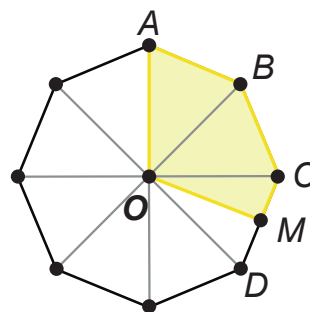


Solução da prova da 1ª Fase

QUESTÃO 1 – ALTERNATIVA A

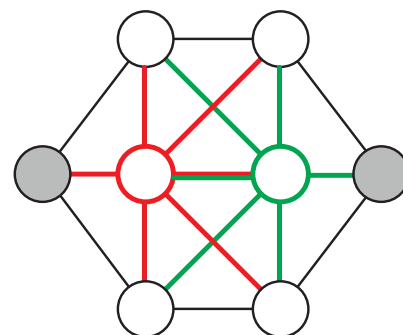
Solução: Na figura aparecem as diagonais do octógono que passam pelo ponto O ; elas dividem o octógono em oito triângulos congruentes. Como a área do octógono é 16 cm^2 , a área de cada um desses triângulos é $\frac{16}{8} = 2 \text{ cm}^2$. Como M é o ponto médio de CD , os triângulos OMC e OMD são congruentes e segue que a área do triângulo OMC é metade da área do triângulo OCD . Finalmente, o polígono amarelo é formado por dois triângulos de área 2 cm^2 e pelo triângulo OMC ; sua área é, então, $2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ cm}^2$.



QUESTÃO 2 – ALTERNATIVA A

Solução: Na figura ao lado, cada um dos círculos centrais se conecta a outros 6 círculos, como destacado em verde e em vermelho. Isso significa que há apenas um outro círculo da figura ao qual cada círculo central não se conecta. Os números 2, 3, 4, 5, 6, e 7 podem ser conectados a dois outros. Logo, nos círculos centrais devem ser colocados o 1 e o 8.

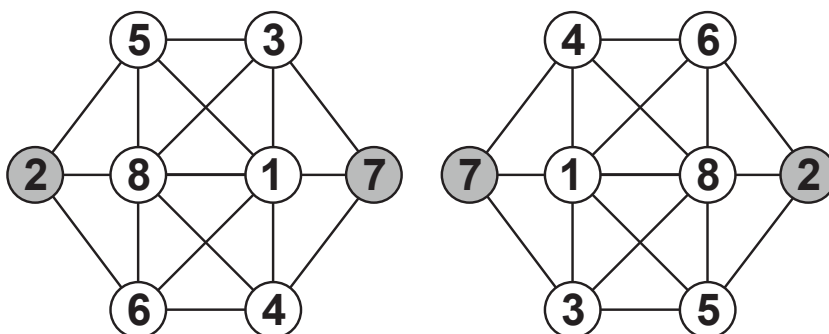
Caso o 1 seja colocado no círculo central mais à esquerda, o 2 deve ser colocado longe dele, no círculo cinza da direita. Simetricamente, caso o 1 seja colocado no círculo central mais à direita, o 2 deve ser colocado no círculo cinza da esquerda.



Caso o 8 seja colocado no círculo central mais à esquerda, o 7 deve ser colocado longe dele, no círculo cinza da direita. Simetricamente, caso o 8 seja colocado no círculo central mais à direita, o 7 deve ser colocado no círculo cinza da esquerda.

Portanto, Marcela deve colocar os números 2 e 7 nos círculos cinza.

Alguns preenchimentos possíveis:



Outra solução: Um número que apareça em um dos círculos centrais não pode ter antecessor e sucessor pois, nesse caso, sobrariam apenas cinco números para preencher os seis círculos a ele conectados; dessa maneira, os números que aparecem nos círculos centrais são 1 e 8. Se o 1 aparece no círculo central à direita, o 2 só pode aparecer no círculo na extremidade esquerda; nesse caso, o 8 está no círculo central à esquerda e, pelo mesmo argumento, o 7 deve aparecer no círculo da extremidade direita. O mesmo raciocínio se aplica se o 1 aparece no círculo central à esquerda.

