



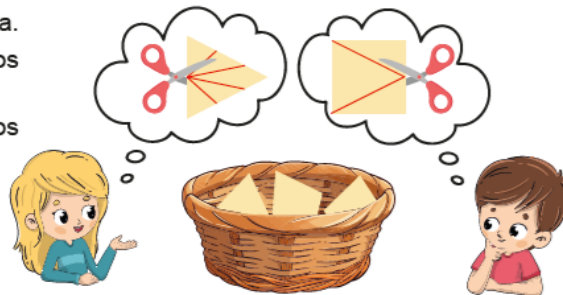
19º OBMEP - 2024

SOLUÇÕES

NÍVEL 2

1. Ana e Pedro cortam pedaços de papel que estão em uma cesta.
- Sempre que Ana pega um pedaço, corta em cinco pedaços e devolve todos eles para a cesta.
 - Sempre que Pedro pega um pedaço, corta em três pedaços e devolve todos eles para a cesta.

Inicialmente há três pedaços de papel na cesta.



- a) Quantos pedaços de papel ficarão na cesta depois de Ana e Pedro pegarem um pedaço cada um e devolverem os pedaços cortados para a cesta?
- b) Descreva uma maneira de Ana e Pedro pegarem, cortarem e devolverem todos os pedaços de papel da cesta para que, a partir dos três pedaços iniciais, a cesta fique com 11 pedaços.
- c) Explique por que, a partir dos três pedaços iniciais, a cesta nunca ficará com 2024 pedaços após Ana e Pedro devolverem todos os pedaços cortados para a cesta.

Solução N2Q1

Item a) O número de papéis na cesta sempre aumenta depois que Ana ou Pedro devolvem os pedaços que cortaram. Cada vez que Ana pega um pedaço da cesta, corta em 5 pedaços, e devolve os pedaços cortados para a cesta, o total de papéis da cesta aumenta em $5 - 1 = 4$. Cada vez que Pedro pega um pedaço da cesta, corta em 3 pedaços, e devolve os pedaços cortados para a cesta, o total de papéis da cesta aumenta em $3 - 1 = 2$. Logo, depois de Ana e Pedro pegarem um pedaço cada um e devolverem os pedaços cortados para a cesta, ela ficará com $3 + 4 + 2 = 9$ (ou $5 + 3 + 1 = 9$: Ana+Pedro+cesta) papéis.

Item b) Há cinco maneiras diferentes de Ana e Pedro pegarem papéis da cesta a partir dos 3 pedaços iniciais para que, depois de devolverem os pedaços cortados, ela fique com 11 pedaços. Essas maneiras dependem da ordem em que Ana e Pedro pegam pedaços da cesta. São elas:

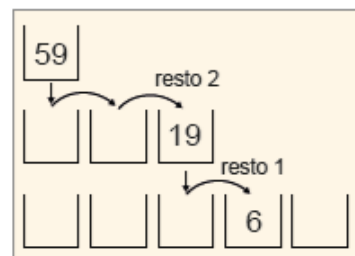
- Ana – Pedro – Pedro ($3 + 4 + 2 + 2 = 11$) ou ($5 + 3 + 3 = 11$)
- Pedro – Ana – Pedro ($3 + 2 + 4 + 2 = 11$) ou ($3 + 5 + 3 = 11$)
- Pedro – Pedro – Ana ($3 + 2 + 2 + 4 = 11$) ou ($3 + 3 + 5 = 11$)
- Ana – Ana ($3 + 4 + 4 = 11$) ou ($1 + 5 + 5 = 11$)
- Pedro – Pedro – Pedro – Pedro ($3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11$) ou $[(2 + 3) + 3 + 3 = 11]$

Item c) O número inicial de papéis na cesta é ímpar, e vai sempre aumentar de 2 ou de 4 pedaços. Como um ímpar mais um par sempre resulta em um número ímpar, o número de papéis na cesta sempre será ímpar, nunca será 2024.

