

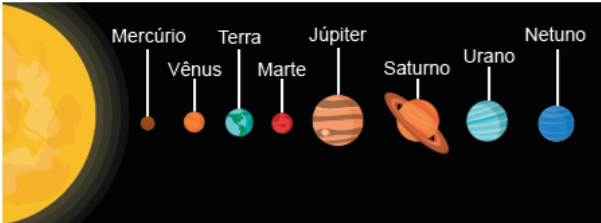


19º OBMEP - 2024

SOLUÇÕES

NÍVEL 1

1. Cláudia disse para Marco: *Escolha um planeta da figura ao lado. Vou fazer quatro perguntas e descobrir o planeta que você escolheu. Você deve responder SIM ou NÃO a cada pergunta, na ordem em que eu perguntar. Você pode mentir em todas as respostas ou falar a verdade em todas as respostas. As perguntas são:*



1. O nome do planeta que você escolheu tem 5 letras?
2. O nome do planeta que você escolheu tem a letra F ?
3. O nome do planeta que você escolheu tem as letras M ou S ?
4. O nome do planeta que você escolheu tem a letra N ?

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____

a) Se Marco escolher Saturno e decidir sempre mentir, quais respostas ele deve dar? (Responda usando SIM ou NÃO).

b) Em qual pergunta é possível descobrir se Marco decidiu sempre mentir ou sempre falar a verdade?

c) Se Marco respondeu NÃO, SIM, NÃO, SIM, nessa ordem, qual planeta ele escolheu?

Solução N1Q1

Item a) Se Marco escolher Saturno, e decidir sempre mentir, ele deve dar a resposta SIM para a primeira pergunta (pois Saturno não tem 5 letras), a resposta SIM para a segunda pergunta (pois Saturno não tem a letra F), a resposta NÃO para a terceira pergunta (pois Saturno tem a letra S) e a resposta NÃO para a quarta pergunta (pois Saturno tem a letra N). Desse modo, Marco vai responder

1. SIM
2. SIM
3. NÃO
4. NÃO

Item b) A pergunta em que é possível descobrir se Marco decidiu sempre mentir ou sempre falar a verdade é a segunda. Como nenhum dos planetas possui a letra F em seu nome, se Marco responder SIM para essa pergunta ele decidiu sempre mentir, e se responder NÃO ele decidiu sempre falar a verdade. Nas outras perguntas é impossível determinar a decisão de Marco em sempre mentir ou sempre falar a verdade, pois em cada uma delas suas respostas vão depender do planeta que escolher.

Item c) Como a resposta para a segunda pergunta foi SIM, Marco decidiu sempre mentir. Desse modo, o planeta procurado possui 5 letras, não possui a letra F, possui M ou S, e não possui a letra N. O único planeta com essas características é MARTE.

MARCO MENTE SEMPRE

Planeta	Cinco Letras?	Possui F?	Possui M ou S?	Possui N?
Mercúrio	SIM	SIM	NÃO	SIM
Vênus	NÃO	SIM	NÃO	NÃO
Terra	NÃO	SIM	SIM	SIM
Marte	NÃO	SIM	NÃO	SIM
Júpiter	SIM	SIM	SIM	SIM
Saturno	SIM	SIM	NÃO	NÃO
Urano	NÃO	SIM	SIM	NÃO
Netuno	SIM	SIM	SIM	NÃO

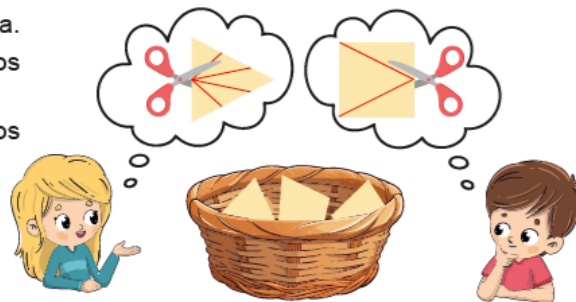
MARCO SEMPRE FALA A VERDADE

Planeta	Cinco Letras?	Possui F?	Possui M ou S?	Possui N?
Mercúrio	NÃO	NÃO	SIM	NÃO
Vênus	SIM	NÃO	SIM	SIM
Terra	SIM	NÃO	NÃO	NÃO
Marte	SIM	NÃO	SIM	NÃO
Júpiter	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO
Saturno	NÃO	NÃO	SIM	SIM
Urano	SIM	NÃO	NÃO	SIM
Netuno	NÃO	NÃO	NÃO	SIM

2. Ana e Pedro cortam pedaços de papel que estão em uma cesta.

- Sempre que Ana pega um pedaço, corta em cinco pedaços e devolve todos eles para a cesta.
- Sempre que Pedro pega um pedaço, corta em três pedaços e devolve todos eles para a cesta.