QUESTÃO 3 – ALTERNATIVA B

Solução: Quando a folha é dobrada ao meio, uma das dimensões se mantém e a outra é reduzida à metade, e portanto, o novo perímetro é o original menos o comprimento dessa dimensão. Logo, uma das dimensões da folha é $50 - 35 = 15$ cm e a outra dimensão é $(50 - 2 \times 15)/2 = 10$ cm. Ao se dobrar da outra forma, o novo perímetro será $2 \times (15 + 5) = 40$ cm (alternativamente, a redução do perímetro na outra forma é 10 cm; logo, ele passa a ser igual a 40 cm).

QUESTÃO 4 – ALTERNATIVA D

Solução: A moto inicialmente tem a velocidade $V_1 = 1$ km/60 s. Queremos a sua velocidade seja $V_2 = 1$ km/40s. Logo,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{60}} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$$

Ou seja, $V_2 = 1,5 V_1$. Portanto, a velocidade deve ser aumentada em 50% em relação à velocidade original.

QUESTÃO 5 – ALTERNATIVA D

Solução: Nos quadrados em que no final aparece um adesivo pequeno, não há adesivos médios. Nos quadrados em que aparece um adesivo médio, há no máximo 4 adesivos médios. Nos quadrados em que aparece um adesivo grande, há no máximo 3 adesivos médios. Logo, o número máximo de adesivos médios é $3 \times 4 + 3 \times 3 = 21$.

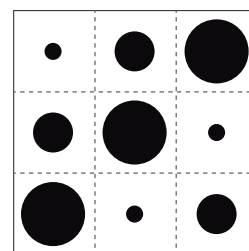
Outra solução: Darlene colou 36 adesivos no papel transparente, um adesivo em cada um dos 36 quadradinhos do quadriculado 6×6 , bem no centro do quadradinho.

Na primeira dobra, metade dos 36 quadradinhos se sobrepõem e o resultado é um quadriculado com 18 quadradinhos.

Cada quadradinho terá 2 adesivos sobrepostos.

Na segunda dobra, metade dos 18 quadradinhos se sobrepõem e o resultado é um quadriculado com 9 quadradinhos. Cada quadradinho terá 4 adesivos sobrepostos.

Na figura vemos o resultado após a segunda dobra, com os 9 quadradinhos e 4 adesivos sobrepostos em cada quadradinho. Sobrepostos a cada adesivo de tamanho pequeno estão, com certeza, outros três adesivos de tamanho pequeno. Logo o menor número de adesivos de tamanho pequeno que Darlene pode ter colado é $3 \times 4 = 12$. Já o menor número de adesivos de tamanho grande que Darlene pode ter colado é 3.



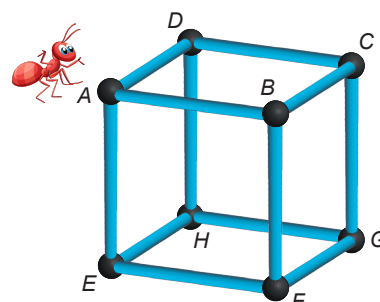
Assim, o maior número de adesivos de tamanho médio que Darlene pode ter colado é $36 - 12 - 3 = 21$.

QUESTÃO 6 – ALTERNATIVA C

Solução: Partindo do vértice A , ao final da primeira aresta percorrida, a formiguinha pode atingir os vértices B , D ou E . A partir de um desses vértices, a formiguinha vai percorrer a segunda aresta.

Partindo de B , ela pode atingir os vértices A , C ou F ; partindo de D , pode atingir os vértices A , C ou H ; partindo de E , pode atingir os vértices A , F ou H .

Assim, ao final da segunda aresta percorrida, a formiguinha pode estar em um dos vértices A , C , F ou H . A partir desses vértices, vai percorrer a terceira aresta.



Partindo de A , ao final da terceira aresta percorrida, pode atingir B , D ou E ; partindo de C , pode atingir os vértices B , D ou G ; partindo de F , pode atingir os vértices B , E ou G e partindo de H , pode atingir os vértices D , E ou G .

Assim, após percorrer 3 arestas consecutivas, a formiguinha pode estar em somente um dos 4 seguintes vértices: B , D , E ou G .