2. Em uma brincadeira, Euclides escolhe um número natural, coloca esse número no topo do tabuleiro ao lado e realiza o seguinte procedimento:

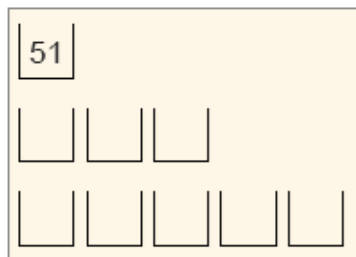
- divide o número escolhido por 3 e anota o quociente e o resto;
- se o resto for 0 coloca o quociente logo abaixo do número;
- se o resto for 1 coloca o quociente deslocando uma casa para a direita;
- se o resto for 2 coloca o quociente deslocando duas casas para a direita.

$$\begin{array}{r} 59 \overline{) 3} \\ 2 \quad 19 \\ \hline 59 = 19 \times 3 + 2 \\ 19 \overline{) 3} \\ 1 \quad 6 \\ \hline 19 = 6 \times 3 + 1 \end{array}$$

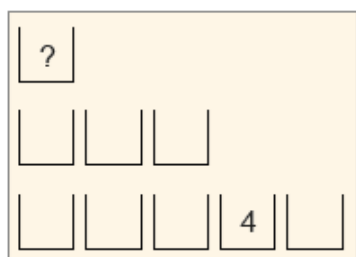


A seguir, ele repete o mesmo procedimento para o quociente obtido. Na figura vemos a brincadeira de Euclides que começa com 59 e termina com o 6 na quarta casa da base do tabuleiro.

a) Faça a brincadeira de Euclides com o número 51.



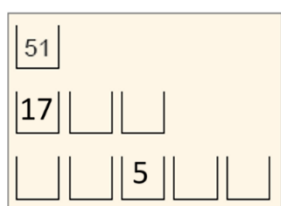
b) Quais números Euclides pode ter escolhido se a brincadeira terminou com o 4 na quarta casa da base do tabuleiro?



c) Quantos números entre 10 e 99 começam uma brincadeira de Euclides que termina na quarta casa da base do tabuleiro?

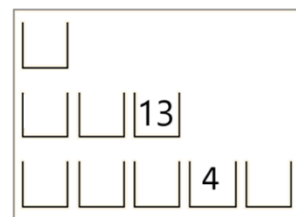
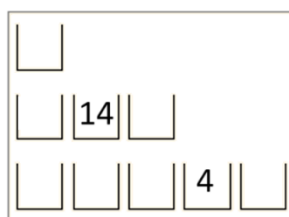
Solução N2Q2

Item a)



$$\begin{array}{r} 51 \overline{) 3} \\ 0 \quad 17 \\ \hline 17 \overline{) 3} \\ 2 \quad 5 \end{array}$$

Item b) Fazendo a brincadeira “de trás para a frente”, o número que deu origem ao 4 só pode ser $4 \times 3 = 12$, $4 \times 3 + 1 = 13$ ou $4 \times 3 + 2 = 14$, pois são as operações inversas da brincadeira. Entretanto, o 12 não foi, pois não há posição acima da quarta posição da base. Observe que o 14 deve aparecer na segunda posição (da esquerda para a direita) do segundo andar e que 13 deve aparecer na terceira posição (da esquerda para a direita) do segundo andar para que possam dar origem ao 4 na posição que ele ocupa na base. Se o número que aparece no topo dá origem ao 14, esse número deve ser $14 \times 3 + 1 = 43$. Se o número que aparece no topo dá origem ao 13, esse número deve ser o $13 \times 3 + 2 = 41$. Portanto, as respostas são 41 e 43.



Item c) Se o número x está escrito na quarta posição da base, então os números que podem ter dado origem a ele são $3x + 2$ (na segunda posição do segundo andar) e $3x + 1$ (na terceira posição do segundo andar). Estes, por sua vez, devem ter vindo de $3(3x + 2) + 1 = 9x + 7$ e $3(3x + 1) + 2 = 9x + 5$, respectivamente. Portanto, os números devem ser múltiplos de 9 mais 7 ou múltiplos de 9 mais 5. Entre 10 e 99 os menores números com essas propriedades são $16 = 9 \times 1 + 7$ e $14 = 9 \times 1 + 5$, respectivamente. Os maiores são, respectivamente, $97 = 9 \times 10 + 7$ e $95 = 9 \times 10 + 5$. Explicitamente, são os números do conjunto

$$\{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70, 79, 88, 97\} \cup \{14, 23, 32, 41, 50, 59, 68, 77, 86, 95\}.$$

Portanto, são 20 números que satisfazem a condição deste item.

