

Solução da prova da 1ª Fase

QUESTÃO 1 – ALTERNATIVA A

Solução: Pedro deve pagar exatamente 20 reais. O total pago em notas de 2 reais é par e, como 20 é par, o total pago em notas de 5 reais também deve ser par. Devemos então procurar os múltiplos pares de 5 menores do que ou iguais a 20, que são 0, 10 e 20. Dessa maneira, temos exatamente 3 possibilidades:

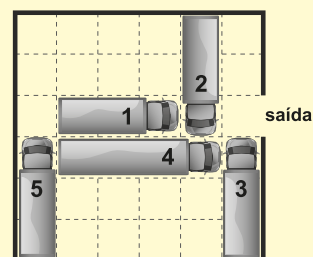
- 10 notas de 2 reais.
- 2 notas de 5 reais e 5 notas de 2 reais.
- 4 notas de 5 reais.

QUESTÃO 2 – ALTERNATIVA B

Solução: Vamos pensar de trás para a frente. Antes de o caminhão 1 sair, o 2 deve se mover quatro casas para baixo. Para que isso seja possível, o 4 deve ter dado marcha a ré um quadrado para a esquerda. Para que isso aconteça, o 5 deve ter se movimentado três quadrados para cima. Dessa maneira, a menor sequência possível de movimentos para que o 1 tenha sua saída liberada é

- 5 se move três quadrados para cima;
- 4 se move um quadrado para trás;
- 2 se move três quadrados para baixo.

Dessa maneira, o terceiro caminhão a ser movimentado é o 2.



QUESTÃO 3 – ALTERNATIVA D

Solução: As palavras JABUTI e CABRA juntas têm um R a mais do que a palavra JABUTICABA, então $R = 40 + 19 - 55 = 4$.

Mais detalhadamente, como João atribuiu um valor numérico a cada letra do alfabeto, cada letra do alfabeto passou a representar um número. De acordo com os valores que João atribuiu às letras, temos:

$$J + A + B + U + T + I = 40$$

$$C + A + B + R + A = 19$$

$$J + A + B + U + T + I + C + A + B + A = 55$$

Somando os valores atribuídos às letras de JABUTI e CABRA temos

$$(J + A + B + U + T + I) + (C + A + B + R + A) = 40 + 19 = 59$$

De acordo com as propriedades associativa e comutativa da soma, temos

$$(J + A + B + U + T + I) + (C + A + B + R + A) = (J + A + B + U + T + I + C + A + B + A) + R$$

Assim

$$(J + A + B + U + T + I + C + A + B + A) + R = 59$$

Como a soma dos valores atribuídos às letras de JABUTICABA é igual a 55, temos

$$55 + R = 59.$$

Logo, $R = 4$.

QUESTÃO 4 – ALTERNATIVA B

Solução: No total, as bolas pesam 4 quilos. Logo, na figura da esquerda, cada lado pesa 2 quilos, o que nos permite concluir que as bolas 4 e 5 pesam um quilo cada e que, dentre as bolas 1, 2 e 3, uma pesa um quilo e duas pesam meio quilo. Na figura 2, o lado direito é mais pesado. Como as bolas 4 e 5 têm o mesmo peso, concluímos que a bola 2 é mais pesada que a bola 1. Portanto, a bola 2 pesa um quilo e as bolas 1 e 3 pesam meio quilo cada.

QUESTÃO 5 – ALTERNATIVA C

Solução: A cruz da Figura 1 tem perímetro igual a 12 cm.

Ao encaixar uma cruz na outra, os lados que coincidem (linhas pontilhadas) das duas cruzes, deixam de contar no contorno.

Desta forma, temos:

Figura 1: $12 = 6 \times 2$ cm

Figura 2: $12 + (12 - 6) = 18 = 6 \times 3$ cm

Figura 3: $12 + 12 - 6 + (12 - 6) = 18 + 6 = 24 = 6 \times 4$ cm,

e assim sucessivamente, sempre adicionado 6 à medida do contorno anterior. Logo, a opção correta é 2028, pois é a única que é múltiplo de 6.

