cinza e a a medida de sua hipotenusa. A área desse triângulo é $x^2/2 = 25$, logo, $x = \sqrt{50}$.

Pelo Teorema de Pitágoras, $a = \sqrt{50 + 50} = 10 \text{ cm}$, igual à distância de P a P' .



QUESTÃO 14 – ALTERNATIVA D

Solução: A soma dos dois maiores números é 100. A soma dos três maiores números é $144 = 48 \times 3$; logo, o “terceiro maior número” é 44. A soma dos quatro maiores números é $184 = 46 \times 4$, logo o quarto maior número é 40. Prosseguindo com essa conta, vemos que os números vão diminuindo de 4 em 4 do maior para o menor. Assim, o maior inteiro positivo no conjunto é 4.

Outra solução:

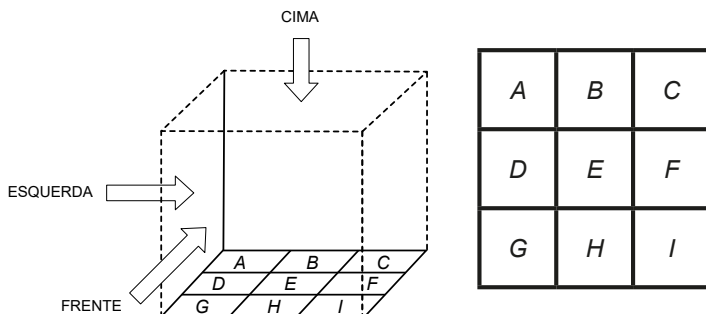
Para cada $n \geq 2$, a média dos n maiores números é $50 - 2(n - 2)$. Logo, a soma S_n dos n maiores números é $n(50 - 2(n - 2)) = 54n - 2n^2$.

O n -ésimo número é, portanto, igual a $S_n - S_{n-1} = (54n - 2n^2) - (54(n - 1) - 2(n - 1)^2) = 56 - 4n$.

Logo, os números diminuem de 4 em 4 e o menor valor positivo possível para um elemento do conjunto é 4.

QUESTÃO 15 – ALTERNATIVA C

Solução: Iremos reconstruir o sólido a partir das vistas. Para isso, vamos imaginar que o sólido está montado sobre um tabuleiro e registraremos quantos cubinhos estamos empilhando em cada quadrado dele, como indicam as figuras abaixo.



Pela vista de cima , podemos inferir que ele tem a distribuição:

A	B	C
0	E	0
G	H	I

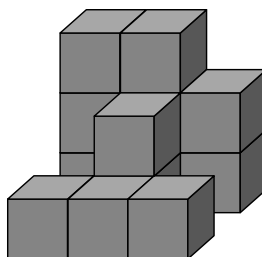
pois não há cubos nas posições D e F .

Pela vista da esquerda , apenas a primeira linha pode ter 3 cubinhos empilhados, mas não sabemos ainda se estão em A , em B ou em C .

Isso é decidido olhando a vista da frente . Concluimos que temos $A = B = 3$.

Pela vista de cima, para todos os quadrinhos da última linha, temos que ter pelo menos 1 cubinho em cada posição e, pela vista da esquerda, não podemos ter mais que 1. Portanto, $G = H = I = 1$. Analisando a vista da esquerda, no meio dela vemos apenas 2 cubinhos, e isso só pode ocorrer se $E = 2$. Finalmente, pela vista de frente, como $I = 1$, devemos ter $C = 2$. Logo, a distribuição completa é

3	3	2
0	2	0
1	1	1



Assim, o total de cubinhos é $3 + 3 + 2 + 0 + 2 + 0 + 1 + 1 + 1 = 13$.

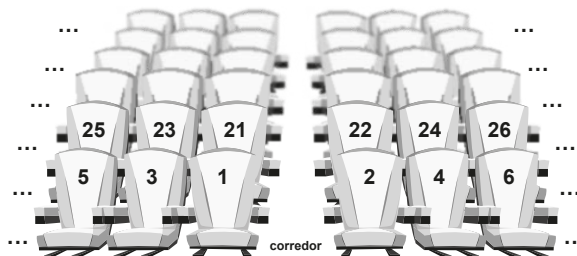
QUESTÃO 16 – ALTERNATIVA E

Solução: De acordo com a figura é possível concluir que há 20 poltronas em cada fileira, com as pares em ordem crescente do lado direito do corredor e as ímpares em ordem crescente do lado esquerdo do corredor.

A poltrona de número 100 é a décima poltrona mais à direita da quinta fileira. A poltrona 94 é a sétima poltrona da quinta fileira do lado par.

A poltrona 99 é a primeira da quinta fileira, mais à esquerda.