3. Um quadrado com área igual a 36 cm^2 foi recortado nas seis peças da figura. Foram feitos oito cortes retos, quatro de um mesmo tamanho maior e outros quatro de um mesmo tamanho menor, em ângulos múltiplos de 45° .



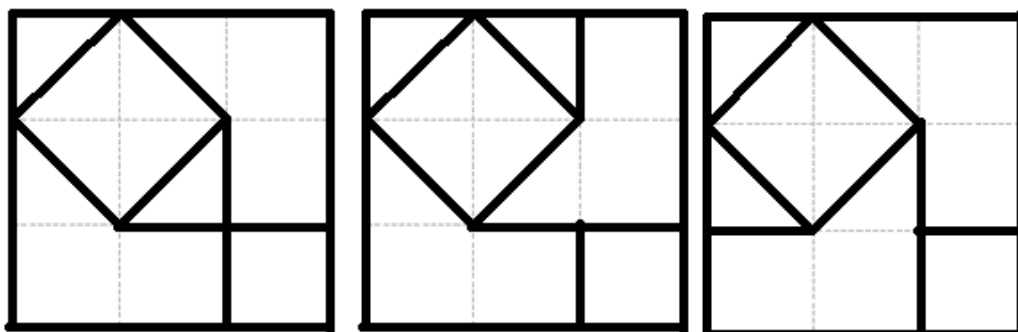
- a) Desenhe no quadrado abaixo como poderiam estar as peças antes de recortadas.



- b) Qual é a área de uma peça pentagonal?
c) Qual é a razão entre as áreas da menor e da maior peça quadrada?

Solução N2Q3

Item a) Abaixo estão três soluções possíveis. Outras soluções podem ser obtidas por meio de rotações ou reflexões.

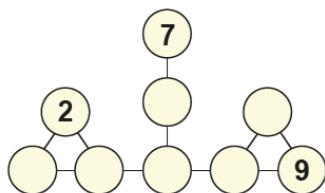


Item b) A peça pentagonal ocupa dois quadradinhos e meio do quadriculado. O quadrado original é formado por 9 quadradinhos do quadriculado. Como a área do quadrado original é igual a 36 cm^2 , a área de cada quadradinho do quadriculado é igual a $36 \div 9 = 4 \text{ cm}^2$. Logo a área da peça pentagonal é igual a $4 \times 2,5 = 10 \text{ cm}^2$.

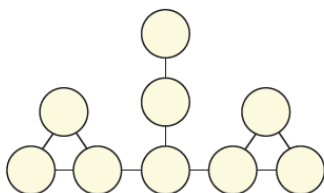
Item c) A menor peça quadrada ocupa um quadradinho do quadriculado, e sua área é igual a 4 cm^2 . A maior peça quadrada ocupa quatro metades do quadradinho do quadriculado, ou seja, 2 quadradinhos do quadriculado, e sua área é igual a 8 cm^2 . Logo, a razão entre as áreas da menor e da maior peça quadrada é igual a $\frac{4 \text{ cm}^2}{8 \text{ cm}^2} = \frac{1}{2}$.

4. Os círculos do diagrama devem ser preenchidos com números naturais diferentes. Dois números escritos em círculos ligados por um segmento devem ter um divisor comum maior do que 1. Por exemplo, 8 e 15 nunca vão ser escritos em círculos ligados por um segmento. Ao lado temos um exemplo de preenchimento.

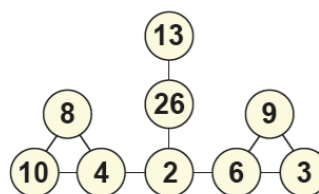
a) Faça um preenchimento para os círculos vazios abaixo.



b) Preencha os círculos abaixo de modo que o maior número escrito seja 12.



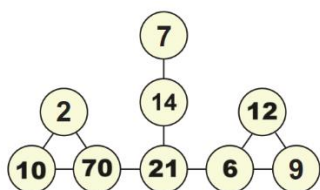
c) Explique por que é impossível preencher os círculos de modo que o maior número escrito seja menor do que 12.



$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ é o conjunto dos números naturais.