QUESTÃO 6 – ALTERNATIVA C

Solução: O primeiro corte tem como resultado dois pedaços de 8 cm cada, que indicamos por (8,8); o segundo corte tem como resultado um pedaço de 8 cm e dois pedaços de 4 cm, que indicamos por (8,4,4). Se mantivermos intacto o pedaço com 8 cm nos dois cortes subsequentes, o resultado do terceiro corte é (8,4,2,2) e para que fiquem apenas pedaços de dois comprimentos diferentes a única possibilidade para o resultado do quarto corte é (8,2,2,2,2). Se cortarmos o pedaço de 8 cm (no terceiro ou no quarto corte) o resultado final é (4,4,4,2,2). Em qualquer caso o comprimento dos dois menores pedaços é 2 cm.

Outra solução: Após cada corte o número de pedaços aumenta em uma unidade. Como são feitos quatro cortes, no fim teremos cinco pedaços. O maior pedaço mede, no máximo, 8 cm, e o menor pedaço, no mínimo, 1 cm. Logo, ao final, os pedaços possíveis têm medidas 1, 2, 4 e 8 cm.

Se o maior pedaço medir 8 cm, como no fim só temos dois comprimentos diferentes, os outros quatro pedaços têm que medir 2 cm. Isso é possível de ser obtido assim:

$$16 \rightarrow 8 + 8 \rightarrow 8 + 4 + 4 \rightarrow 8 + 4 + 2 + 2 \rightarrow 8 + 2 + 2 + 2 + 2.$$

Se o maior pedaço medir 4 cm, os outros quatro pedaços somam 12 cm. Note que, como a média de tamanho desses quatro pedaços é $12/4 = 3$ cm, temos que ter, necessariamente, mais um pedaço de 4 cm. Os outros três pedaços medem, portanto, 8 cm, cuja média é maior que 2 cm, então, novamente, temos que ter mais um pedaço de 4 cm. Não podemos ter quatro pedaços de 4 cm, pois os cinco pedaços somariam mais de 16 cm. Devemos ter três pedaços de 4 cm e dois pedaços de 2 cm. Isso pode ser obtido assim:

$$16 \rightarrow 8 + 8 \rightarrow 8 + 4 + 4 \rightarrow 4 + 4 + 4 + 4 \rightarrow 4 + 4 + 4 + 2 + 2.$$

O maior pedaço não pode ter 2 cm, pois $5 \times 2 = 10 < 16$.

Em todos os casos, o menor pedaço mede 2 cm.

Outra solução: Como mostrado anteriormente, os pedaços possíveis têm medidas de 1, 2, 4 ou 8 cm depois dos cortes. Suponha que o menor pedaço meça 1 cm. Como o comprimento total é 16, um número par, o número de pedaços de 1 cm tem que ser par. Não podemos ter quatro pedaços de 1 cm, pois o quinto pedaço teria que medir 12 cm. Se tivermos dois pedaços de 1 cm, os outros pedaços somam 14 cm. A única maneira de obter isso é com pedaços de 2, 4 e 8 cm. Nesse caso, teremos pedaços de quatro comprimentos diferentes. Conclusão: o menor pedaço não pode ter 1 cm.

O menor pedaço não pode ter 4 cm porque cinco pedaços de 4 cm somam 20 cm.

A única possibilidade é que o menor pedaço tenha 2 cm. Isso pode ser obtido da seguinte forma:

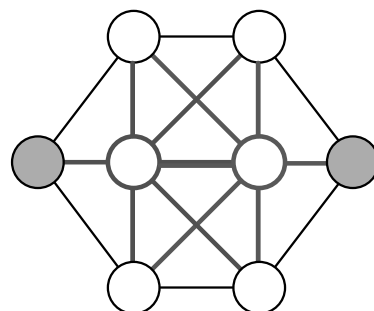
$$16 \rightarrow 8 + 8 \rightarrow 8 + 4 + 4 \rightarrow 8 + 4 + 2 + 2 \rightarrow 8 + 2 + 2 + 2 + 2.$$

ou

$$16 \rightarrow 8 + 8 \rightarrow 8 + 4 + 4 \rightarrow 4 + 4 + 4 + 4 \rightarrow 4 + 4 + 4 + 2 + 2.$$

QUESTÃO 7 – ALTERNATIVA A

Solução: Na figura ao lado, cada um dos círculos centrais se conecta a outros 6 círculos, como destacado em verde e em vermelho. Isso significa que há apenas um outro círculo da figura ao qual cada círculo central não se conecta. Os números 2, 3, 4, 5, 6, e 7 podem ser conectados a dois outros. Logo, nos círculos centrais devem ser colocados o 1 e o 8.