Inicialmente há três pedaços de papel na cesta.



a) Quantos pedaços de papel ficarão na cesta depois de Ana e Pedro pegarem um pedaço cada um e devolverem os pedaços cortados para a cesta?

b) Descreva uma maneira de Ana e Pedro pegarem, cortarem e devolverem todos os pedaços de papel da cesta para que, a partir dos três pedaços iniciais, a cesta fique com 11 pedaços.

c) Explique por que, a partir dos três pedaços iniciais, a cesta nunca ficará com 2024 pedaços após Ana e Pedro devolverem todos os pedaços cortados para a cesta.

Solução N1Q2

Item a) O número de papéis na cesta sempre aumenta depois que Ana ou Pedro devolvem os pedaços que cortaram. Cada vez que Ana pega um pedaço da cesta, corta em 5 pedaços, e devolve os pedaços cortados para a cesta, o total de papéis da cesta aumenta em $5 - 1 = 4$. Cada vez que Pedro pega um pedaço da cesta, corta em 3 pedaços, e devolve os pedaços cortados para a cesta, o total de papéis da cesta aumenta em $3 - 1 = 2$. Logo, depois de Ana e Pedro pegarem um pedaço cada um e devolverem os pedaços cortados para a cesta, ela ficará com $3 + 4 + 2 = 9$ (ou $5 + 3 + 1 = 9$: Ana+Pedro+cesta) papéis.

Item b) Há cinco maneiras diferentes de Ana e Pedro pegarem papéis da cesta a partir dos 3 pedaços iniciais para que, depois de devolverem os pedaços cortados, ela fique com 11 pedaços. Essas maneiras dependem da ordem em que Ana e Pedro pegam pedaços da cesta. São elas:

- Ana – Pedro – Pedro ($3 + 4 + 2 + 2 = 11$) ou ($5 + 3 + 3 = 11$)
- Pedro – Ana – Pedro ($3 + 2 + 4 + 2 = 11$) ou ($3 + 5 + 3 = 11$)
- Pedro – Pedro – Ana ($3 + 2 + 2 + 4 = 11$) ou ($3 + 3 + 5 = 11$)
- Ana – Ana ($3 + 4 + 4 = 11$) ou ($1 + 5 + 5 = 11$)
- Pedro – Pedro – Pedro – Pedro ($3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11$) ou $[(2 + 3) + 3 + 3 = 11]$

Item c) O número inicial de papéis na cesta é ímpar, e vai sempre aumentar de 2 ou de 4 pedaços. Como um ímpar mais um par sempre resulta em um número ímpar, o número de papéis na cesta sempre será ímpar, nunca será 2024.

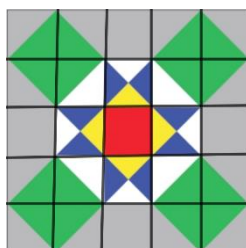
3. A figura ao lado é formada por quadrados e triângulos. O lado do quadrado vermelho mede 2 cm. Os demais quadrados e triângulos têm lados paralelos a um dos lados ou a uma das diagonais do quadrado vermelho.

- a) Qual é a área da região amarela?
- b) Qual é a área da região branca?
- c) Qual é a área da região cinza?



Solução N1Q3

Vamos criar uma malha quadriculada para a figura tomando segmentos paralelos aos lados do quadrado central; essa malha será utilizada como base para a resolução.



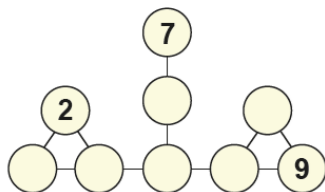
Item a) Observamos, em primeiro lugar que, se o lado do quadrado vermelho mede 2 cm, sua área é 4 cm^2 . Por outro lado, temos a decomposição de quatro dos quadrados adjacentes ao quadrado central em quatro triângulos congruentes (na figura, um amarelo, dois azuis e um branco). Daí, a área de cada um dos triângulos amarelos é $1/4$ da área do quadrado vermelho, ou seja, 1 cm^2 . Como temos quatro triângulos amarelos, a área da região amarela é 4 cm^2 .

Item b) A região branca é formada por quatro triângulos brancos menores (cuja área é 1 cm^2 , como vimos no item a)) e quatro triângulos brancos maiores (cuja área é 2 cm^2 , pois equivalem à metade do quadrado vermelho). Daí, a área da região branca é $4 \times 1 + 4 \times 2 = 4 + 8 = 12$, ou seja, 12 cm^2 .

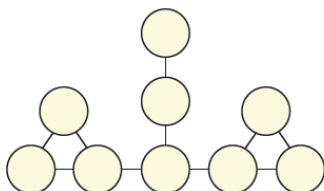
Item c) Novamente usando a decomposição obtida pela malha quadriculada, a região cinza é composta por quatro quadrados cuja área é 4 cm^2 e doze triângulos cuja área é 2 cm^2 . Portanto, a área dessa região é dada por $4 \times 4 + 12 \times 2 = 16 + 24 = 40$, ou seja, 40 cm^2 .