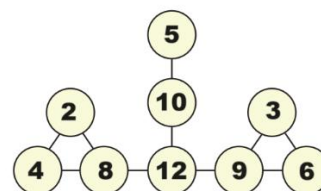
Solução N2Q4

Item a) Há infinitos preenchimentos possíveis, por exemplo:



Item b) Abaixo apresentamos uma possibilidade.

Há muitos exemplos. Em todos eles a posição do 5 e do 10 é fixa.



Item c) Se o maior número escrito é menor do que 12, os oito números a serem escritos devem ser escolhidos entre 2,3,4,5,6,8,9 e 10. De fato, o número 1 nunca pode ser escolhido, e se um número primo é escolhido para ser escrito num círculo então, necessariamente, um de seus múltiplos também deve ser escolhido para ser escrito num círculo vizinho; logo 7 e 11 não podem ser escolhidos, pois seus múltiplos são maiores do que 12. Como temos oito números e nove círculos, o preenchimento é impossível.

Adendo a) Está certo um preenchimento correto usando o zero se ele for considerado como número natural.

Adendo b) Está certo um preenchimento correto com os números 0,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 e 12, se o zero for considerado como número natural.

Adendo c) Está certo a apresentação de que é possível um preenchimento correto utilizando os números 0,2,3,4,5,6,7,8,9,10 e 11, em que o zero é considerado como número natural.

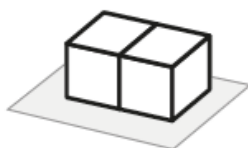
5. Marina tem vários dados idênticos com faces numeradas de 1 a 6. Nesses dados, a soma dos números em faces opostas é sempre igual a 7. Ela junta ou empilha alguns desses dados sobre uma mesa e anota a soma de todos os números que consegue ver ao dar uma volta ao redor da mesa. Por exemplo, para os dados a figura ao lado ela anotou o número 33.



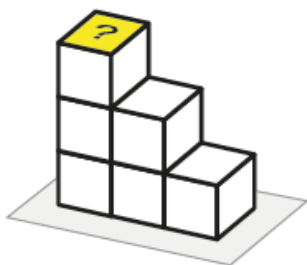
a) Qual é o número que Marina deve anotar para os dados da figura abaixo?



b) Qual é o menor número possível que Marina pode anotar para dois dados juntos sobre a mesa, como indicado na figura abaixo?



c) Marina anotou o número 88 para uma pilha de dados como indicado na figura abaixo. Quais números podem ficar no topo dessa pilha? Justifique sua resposta.



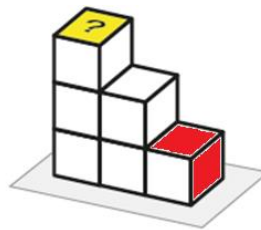
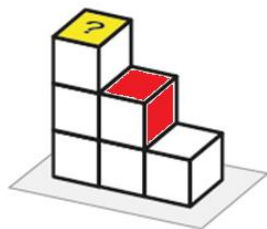
Solução N2Q5

Item a) Na pilha de três dados da figura, ao dar uma volta em torno da mesa, Marina consegue ver seis pares de faces opostas mais a face do topo, com o número 6. Cada par de faces opostas totaliza 7, portanto, ela anota o número 48, já que $6 \times 7 + 6 = 48$.

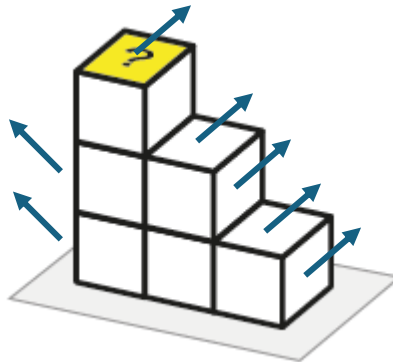
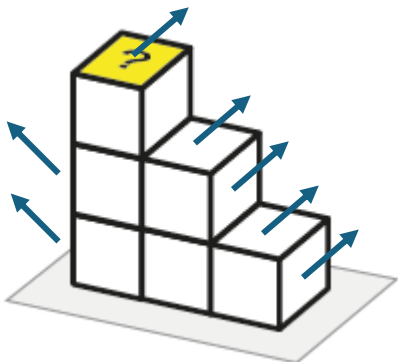
Item b) Nesta nova figura, com dois dados unidos pelas laterais, ao dar uma volta em torno da mesa, Marina consegue ver seis faces: dois pares de faces opostas, que totalizam 14 pontos, mais quatro faces (duas em cada dado). Para que a soma total seja mínima, essas quatro faces devem ter os números 1 ou 2, sendo 1 e 2 em um dado e 1 e 2 em outro. Desta forma, o menor número possível que Marina pode anotar é $14 + 2 \times 1 + 2 \times 2 = 20$. Como curiosidade, observe que os pares de faces opostas que Marina consegue ver nos dados devem ter os números 3 e 4.