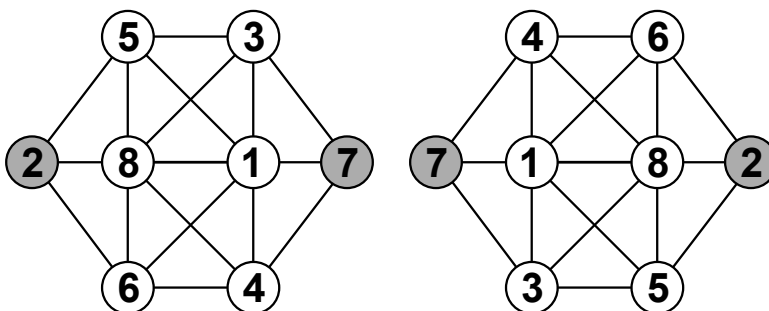


Caso o 1 seja colocado no círculo central mais à esquerda, o 2 deve ser colocado longe dele, no círculo cinza da direita. Simetricamente, caso o 1 seja colocado no círculo central mais à direita, o 2 deve ser colocado no círculo cinza da esquerda.

Caso o 8 seja colocado no círculo central mais à esquerda, o 7 deve ser colocado longe dele, no círculo cinza da direita. Simetricamente, caso o 8 seja colocado no círculo central mais à direita, o 7 deve ser colocado no círculo cinza da esquerda.

Portanto, Marcela deve colocar os números 2 e 7 nos círculos cinza.

Alguns preenchimentos possíveis:



Outra solução: Um número que apareça em um dos círculos centrais não pode ter antecessor e sucessor pois, nesse caso, sobriariam apenas cinco números para preencher os seis círculos a ele conectados; dessa maneira, os números que aparecem nos círculos centrais são 1 e 8. Se o 1 aparece no círculo central à direita, o 2 só pode aparecer no círculo na extremidade esquerda; nesse caso, o 8 está no círculo central à esquerda e, pelo mesmo argumento, o 7 deve aparecer no círculo da extremidade direita. O mesmo raciocínio se aplica se o 1 aparece no círculo central à esquerda.

QUESTÃO 8 – ALTERNATIVA C

Solução: Como Ana pesa 48 quilogramas e a mochila não pode pesar mais do que 12% do peso de Ana, o peso da mochila com o material não pode passar de $0,12 \times 48 = 5,76$ quilogramas.

Como a mochila vazia pesa 760 gramas, ou seja, 0,76 quilogramas, concluímos que o peso máximo do material contido na mochila deve ser igual a $5,76 - 0,76 = 5$ quilogramas.

QUESTÃO 9 – ALTERNATIVA B

Solução: Quando a folha é dobrada ao meio, uma das dimensões se mantém e a outra é reduzida à metade, e portanto, o novo perímetro é o original menos o comprimento dessa dimensão. Logo, uma das dimensões da folha é $50 - 35 = 15$ cm e a outra dimensão é $(50 - 2 \times 15)/2 = 10$ cm. Ao se dobrar da outra forma, o novo perímetro será $2 \times (15 + 5) = 40$ cm (alternativamente, a redução do perímetro na outra forma é 10 cm; logo, ele passa a ser igual a 40 cm).