Outra solução:

Olhando para cada face do cubo, vemos que para ir de um vértice aos dois vértices adjacentes basta caminhar uma aresta e para chegar ao vértice oposto ou voltar ao vértice original, é preciso caminhar duas arestas. Daí é possível concluir que, para sair de A e voltar para A , ou chegar a C ou F ou H , a formiguinha deve andar um número par de arestas consecutivas e, para chegar aos outros vértices, a saber, B , D , E ou G , deve andar um número ímpar de arestas consecutivas. Com três movimentos ela consegue chegar aos vértices B , D , E ou G .

QUESTÃO 7 – ALTERNATIVA A

Solução: Além do zero, Emiliano pode formar números com 1, 2, 3 ou 4 algarismos:

Com 1 algarismo, há dois números (2 ou 5).

Com 2 algarismos, o primeiro pode ser 2 ou 5 e o segundo pode ser 0, 2 ou 5. Temos, portanto, $2 \times 3 = 6$ números.

Com 3 algarismos, o primeiro pode ser 2 ou 5 e os demais podem ser 0, 2 ou 5. Temos, portanto, $2 \times 3 \times 3 = 18$ números.

Com 4 algarismos, o primeiro algarismo tem que ser 2 e o segundo 0. Os números que Emiliano escreveu são 2000, 2002, 2005, 2020, 2022 e 2025 (6 números).

Portanto, além do zero, ele escreveu $2 + 6 + 18 + 6 = 32$ números. No total, listou 33 números.

0, 2, 5, 20, 22, 25, 50, 52, 55, 200, 202, 205, 220, 222, 225, 250, 252, 255, 500, 502, 505, 520, 522, 525, 550, 552, 555, 2000, 2002, 2005, 2020, 2022, 2025.

QUESTÃO 8 – ALTERNATIVA E

Solução: Observe que a casa do centro do tabuleiro pertence aos quatro subtabuleiros. Qualquer operação feita com um dos números de um subtabuleiro obrigatoriamente é também realizada com o número que está na casa central.

Desta forma, observando a presença do 3 no subtabuleiro de cima e à direita e do 15 no subtabuleiro de cima e da esquerda, concluímos que na casa do meio deve aparecer um múltiplo de $3 \times 15 = 45$.

Na verdade, olhando o subtabuleiro inferior direito, concluímos também que x deve ser fator de 2025, mais precisamente que $2025 = 3 \cdot 15 \cdot x$, pois o subtabuleiro inferior direito é o único que pode alterar o valor da casa central de 45 para 2025;

Logo, o valor de x é $2025 : 45 = 45$.

QUESTÃO 9 – ALTERNATIVA A

Solução: Os números AB , BA e BB correspondem a $10A + B$, $10B + A$ e $10B + B$.

Como $AB - BB = 10$, então $10A + B - 10B - B = 10$, ou seja, $A = B + 1$ (A é o sucessor de B). Além disso, $AB + BA = 121$, o que nos leva a concluir que $A = 6$ e $B = 5$.

Outra Solução: Os números AB , BA e BB correspondem a $10A + B$, $10B + A$ e $10B + B$.

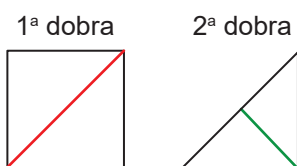
Como $AB + BA = 121$, então $10A + B + 10B + A = 121$, ou seja, $A + B = 11$.

Como $AB - BB = 10$, então $10A + B - 10B - B = 10$, ou seja, $A - B = 1$.

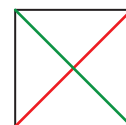
A solução das duas equações é $A = 6$ e $B = 5$.

QUESTÃO 10 – ALTERNATIVA A

Solução: Para visualizar as marcas que as dobras vão fazer na folha, é possível estender cada marca de dobra num esboço da folha original. Para isso, é importante procurar, a cada etapa no esboço da folha original, uma figura igual à do pedaço de papel dobrado naquela etapa. Por exemplo, observe abaixo que é possível visualizar, no esboço da folha original, dois triângulos iguais àqueles após a primeira dobra.



Portanto, para verificar as marcas da segunda dobra no papel, basta desenhá-las em cada triângulo encontrado, como mostrado ao lado.