Item c) Marina consegue ver sete pares de faces opostas da nova pilha, que totalizam $7 \times 7 = 49$. Logo, as demais sete faces visíveis por ela devem totalizar $88 - 49 = 39$. Observe que $39 = 4 \times 6 + 3 \times 5$; logo, deve haver ao menos quatro dessas faces com o número 6 para que seja possível obter a soma 39 (se houvesse menos nunca chegaríamos a 39 com sete parcelas). Vamos concentrar nossa atenção nas sete faces que Marina consegue ver, mas não consegue ver a face oposta. Há três casos a considerar:

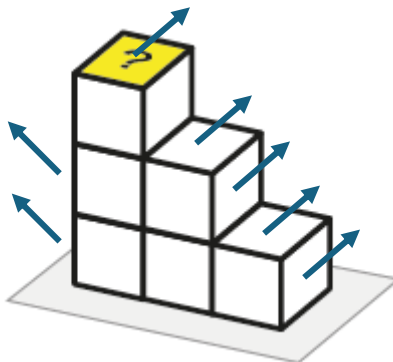
- Não é possível que seis faces dessas sete faces tenham o número 6 (embora $39 = 6 \times 6 + 3$). Se isso ocorresse, um dos dados mais à direita teria duas faces (em vermelho na figura abaixo) com o número 6.



- Configurações nas quais quatro dessas sete faces apresentam o número 6 e três faces apresentam o número 5 são possíveis para a pilha em questão (estamos usando a decomposição $39 = 4 \times 6 + 3 \times 5$) e são mostradas nas figuras a seguir, nas quais os números 6 e 5 aparecem no topo.



- Além disso, observe também que $39 = 5 \times 6 + 5 + 4$. Nesse último caso, cinco das sete faces em consideração receberiam o número 6, uma face o número 5 e uma face o número 4. Isso é possível, como mostrado na figura abaixo, com o 6 no topo da pilha.

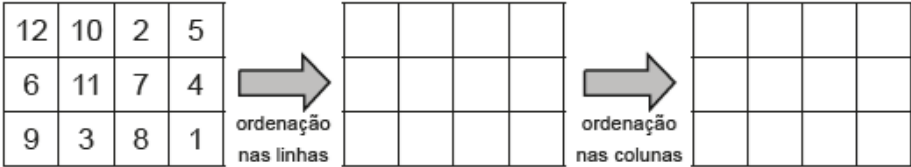


Portanto, 5 e 6 são os únicos números que podem aparecer no topo da pilha.

6. A ordenação *linha-coluna crescente* dos números inteiros de 1 a 12 em uma tabela com três linhas e quatro colunas é feita primeiro nas linhas e, depois, nas colunas. A figura mostra um exemplo dessa ordenação.



a) Faça a ordenação linha-coluna crescente dos números na tabela abaixo.



b) A ordenação linha-coluna crescente foi feita numa tabela e o número 5 ficou posicionado como abaixo. Complete o tabuleiro mostrando uma maneira de como os outros números podem ter ficado na tabela.

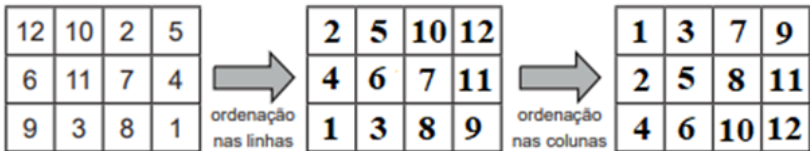
			5

c) A ordenação linha-coluna crescente foi feita numa tabela, e um número x ficou posicionado como abaixo. Explique por que x é o maior número na região cinza da tabela.

		x	

d) Pinte na tabela abaixo as casas em que o 5 pode ficar após uma ordenação linha-coluna crescente.