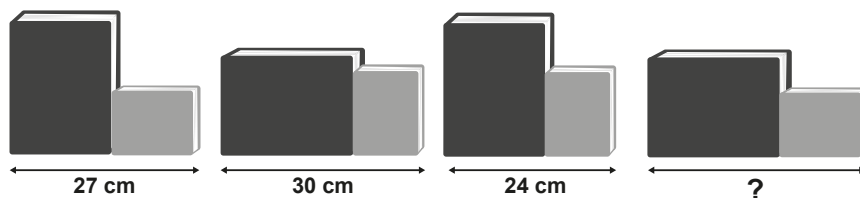
QUESTÃO 10 – ALTERNATIVA A

Solução: Dado que a temperatura máxima da terça-feira foi de 25°C , temos que a temperatura máxima de segunda-feira, 4°C mais baixa do que a de terça-feira, foi de 21°C .

Consequentemente, a temperatura máxima de quarta-feira, 6°C mais baixa do que a de segunda-feira, foi de $21^\circ\text{C} - 6^\circ\text{C} = 15^\circ\text{C}$.

QUESTÃO 11 – ALTERNATIVA B

Solução: Observe a ilustração



Comparando a primeira figura com a terceira, concluímos que o livro menor deitado tem 3 cm a mais do que o mesmo livro em pé ($27 - 24 = 3$ cm).

Comparando a segunda figura com a última, vemos a distância indicada pelo ponto de interrogação é $30 + 3 = 33$ cm.

Outra solução: A quarta disposição é igual à primeira mais a segunda, menos a terceira. Então, ela mede $27 + 30 - 24 = 33$ cm.

QUESTÃO 12 – ALTERNATIVA C

Solução: Como $50 - 5 = 45$, pelo enunciado, podemos deduzir que 45 pirulitos custam R\$ 20,25. Logo, um único pirulito custa $20,25 \div 45 = 0,45$ reais. Logo, 50 pirulitos custam $50 \times 0,45 = 22,50$ reais.

QUESTÃO 13 – ALTERNATIVA C

Solução: A sopa não pode ter salsinha e um de seus ingredientes deve ser alho; desse maneira, Michel deve fazer a sopa com mais dois ou três ingredientes entre cebola, batata e cenoura. Ele pode escolher exatamente dois ingredientes de 3 maneiras diferentes: cebola + batata, cebola + cenoura e batata + cenoura. Além disso, ele pode escolher três ingredientes de uma única maneira: cebola + batata + cenoura. Dessa maneira, Michel pode fazer uma sopa que atenda a seus dois filhos de $3 + 1 = 4$ maneiras diferentes.

QUESTÃO 14 – ALTERNATIVA A

Solução: Como a soma de quaisquer dois algarismos distintos é menor que 18, para que tenhamos a unidade de milhar no resultado, deve ocorrer o “vai um” na soma das centenas. Assim, $O + 1 = 10$ e, conseqüentemente, $O = 9$. Ocorre também o “vai um” na soma das dezenas.

$$\begin{array}{r}
 \text{O B M} \\
 + \quad \text{E P} \\
 \hline
 1 \ 0 \ 5 \ 2
 \end{array}$$

Passemos agora às casas das unidades. Se não ocorrer o “vai um” na soma das unidades, devemos ter $M + P = 2$. Como os algarismos são distintos, isso forçaria um deles a ser 0 e o outro a ser 2, mas isso não é possível porque o enunciado diz que todos os algarismos O, B, M, E, P são diferentes de zero. Logo, ocorre o “vai um” na soma das unidades, ou seja, $M + P = 12$ e, daí, $B + E + 1 = 15$. Assim, $B + E = 14$ e $O + B + M + E + P = 9 + (B + E) + (M + P) = 9 + 14 + 12 = 35$.

Um exemplo que satisfaz o problema é $987 + 65$.

QUESTÃO 15 – ALTERNATIVA C

Solução: Sabemos que o lado de cada quadradinho mede 1 cm, logo, a área de cada quadradinho é 1 cm^2 . O lado do quadrado formado pelas peças do Tangram mede 4 cm, e a área desse quadrado é 16 cm^2 .

