



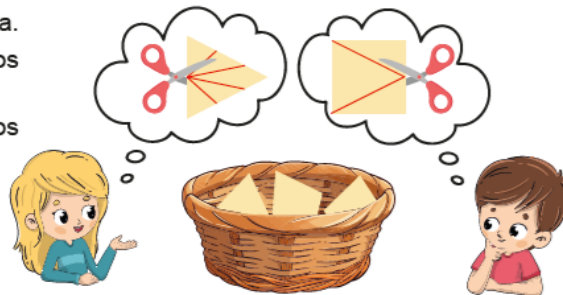
19º OBMEP - 2024

SOLUÇÕES

NÍVEL 3

1. Ana e Pedro cortam pedaços de papel que estão em uma cesta.
- Sempre que Ana pega um pedaço, corta em cinco pedaços e devolve todos eles para a cesta.
 - Sempre que Pedro pega um pedaço, corta em três pedaços e devolve todos eles para a cesta.

Inicialmente há três pedaços de papel na cesta.



- a) Quantos pedaços de papel ficarão na cesta depois de Ana e Pedro pegarem um pedaço cada um e devolverem os pedaços cortados para a cesta?
- b) Descreva uma maneira de Ana e Pedro pegarem, cortarem e devolverem todos os pedaços de papel da cesta para que, a partir dos três pedaços iniciais, a cesta fique com 11 pedaços.
- c) Explique por que, a partir dos três pedaços iniciais, a cesta nunca ficará com 2024 pedaços após Ana e Pedro devolverem todos os pedaços cortados para a cesta.

Solução N3Q1

Item a) O número de papéis na cesta sempre aumenta depois que Ana ou Pedro devolvem os pedaços que cortaram. Cada vez que Ana pega um pedaço da cesta, corta em 5 pedaços, e devolve os pedaços cortados para a cesta, o total de papéis da cesta aumenta em $5 - 1 = 4$. Cada vez que Pedro pega um pedaço da cesta, corta em 3 pedaços, e devolve os pedaços cortados para a cesta, o total de papéis da cesta aumenta em $3 - 1 = 2$. Logo, depois de Ana e Pedro pegarem um pedaço cada um e devolverem os pedaços cortados para a cesta, ela ficará com $3 + 4 + 2 = 9$ (ou $5 + 3 + 1 = 9$: Ana+Pedro+cesta) papéis.

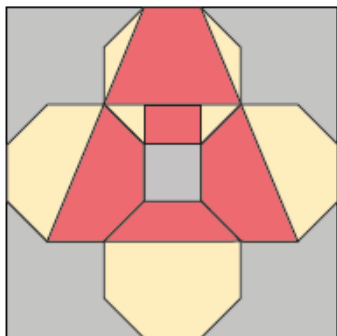
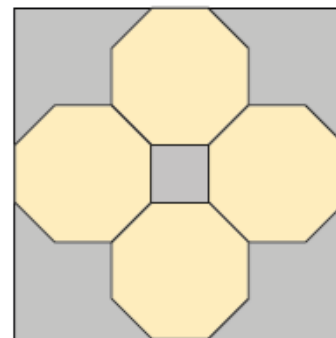
Item b) Há cinco maneiras diferentes de Ana e Pedro pegarem papéis da cesta a partir dos 3 pedaços iniciais para que, depois de devolverem os pedaços cortados, ela fique com 11 pedaços. Essas maneiras dependem da ordem em que Ana e Pedro pegam pedaços da cesta. São elas:

- Ana – Pedro – Pedro ($3 + 4 + 2 + 2 = 11$) ou $(5 + 3 + 3) = 11$
- Pedro – Ana – Pedro ($3 + 2 + 4 + 2 = 11$) ou $(3 + 5 + 3) = 11$
- Pedro – Pedro – Ana ($3 + 2 + 2 + 4 = 11$) ou $(3 + 3 + 5) = 11$
- Ana – Ana ($3 + 4 + 4 = 11$) ou $(1 + 5 + 5) = 11$
- Pedro – Pedro – Pedro – Pedro ($3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11$) ou $[(2 + 3) + 3 + 3 = 11]$

Item c) O número inicial de papéis na cesta é ímpar, e vai sempre aumentar de 2 ou de 4 pedaços. Como um ímpar mais um par sempre resulta em um número ímpar, o número de papéis na cesta sempre será ímpar, nunca será 2024.