Solução N2Q6



Item a)

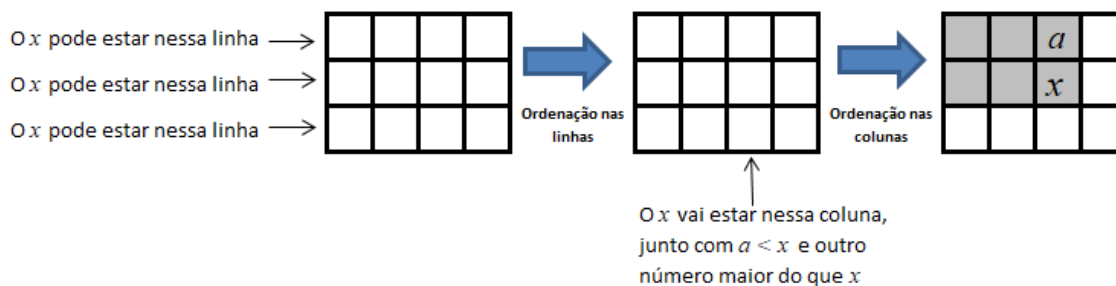
Item b) Abaixo apresentamos alguns preenchimentos possíveis.

1	2	3	5
4	6	7	8
9	10	11	12

1	2	4	5
3	6	7	8
9	10	11	12

1	2	3	5
4	6	7	8
9	10	11	12

Item c) O número x pode estar em qualquer linha da tabela inicial, antes da ordenação linha-coluna. Após a ordenação nas linhas, o número x passa a ocupar a terceira posição na linha em que está, ficando na terceira coluna junto com outros dois números, sendo um deles menor do que x , digamos a , e o outro maior do que x .



Na primeira coluna ficaram três números: um menor do que a , um menor do que x e um terceiro número que pode ser maior ou menor do que x . O mesmo ocorre na segunda coluna. Assim, após ordenação nas colunas, com certeza os dois primeiros números da primeira coluna são menores do que x , e os dois primeiros números da segunda coluna também são menores do que x . Como $a < x$, concluímos que x é o maior número na região cinza da tabela.

Item d) As casas em que o 5 pode ficar após uma ordenação linha-coluna são as casas pintadas de vermelho.

1	4 ou menos		
		6 ou mais	8 ou mais
	6 ou mais	9 ou mais	12

- No canto superior esquerdo da tabela sempre ficará o número 1 e no canto inferior direito da tabela sempre ficará o número 12;
- O maior número que pode ficar ao lado do 1 é o 4; isso ocorre quando 1, 2 e 3 estão inicialmente em linhas diferentes. Assim, o 5 não pode aparecer na 1ª linha, 2ª coluna.
- O menor número que pode ficar ao lado do 12 é o 9; isso ocorre quando 10, 11 e 12 estão inicialmente em linhas diferentes. Logo, o 5 não pode aparecer na 2ª. Linha, 4ª. coluna.
- O maior número que pode ficar abaixo do 1 é o 5; isso ocorre quando 1, 2, 3 e 4 estão inicialmente na mesma linha;
- O menor número que pode ficar acima do 12 é o 8, isso ocorre quando 9, 10, 11 e 12 estão inicialmente na mesma linha; desse modo, o 5 não pode aparecer acima do 12.
- De acordo com o item c), o menor número que pode ficar na casa destacada em amarelo é o 6. De fato, suponha que fosse o 5. Pelo item c), as demais casas cinzas deveriam abrigar cinco números menores do que 5, o que é impossível. Logo, o 5 não pode ocupar a casa na 2ª linha e 3ª. coluna e, por um argumento análogo, nenhum número menor do que 5 pode ocupar essa casa. O mesmo argumento mostra que o menor número que pode ficar na casa destacada em laranja também é o 6 e o 5 não pode ocupar essa posição também.

As tabelas abaixo ilustram os cinco casos em que o 5 pode aparecer no final do ordenamento por linha e coluna.

1	2	5	6
3	4	7	8
9	10	11	12

1	2	3	5
4	6	7	8
9	10	11	12

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

1	2	3	6
4	5	7	8
9	10	11	12

1	2	3	6
4	7	8	9
5	10	11	12