Na figura, destacamos as peças do Tangram. A relação das peças com o quadrado e com o quadradinho que é a unidade de área nos permite determinar suas respectivas áreas:

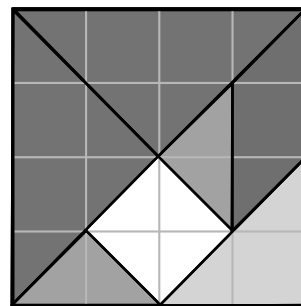
- os dois triângulos retângulos e isósceles laranjas, posicionados lado a lado, acima e à esquerda, que vamos chamar de “triângulos grandes”, têm, cada um, área igual a um quarto da área do quadrado, ou seja, 4 cm^2 ;

- o triângulo retângulo isósceles amarelo, na extremidade inferior, à direita, que vamos chamar de “triângulo médio”, tem área igual a um oitavo da área do quadrado, ou seja, 2 cm^2 ;

- os dois triângulos retângulos e isósceles de cor rosa, que vamos chamar de “triângulos pequenos”, têm, cada um, área igual a 1 cm^2 ;

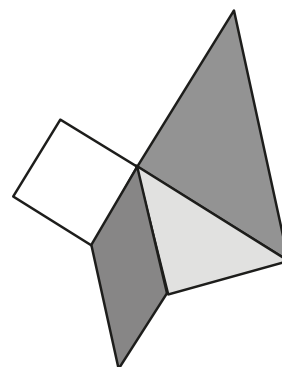
- o quadrado branco, formado pela reunião de dois “triângulos pequenos”, com área igual a 2 cm^2 ;

- o paralelogramo azul, equivalente a um retângulo formado por dois quadradinhos do quadriculado, tem área igual a 2 cm^2 .



Finalmente, observamos que a figura cuja área queremos determinar pode ser decomposta ou formada por um triângulo grande, um triângulo médio, um quadrado e um paralelogramo.

A área dessa figura será a soma das áreas dessas figuras: $4 + 2 + 2 + 2 = 10$; ou seja, igual a 10 cm^2 .



QUESTÃO 16 – ALTERNATIVA B

Solução: O quadrado de um número inteiro a é o número a^2 . Dada a expressão $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$, podemos decompor os fatores compostos em seus fatores primos, de modo que

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 2 \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (2 \times 5)$$

Vemos que há oito fatores 2, quatro fatores 3, dois fatores 5 e um único fator 7.

Assim, podemos reescrever o produto acima como

$$2^8 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

O número que impede que o resultado seja o quadrado de um inteiro é o 7, pois ele não aparece elevado ao quadrado. Eliminando esse fator, temos

$$2^8 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^2 \times 5^2 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5)^2 = 720^2$$

Logo, um único fator deve ser eliminado, o fator 7.

QUESTÃO 17 – ALTERNATIVA C

Solução: Partindo do vértice A , ao final da primeira aresta percorrida, a formiguinha pode atingir os vértices B , D ou E . A partir de um desses vértices, a formiguinha vai percorrer a segunda aresta.

Partindo de B , ela pode atingir os vértices A , C ou F ; partindo de D , pode atingir os vértices A , C ou H ; partindo de E , pode atingir os vértices A , F ou H .

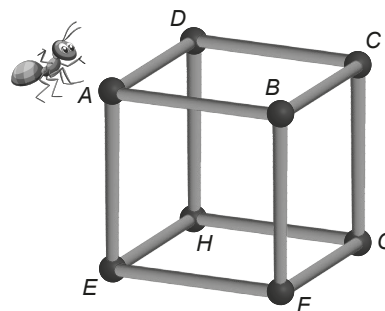
Assim, ao final da segunda aresta percorrida, a formiguinha pode estar em um dos vértices A , C , F ou H . A partir desses vértices, vai percorrer a terceira aresta.

Partindo de A , ao final da terceira aresta percorrida, pode atingir B , D ou E ; partindo de C , pode atingir os vértices B , D ou G ; partindo de F , pode atingir os vértices B , E ou G e partindo de H , pode atingir os vértices D , E ou G .

Assim, após percorrer 3 arestas consecutivas, a formiguinha pode estar em somente um dos 4 seguintes vértices: B , D , E ou G .