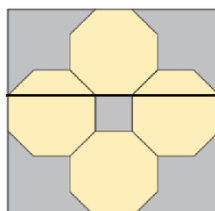
2. Quatro octógonos regulares de lados medindo 1 cm foram desenhados em um cartão quadrado, como na figura. Cada octógono tem um lado na borda do cartão e octógonos adjacentes têm um lado em comum.

- Qual é a área do cartão?
- Qual é a área da região cinza?
- Qual é a área da parte pintada em vermelho sobre os octógonos?

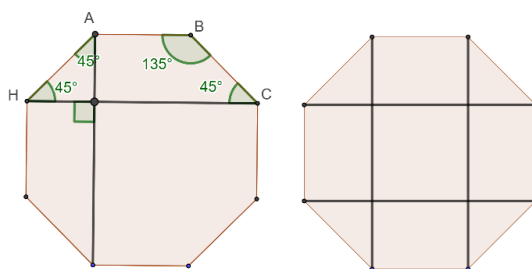


Solução N3Q2

Item a) Para se calcular a área do cartão vamos calcular quanto mede seu lado. A medida desse lado é o comprimento da linha mais grossa da figura a seguir, formada por duas diagonais do octógono e um lado do octógono.



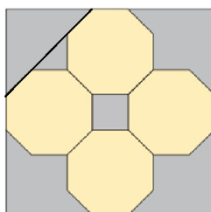
Em um octógono regular, a medida de cada um dos ângulos internos é 135° . Consequentemente, os ângulos internos do trapézio isósceles AHCB (abaixo, figura à esquerda), medem 135° e 45° . Os dois trapézios isósceles da figura têm em comum um triângulo retângulo isósceles. A hipotenusa desse triângulo é o lado AH do octógono (que mede 1 cm) e seus catetos medem, pelo Teorema de Pitágoras, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm. As diagonais do octógono (abaixo, figura à direita) medem, portanto,) cm. Elas decompõem o octógono em quatro triângulos retângulos isósceles congruentes, quatro retângulos congruentes e um quadrado central.



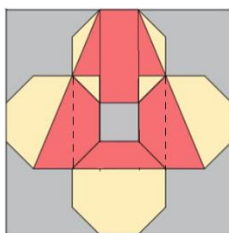
O lado do cartão mede o mesmo que duas diagonais do octógono mais a medida do lado do octógono, ou seja, $2(1 + \sqrt{2}) + 1 = (3 + 2\sqrt{2})$ cm, e sua área é $(3 + 2\sqrt{2})^2 = (17 + 12\sqrt{2})$ cm².

Item b) A área da região cinza em cada canto do cartão pode ser dividida em dois triângulos retângulos isósceles, conforme a figura a seguir. São quatro triângulos maiores, cujos catetos medem $(1 + \sqrt{2})$ cm (medem o mesmo que uma das diagonais do octógono vistas acima), e quatro triângulos menores, com catetos medindo 1 cm. Cada par desses triângulos de mesmo tamanho corresponde a um quadrado. Juntando a área do quadrado central à soma das áreas dos triângulos, a área da região cinza é

$$2 \times (1 + \sqrt{2})^2 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = (9 + 4\sqrt{2}) \text{ cm}^2$$



Item c) A área da parte vermelha pintada sobre os octógonos é igual a soma das áreas da parte vermelha pintada sobre cada octógono.

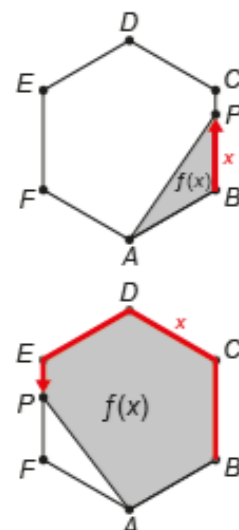
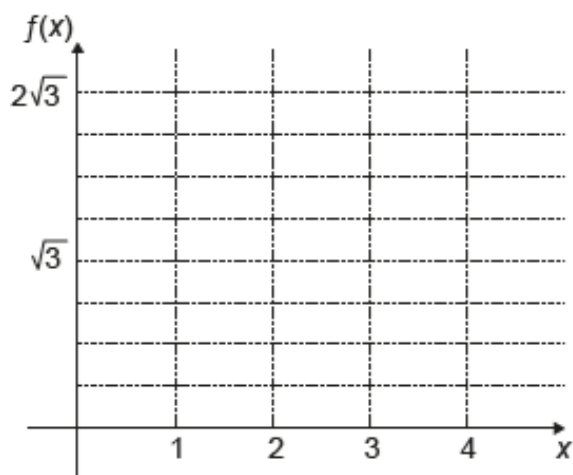