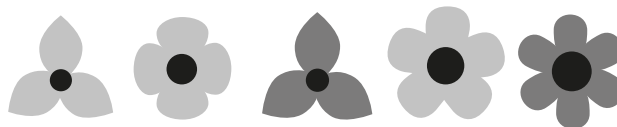
As poltronas 101, 102 e 112 estão na sexta fileira, respectivamente nas posições décima, décima primeira e décima sexta. A mais próxima da poltrona 100 é a de número 94.



119	117	115	113	111	109	107	105	103	101		102	104	106	108	110	112	114	116	118	120
99	97	95	93	91	89	87	85	83	81		82	84	86	88	90	92	94	96	98	100
79	77	75	73	71	69	67	65	63	61		62	64	66	68	70	72	74	76	78	80
59	57	55	53	51	49	47	45	43	41		42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
39	37	35	33	31	29	27	25	23	21		22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
19	17	15	13	11	9	7	5	3	1		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

QUESTÃO 17 – ALTERNATIVA A

Solução: Temos cinco flores, que podem ter três, quatro, cinco ou seis pétalas, que podem ser da cor laranja (as quais chamaremos de flores laranjas) ou roxo (as quais chamaremos de flores roxas).



Bia diz que ela e Carla sabem as cores das flores que ganharão, mas não sabem quantas pétalas elas têm. Em princípio as duas flores podem ser: duas flores laranjas, duas flores roxas, uma flor laranja e uma flor roxa.

Ana responde que sabe quantas pétalas tem sua flor, mas não sabe a cor. Isso indica que a flor de Ana tem três pétalas, pois se tivesse quatro, cinco ou seis pétalas ela saberia exatamente que flor iria ganhar.

A partir dessa conversa Carla descobre que flor vai ganhar. Note que se as cores das flores de Bia e Carla fossem laranjas seria impossível determinar qual flor Ana iria ganhar. Por exemplo, elas poderiam ter recebido as flores de quatro e cinco pétalas. O mesmo acontece se as flores fossem uma laranja e uma roxa. Por exemplo, elas poderiam ter recebido uma flor de cinco pétalas (laranja) e uma de seis pétalas (roxa). Como Carla foi capaz de deduzir a cor da flor que Ana irá ganhar, concluímos que Bia e Carla irão ganhar duas flores roxas, o que inclui uma flor de três pétalas, necessariamente. A conclusão é que Ana ganhará uma flor laranja de três pétalas.

QUESTÃO 18 – ALTERNATIVA A

Solução: Os três irmãos podem ser colocados nos 8 lugares disponíveis nas canoas de $8 \times 7 \times 6$ modos (número de casos possíveis). Para que eles estejam em canoas diferentes, o primeiro irmão pode ser colocado de 8 modos, o segundo de 6 modos (não pode estar na mesma canoa) e o terceiro de 4 modos (não pode estar nas mesmas canoas de seus irmãos). Logo, o número de casos favoráveis é $8 \times 6 \times 4$. A probabilidade de que os irmãos estejam em canoas diferentes é, portanto, $\frac{8 \times 6 \times 4}{8 \times 7 \times 6} = \frac{4}{7}$.

QUESTÃO 19 – ALTERNATIVA A

Solução: A soma de faces opostas é sempre 7. Assim, se somarmos a face inferior da pilha (em contato com o chão) com sua oposta, as duas faces opostas (inferior e superior) do dado intermediário e a face superior da pilha com sua face oposta temos $7 + 7 + 7 = 21$. Mas a soma de cada par de faces em contato é 5, assim, a soma dessas quatro faces em contato entre si é $5 + 5 = 10$, fazendo com que a soma da face inferior da pilha com a face superior da pilha seja 11. As únicas possibilidades são: face inferior 5 e face superior 6 ou face inferior 6 e face superior 5. Mas como estamos vendo o 1 no dado mais baixo, do lado oposto está o 6 e concluímos que na face inferior só pode estar o 5. Finalmente, a face superior é o número 6.



QUESTÃO 20 – ALTERNATIVA E

Solução: Para os primeiros dois problemas, temos $3 \times 3 = 9$ escolhas possíveis de notas sem repetir um par de pontuações neles. Daí, se tivermos mais do que 9 alunos, pelo menos 2 deles terão as mesmas notas nos dois primeiros problemas. Para mostrar que 9 é realmente o máximo, basta exibirmos uma tabela com as pontuações de 9 alunos sem que haja repetições de pares de notas nos mesmos problemas:

Aluno 1	0	0	0
Aluno 2	0	1	1
Aluno 3	0	2	2
Aluno 4	1	0	1
Aluno 5	1	1	2
Aluno 6	1	2	0
Aluno 7	2	0	2
Aluno 8	2	1	0
Aluno 9	2	2	1