Outra solução:

Olhando para cada face do cubo, vemos que para ir de um vértice aos dois vértices adjacentes basta caminhar uma aresta e para chegar ao vértice oposto ou voltar ao vértice original, é preciso caminhar duas arestas. Daí é possível concluir que, para sair de A e voltar para A , ou chegar a C ou F ou H , a formiguinha deve andar um número par de arestas consecutivas e, para chegar aos outros vértices, a saber, B , D , E ou G , deve andar um número ímpar de arestas consecutivas. Com três movimentos ela consegue chegar aos vértices B , D , E ou G .



QUESTÃO 18 – ALTERNATIVA C

Solução: O quadradinho central do tabuleiro está em todos os subtabuleiros 2×2 . Por isso, se houver algum número ali, qualquer que seja, ele contribuirá com a soma nos quatro subtabuleiros – então, pode ser qualquer um, em termos de cálculos.

Observe nas figuras abaixo os quatro subtabuleiros 2×2 possíveis:

3	7	
4		2
	1	

3	7	
4		2
	1	

3	7	
4		2
	1	

3	7	
4		2
	1	

A soma dos três números visíveis no subtabuleiro vermelho é 14.

No subtabuleiro verde, a soma é $7 + 2 = 9$. Então, o número no quadradinho cinza desse subtabuleiro é $14 - 9 = 5$.

No subtabuleiro amarelo, a soma é $4 + 1 = 5$. Então, o número no quadradinho cinza desse subtabuleiro é $14 - 5 = 9$.

No subtabuleiro roxo, a soma é $2 + 1 = 3$. Então, o número no quadradinho cinza desse subtabuleiro é $14 - 3 = 11$.

Portanto, a soma dos números em todos os quadradinhos cinza é $5 + 9 + 11 = 25$.

Observação: em termos de cálculos, qualquer número pode ser colocado no quadradinho central. Por isso, uma opção que facilita o cálculo é quando o 0 (zero) é colocado no quadradinho central.

QUESTÃO 19 – ALTERNATIVA A

Solução: Podemos analisar a ação de cada ponteiro independentemente e “concatenar” os resultados das mudanças de cores, pois a cor de um número muda cada vez que um ponteiro, não importa qual, aponta para a hora que o relógio representa.

Às 3h30min o ponteiro das horas terá apontado para os números 1, 2 e 3, alterando suas cores. Esses são os únicos números alterados pelo movimento do ponteiro das horas.

O ponteiro dos minutos terá dado três voltas e meia, portanto terá alterado os números 1 a 6, quatro vezes e os números de 7 a 12, três vezes.

Assim, a cor dos números de 1 a 3 terá sido alterada $1 + 4 = 5$ vezes (uma vez pelo ponteiro das horas e quatro vezes pelo ponteiro dos minutos), os números de 4 a 6, quatro vezes (apenas pelo ponteiro dos minutos), e os números de 7 a 12, três vezes (apenas pelo ponteiro dos minutos).

Se o número de alterações é par, ele fica preto, se é ímpar, ele fica branco. Então, os números 4, 5 e 6 ficam pretos e os restantes ficam brancos.

QUESTÃO 20 – ALTERNATIVA D

Solução: Vamos indicar uma pessoa que ganhou o prêmio por S e uma que não ganhou por N. Se a pessoa que ganhou o prêmio estivesse na terceira posição, teríamos a seguinte configuração na fila: _NSN_ (aqui os traços representam espaços que são ocupados por alguma pessoa). Perceba que as duas pessoas com as letras N estariam falando a verdade independentemente da frase proferida e isso não seria possível pela informação do enunciado. O mesmo absurdo aconteceria se a pessoa que ganhou o prêmio estivesse na segunda ou quarta posição. Portanto, a pessoa que ganhou o prêmio só pode estar nos extremos da fila. Além disso, como só há um prêmio, se três pessoas falarem que não ganharam o prêmio, pelo menos duas delas estarão falando a verdade e isso também é impossível pelo enunciado.

Um exemplo de distribuição do prêmio seria: NNNNS e todas poderiam dizer: “A pessoa que ganhou o prêmio está ao meu lado”. Apenas a quarta pessoa estaria falando a verdade.