No octógono superior a área pintada em vermelho é formada por um retângulo de lados 1 e $1 + \sqrt{2}$ e por dois triângulos retângulos, cada um deles de catetos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$; a área do retângulo é igual a $1 + \sqrt{2}$ e a área de cada triângulo retângulo é igual $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$; logo a área vermelha pintada dentro do octógono superior é igual a $(1 + \sqrt{2}) + 2 \times \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Nos octógonos da esquerda e da direita área pintada em vermelho é formada por um triângulo retângulo de catetos 1 e $1 + \sqrt{2}$ e um trapézio de bases $1 + \sqrt{2}$, 1 e altura $\frac{\sqrt{2}}{2}$; a área do triângulo retângulo é igual a $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ e a área do trapézio é igual a $\frac{(2 + \sqrt{2}) \times (\frac{\sqrt{2}}{2})}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$; logo a área vermelha pintada dentro de cada octógonos da esquerda e da direita é igual a $1 + \sqrt{2}$. No octógono inferior a área pintada em vermelho é formada por um trapézio de bases $1 + \sqrt{2}$, 1 e altura $\frac{\sqrt{2}}{2}$; a área desse trapézio é igual a $\frac{(2 + \sqrt{2}) \times (\frac{\sqrt{2}}{2})}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$. Somando todas as áreas concluímos que a área total da região pintada em vermelho sobre os octógonos é igual a $\left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \times (1 + \sqrt{2}) + \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = (4 + 4\sqrt{2})$ cm².

Outra solução. Podemos calcular a área da região em vermelho subtraindo da área do trapézio determinado pelo seu contorno a soma das áreas do quadrado central com a área do quadrado de lado $\frac{\sqrt{2}}{2}$ formado pelos dois triângulos pequenos. As bases do trapézio medem 1 e $3 + \sqrt{2}$ e sua altura $2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$; logo, sua área é igual a $\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{2} + \frac{3}{2}$. Por outro lado, a soma das áreas dos dois quadrados é igual a $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Portanto, a área da região em vermelho é igual a $(4 + 4\sqrt{2})$ cm².

3. Um hexágono regular $ABCDEF$ tem lados de medida 1. Um ponto P desloca-se na borda do hexágono, a partir do vértice B , passando pelos vértices C , D e E até chegar ao vértice F . Seja x a distância percorrida pelo ponto P e seja $f(x)$ a área da região com vértices em P , A e outros vértices do hexágono pelos quais P já passou. A figura mostra algumas dessas regiões.

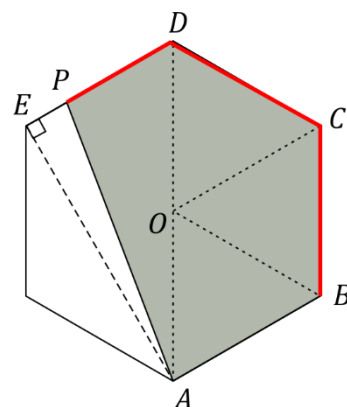
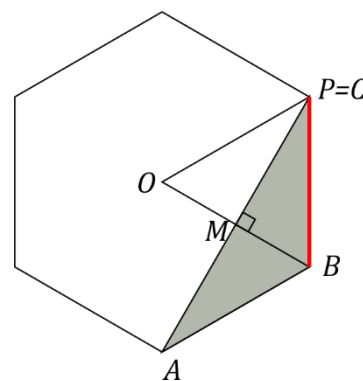
- Calcule $f(1)$.
- Determine a expressão de $f(x)$ quando P se desloca no lado DE .
- Esboce abaixo o gráfico de f .