4. Os círculos do diagrama devem ser preenchidos com números naturais diferentes. Dois números escritos em círculos ligados por um segmento devem ter um divisor comum maior do que 1. Por exemplo, 8 e 15 nunca vão ser escritos em círculos ligados por um segmento. Ao lado temos um exemplo de preenchimento.

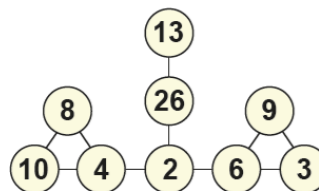
a) Faça um preenchimento para os círculos vazios abaixo.



b) Preencha os círculos abaixo de modo que o maior número escrito seja 12.



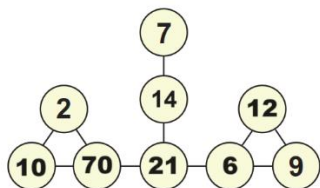
c) Explique por que é impossível preencher os círculos de modo que o maior número escrito seja menor do que 12.



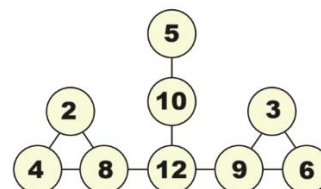
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ é o conjunto dos números naturais.

Solução N1Q4

Item a) Há infinitos preenchimentos possíveis, por exemplo:



Item b) Abaixo apresentamos uma possibilidade.



Há muitos exemplos. Em todos eles a posição do 5 e do 10 é fixa.

Item c) Se o maior número escrito é menor do que 12, os oito números a serem escritos devem ser escolhidos entre 2,3,4,5,6,8,9 e 10. De fato, o número 1 nunca pode ser escolhido, e se um número primo é escolhido para ser escrito num círculo então, necessariamente, um de seus múltiplos também deve ser escolhido para ser escrito num círculo vizinho; logo 7 e 11 não podem ser escolhidos, pois seus múltiplos são maiores do que 12. Como temos oito números e nove círculos, o preenchimento é impossível.

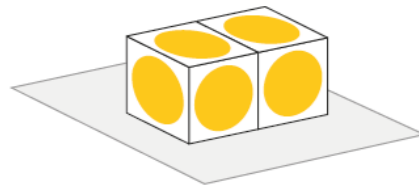
Adendo a) Está certo um preenchimento correto usando o zero se ele for considerado como número natural.

Adendo b) Está certo um preenchimento correto com os números 0,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 e 12, se o zero for considerado como número natural.

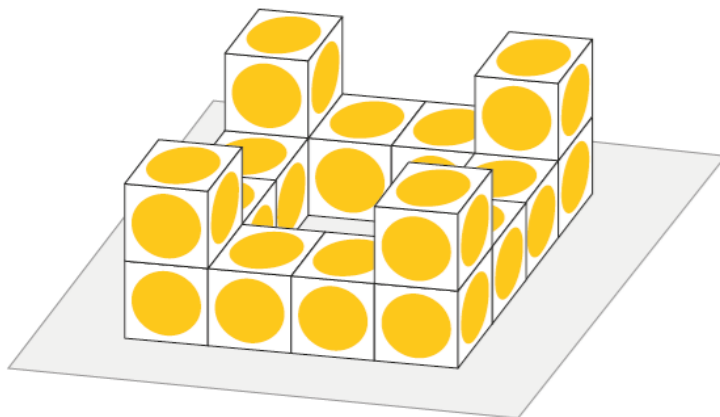
Adendo c) Está certo a apresentação de que é possível um preenchimento correto utilizando os números 0,2,3,4,5,6,7,8,9,10 e 11, em que o zero é considerado como número natural.

5. Janaína tem vários dados idênticos com faces numeradas de 1 a 6. Nesses dados, a soma dos números em faces opostas é sempre igual a 7. Ela cola alguns desses dados e coloca adesivos nas faces não coladas, inclusive nas faces que estão em contato com a mesa.

a) Qual é a menor soma possível para todos os números que foram cobertos por adesivos nos dois dados colados abaixo?



b) Janaína colou vários dados como mostrado abaixo. Quantos adesivos ela usou?



c) Na colagem de dados do item b), qual é a menor soma possível para todos os números que foram cobertos por adesivos?

Solução N1Q5

Item a) A soma dos números nas faces de um dado é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Logo a soma dos números nas faces de dois dados é $2 \times 21 = 42$. A menor soma possível para todos os números que foram cobertos por adesivos em dois dados colados ocorre quando as faces coladas possuem os maiores números possíveis, ou seja, quando as faces coladas possuem o número 6. Logo, a menor soma possível para todos os números que foram cobertos por adesivos é $42 - 12 = 30$.