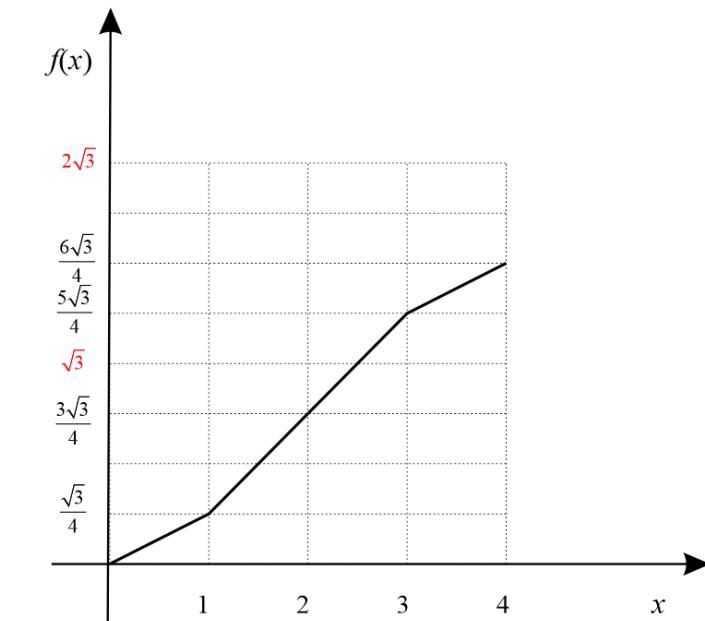
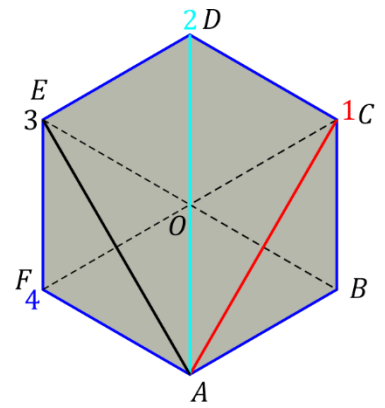
Solução N3Q3

Item a) Se $x = 1$ então o ponto P coincide com o vértice C do hexágono. A região com vértices em A , P e outros vértices do hexágono pelos quais o ponto P passou é o triângulo ABC . No hexágono regular de lado 1 da figura, O é o centro e BC um dos lados. Assim o triângulo com vértices em O , B e C é equilátero e sua área é igual a $\frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. O triângulo OBC tem a mesma área que o triângulo ABC , pois M é o ponto médio de OB , logo os triângulos OMP , BMP e BMA são congruentes (caso LLL de congruência). Assim, a área da região escura é igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}$, ou seja, $f(1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

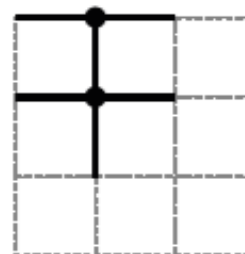
Item b) Quando P se desloca sobre o lado DE , ele já passou pelos lados BC e CD . Logo $DP = x - 2$. A área do polígono $ABCDP$ é igual 3 vezes a área do triângulo OBC mais a área do triângulo ADP . A altura desse triângulo relativa à base DP é $EA = AC = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ e a área do triângulo ADP é igual a $\frac{(x-2)\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}$. Assim, $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{4}$.



Item c) Olhando o percurso do ponto P de B até F, podemos calcular imediatamente $f(1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $f(2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $f(3) = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ e $f(4) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. No interior dos intervalos $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ e $[3,4]$, quando P se desloca, a área do triângulo com vértices P, A e o vértice Y anterior do hexágono pelo qual P passou varia linearmente com a distância PY (base do triângulo), já que a altura desses triângulos em cada intervalo é constante. Portanto, o gráfico da função f no intervalo $[0,4]$ é composto de segmentos de reta com extremidades nos pontos $(x, f(x))$ identificados acima. Logo, o gráfico tem o aspecto



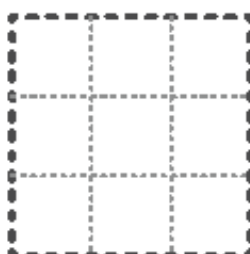
4. Um terreno quadrado foi dividido em 9 lotes também quadrados, cercados por muros. Câmeras instaladas no encontro de dois ou mais muros vigiam os muros adjacentes ao ponto de instalação. Na figura temos duas câmeras vigiando 6 muros.



a) Indique uma posição de duas câmeras na figura abaixo de modo que elas vigiem a maior quantidade possível de muros.



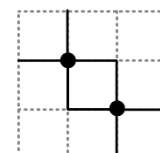
b) Qual é o número mínimo de câmeras necessárias para vigiar os 12 muros na fronteira do terreno? Justifique sua resposta.



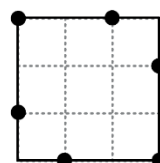
c) Encontre o número mínimo de câmeras necessárias para vigiar todos os muros do terreno. Justifique sua resposta.

Solução N3Q4

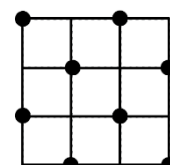
Item a) Como cada câmera pode vigiar no máximo 4 muros, o máximo que duas câmeras podem vigiar são 8 muros. A figura ilustra um exemplo em que esse máximo ocorre.



Item b) Uma câmera na fronteira vigia exatamente 2 muros dessa região. Como apenas câmeras na fronteira podem vigiar os muros dessa região e existem exatamente 12 muros nela, o mínimo de câmeras necessárias é $\frac{12}{2} = 6$. A figura ilustra um exemplo com essa quantidade de câmeras.



Item c) Uma câmera posicionada no interior não pode vigiar nenhum muro da fronteira, portanto, pelo item anterior precisamos de pelo menos 6 câmeras nessa região para vigiar seus 12 muros. Nenhuma das câmeras posicionadas na fronteira pode vigiar os 4 muros do quadrado central e, como qualquer câmera só pode vigiar 2 deles, precisamos de pelo menos 2 câmeras para vigiar esses 4 muros. Assim, precisamos de pelo menos $6 + 2 = 8$ câmeras para vigiar os muros. A figura mostra que é possível vigiar todos eles com essa quantidade, garantindo assim que esse número é o mínimo.



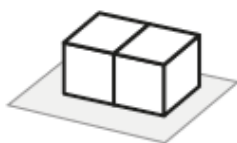
5. Marina tem vários dados idênticos com faces numeradas de 1 a 6. Nesses dados, a soma dos números em faces opostas é sempre igual a 7. Ela junta ou empilha alguns desses dados sobre uma mesa e anota a soma de todos os números que consegue ver ao dar uma volta ao redor da mesa. Por exemplo, para os dados a figura ao lado ela anotou o número 33.



a) Qual é o número que Marina deve anotar para os dados da figura abaixo?



b) Qual é o menor número possível que Marina pode anotar para dois dados juntos sobre a mesa, como indicado na figura abaixo?



c) Marina anotou o número 88 para uma pilha de dados como indicado na figura abaixo. Quais números podem ficar no topo dessa pilha? Justifique sua resposta.



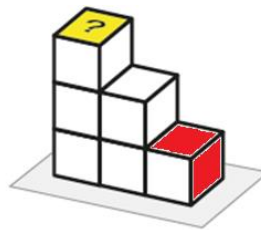
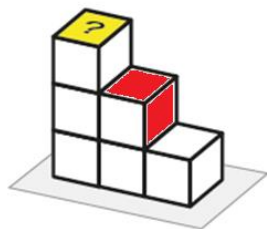
Solução N3Q5

Item a) Na pilha de três dados da figura, ao dar uma volta em torno da mesa, Marina consegue ver seis pares de faces opostas mais a face do topo, com o número 6. Cada par de faces opostas totaliza 7, portanto, ela anota o número 48, já que $6 \times 7 + 6 = 48$.

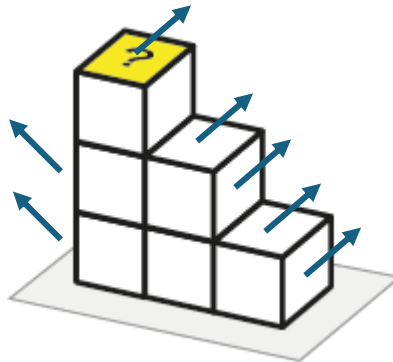
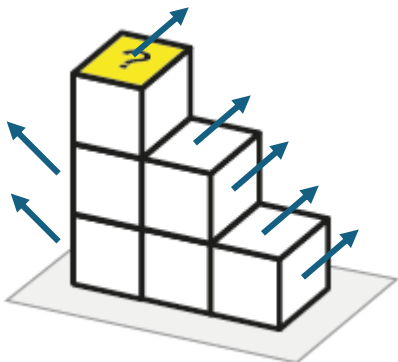
Item b) Nesta nova figura, com dois dados unidos pelas laterais, ao dar uma volta em torno da mesa, Marina consegue ver seis faces: dois pares de faces opostas, que totalizam 14 pontos, mais quatro faces (duas em cada dado). Para que a soma total seja mínima, essas quatro faces devem ter os números 1 ou 2, sendo 1 e 2 em um dado e 1 e 2 em outro. Desta forma, o menor número possível que Marina pode anotar é $14 + 2 \times 1 + 2 \times 2 = 20$. Como curiosidade, observe que os pares de faces opostas que Marina consegue ver nos dados devem ter os números 3 e 4.