Outra solução. Cada um dos dados da figura tem dois pares de faces opostas com adesivos. Os números nessas faces somam $2 \times (7 + 7) = 28$. Para que a soma dos números nas faces com adesivos seja a menor possível, os números em cada uma das outras duas faces devem ser os menores possíveis, ou seja, 1. Assim, a menor soma possível é $28 + 2 = 30$.

Item b) Na figura foram colados 16 dados. No patamar superior há quatro dados, cada um com 5 faces não coladas. Abaixo de cada dado do patamar superior há um dado com 3 faces não coladas e, ao lado de cada um deles, há dois dados com 4 faces não coladas. No total temos $4 \times 5 + 4 \times 3 + 8 \times 4 = 64$ faces não coladas. Logo Janaína usou 64 adesivos.

Item c) A menor soma possível para todos os números cobertos por adesivos na colagem do item b) ocorre quando as faces coladas possuem os maiores números possíveis. Nos dados do patamar superior o maior número que pode estar em cada face colada é 6. No dado abaixo de cada dado do patamar superior os maiores números possíveis 6, 5 e 4. Nos demais dados, as duas faces coladas são opostas uma da outra e, portanto, vão somar sempre 7, independentemente da posição em que esses dados forem colados. Logo, a

maior soma possível para os números nas faces coladas é $4 \times 6 + 4 \times (6 + 5 + 4) + 8 \times 7 = 140$. Assim a menor soma possível para todos os números cobertos por adesivos na colagem do item b) é $16 \times 21 - 140 = 196$.

Outra solução. Nos dados do patamar superior a menor soma possível para as faces com adesivos é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. No dado abaixo de cada dado do patamar superior a menor soma possível para as faces com adesivos é $1 + 2 + 3 = 6$. Nos demais dados, as duas faces coladas são opostas uma da outra e, portanto, vão somar sempre 7, independentemente da posição em que esses dados forem colados. Logo, a menor soma possível para as faces adesivadas $4 \times 15 + 4 \times 6 + 8 \times (2 \times 7) = 196$.

6. Uma tabela 4×4 , preenchida com os números 0 e 1, é *equilibrada* quando, somando os números em cada linha, obtemos todos os inteiros de 1 a 4, o mesmo ocorrendo com as somas dos números de cada coluna. Por exemplo, a tabela ao lado é equilibrada.

1	1	1	1	→ 4
1	1	1	0	→ 3
0	1	1	0	→ 2
0	1	0	0	→ 1
↓	↓	↓	↓	
2	4	3	1	

a) Preencha as tabelas abaixo de modo que elas sejam equilibradas, com as linhas e colunas tendo as somas indicadas.

				→ 4
				→ 3
				→ 2
				→ 1
↓	↓	↓	↓	
1	2	3	4	

				→ 2
				→ 4
				→ 1
				→ 3
↓	↓	↓	↓	
3	1	4	2	

b) Quantas são as tabelas equilibradas com a soma de cada linha indicada abaixo?

				→ 4
				→ 3
				→ 2
				→ 1
↓	↓	↓	↓	
?	?	?	?	

c) Quantas são as tabelas equilibradas?

Solução N1Q6

1	1	1	1	→ 4	1	0	1	0	→ 2
0	1	1	1	→ 3	1	1	1	1	→ 4
0	0	1	1	→ 2	0	0	1	0	→ 1
0	0	0	1	→ 1	1	0	1	1	→ 3
↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓	↓	
1	2	3	4		3	1	4	2	

Item a)

Item b) O preenchimento com zeros e uns em uma tabela equilibrada é determinado, de maneira única, pela posição dos possíveis resultados das somas das linhas e das colunas. De fato, a posição do 4 nas linhas e nas colunas determina o preenchimento de sete casas do tabuleiro com uns; a posição do 1 nas linhas e nas colunas determina o preenchimento de mais cinco casas com zeros; a posição do 3 nas linhas e nas colunas determina o preenchimento de mais três casas com uns; a última casa deve ser preenchida com zero. Como esses resultados já estão determinados para as somas das linhas (4,3,2,1), devemos contar as possibilidades de eles ocorrerem para as somas das colunas (?,?,?,?). Temos 4 possibilidades de resultados para a soma da primeira coluna, 3 possibilidades de resultados para a soma da segunda coluna, 2 possibilidades de resultados para a soma da terceira coluna e 1 possibilidade de resultado para a soma da quarta coluna. No total, pelo princípio multiplicativo da contagem, temos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilidades de resultados para a soma das colunas. Portanto temos 24 tabelas equilibradas diferentes em que a soma da primeira linha é 4, a da segunda é 3, a da terceira é 2 e a da quarta é 1.

Item c) De acordo com o item b), há $24 \times 24 = 576$ tabelas equilibradas diferentes.