Item c) Marina consegue ver sete pares de faces opostas da nova pilha, que totalizam $7 \times 7 = 49$. Logo, as demais sete faces visíveis por ela devem totalizar $88 - 49 = 39$. Observe que $39 = 4 \times 6 + 3 \times 5$; logo, deve haver ao menos quatro dessas faces com o número 6 para que seja possível obter a soma 39 (se houvesse menos nunca chegaríamos a 39 com sete parcelas). Vamos concentrar nossa atenção nas sete faces que Marina consegue ver, mas não consegue ver a face oposta. Há três casos a considerar:

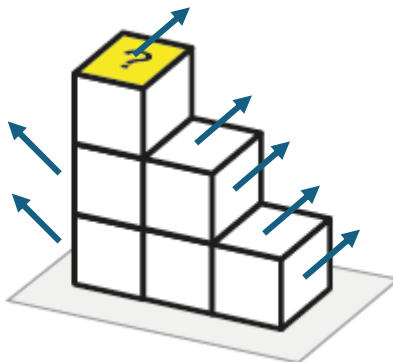
- Não é possível que seis faces dessas sete faces tenham o número 6 (embora $39 = 6 \times 6 + 3$). Se isso ocorresse, um dos dados mais à direita teria duas faces (em vermelho na figura abaixo) com o número 6.



- Configurações nas quais quatro dessas sete faces apresentam o número 6 e três faces apresentam o número 5 são possíveis para a pilha em questão (estamos usando a decomposição $39 = 4 \times 6 + 3 \times 5$) e são mostradas nas figuras a seguir, nas quais os números 6 e 5 aparecem no topo.

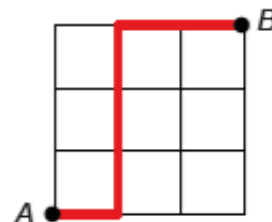


- Além disso, observe também que $39 = 5 \times 6 + 5 + 4$. Nesse último caso, cinco das sete faces em consideração receberiam o número 6, uma face o número 5 e uma face o número 4. Isso é possível, como mostrado na figura abaixo, com o 6 no topo da pilha.

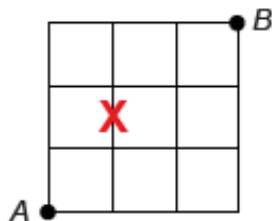


Portanto, 5 e 6 são os únicos números que podem aparecer no topo da pilha.

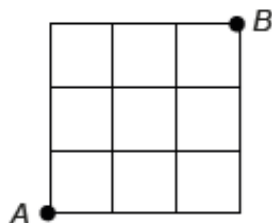
6. Duas formigas caminham sobre as linhas do quadriculado da figura. No mesmo instante, uma parte do ponto A e a outra, do ponto B. A velocidade da formiga que parte de B é dois terços da velocidade da formiga que parte de A. A formiga que parte de A sempre caminha para a direita ou para cima, e a formiga que parte de B sempre caminha para a esquerda ou para baixo. Cada vez que uma delas tem duas direções para prosseguir, essas direções têm probabilidade $1/2$ de ser escolhida. Por exemplo, a probabilidade de que a formiga que parte de A siga o caminho indicado na figura é $(1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) = 1/16$, pois ela tem que fazer 4 escolhas de direções.



a) Qual é a probabilidade de que a formiga que parte de A passe pelo lado do quadriculado marcado com X?



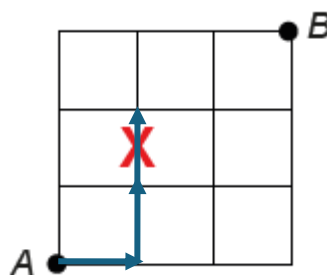
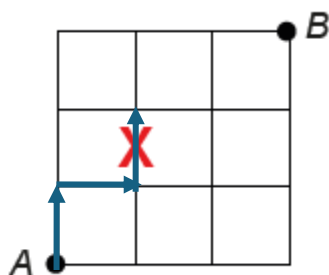
b) Marque abaixo, com um X, os lados do quadriculado onde as formigas podem se encontrar.



c) Qual é a probabilidade de que as formigas se encontrem?

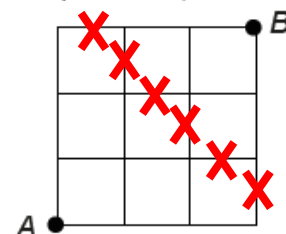
Solução N3Q6

Item a) Vamos chamar de formiga A a formiga que parte de A e de formiga B a que parte de B. Para que a formiga A passe pelo lado indicado, ela deve fazer um dos dois caminhos abaixo.



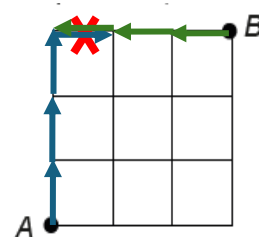
Em cada um desses caminhos, ela tem que fazer 3 escolhas de direções. Logo, cada um desses caminhos tem probabilidade $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Portanto, a probabilidade de que ela passe pelo lado indicado é $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

Item b) Cada formiga percorre 6 segmentos em seu percurso. Como a velocidade de B é $\frac{2}{3}$ da velocidade de A, enquanto a formiga A percorre uma distância x , a outra percorre $\frac{2}{3}x$. Quando elas se encontram, a soma das distâncias percorridas deve ser igual aos 6 segmentos que as separam. Ou seja, temos $x + \frac{2}{3}x = 6$. Daí, obtemos $x = \frac{18}{5} = 3,6$. Logo, ao se encontrar, a formiga A percorreu 3,6 segmentos e a formiga B, 2,4 segmentos. Portanto, os segmentos em que elas podem se encontrar são os que correspondem ao 4º segmento em um caminho percorrido pela formiga A e ao 3º segmento em um caminho percorrido pela formiga B. Esses segmentos estão assinalados na figura.

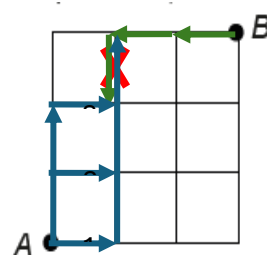


Item c) Vamos calcular a probabilidade de que as formigas se encontrem em cada um dos segmentos assinalados acima (somaremos tudo no final). Para isso, basta calcular a probabilidade de que cada formiga percorra esse segmento e multiplicar os resultados.

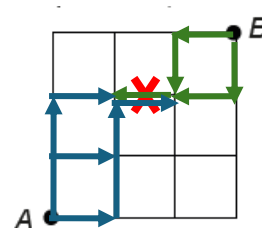
Para que elas se encontrem no segmento indicado ao lado, A e B precisam percorrer os caminhos indicados em azul e verde, respectivamente. Como cada formiga faz 3 escolhas de direção, a probabilidade de que cada uma delas percorra esses caminhos é igual a $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Logo, a probabilidade de que ambas percorram o segmento indicado é $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.



Para que elas se encontrem no segmento indicado ao lado, A tem 3 possibilidades de caminho, indicados em azul, ao longo dos quais ela faz 4 escolhas de direção. Logo, a probabilidade de que ela percorra cada um desses caminhos é $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ e a probabilidade de que ela passe pelo segmento indicado ao lado é $3 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. Já a formiga B precisa percorrer o caminho indicado em verde, ao longo do qual ela faz 3 escolhas de direção. Logo, a probabilidade de que B passe pelo segmento indicado é $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Portanto, a probabilidade de que as formigas se encontrem no segmento indicado ao lado é $\frac{3}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{128}$.



A probabilidade de que A passe pelo segmento indicado ao lado é a mesma de passar pelo segmento anterior, ou seja, igual a $\frac{3}{16}$ (3 caminhos possíveis, com probabilidade $\frac{1}{16}$ cada). Já a formiga B precisa percorrer um dos dois caminhos indicados em verde, ao longo dos quais ela faz 3 escolhas de direção. Logo, a probabilidade de que B passe por esse segmento é $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$ e a probabilidade de que elas se encontrem sobre o segmento indicado é $\frac{3}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$.



Por simetria, a probabilidade de encontro nos outros três segmentos é igual à calculada acima para o segmento respectivamente simétrico em relação à diagonal AB. Logo, a probabilidade de que as formigas se encontrem é

$$2\left(\frac{1}{64} + \frac{3}{128} + \frac{3}{64}\right) = \frac{11}{64}$$