Observe abaixo as marcas de cada uma das outras dobras na folha original:

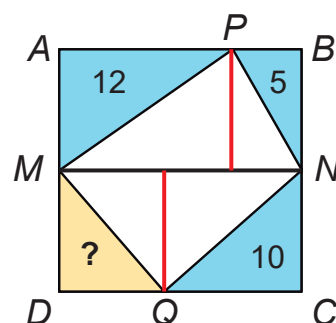


QUESTÃO 11 – ALTERNATIVA A

Solução: Seja P o vértice comum aos três triângulos superiores e Q o vértice comum aos três triângulos inferiores, como na figura. Traçando as alturas relativas à base comum MN dos triângulos PMN e QNM , vemos que essas alturas são paralelas aos lados AD e BC do retângulo. Como M e N são pontos médios desses lados, a base MN é paralela aos lados AB e CD , logo aquelas alturas têm a mesma medida.

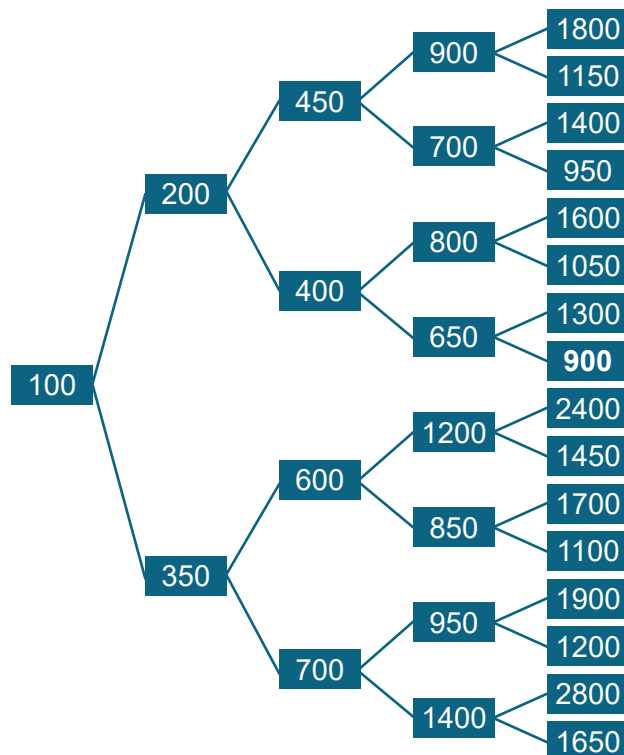
Portanto, as áreas dos triângulos PMN e QNM são iguais. Como também são iguais as áreas dos retângulos $AMNB$ e $CNMD$, concluímos que as áreas das regiões restantes em cada um desses retângulos também são iguais, isto é,

$12 + 5 = ? + 10$, isto é, $? = 12 + 5 - 10 = 7$.



QUESTÃO 12 – ALTERNATIVA D

Solução: Vamos considerar todas as situações que podem ocorrer em 4 meses:



Assim, o valor máximo alcançado seria 2800 e o mínimo 900, resultando em uma diferença de 1900 reais.

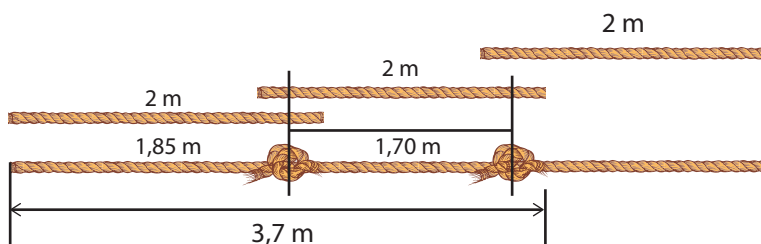
Uma outra maneira de encontrar essa diferença está descrita no esquema a seguir: na linha de cima temos uma sequência dos valores quando Michel toma a pior decisão e, na linha de baixo, temos a sequência dos valores quando Michel toma a melhor decisão. Ao final, a diferença é $2800 - 900 = 1900$ reais.



QUESTÃO 13 – ALTERNATIVA B

Solução: Vamos supor que, para fazer o nó, foram usados pedaços de mesmo comprimento nas extremidades das cordas. Feito o nó, uma vez que a figura nos indica que o comprimento das cordas atadas é 3,70 m, restaram 1,85 m de corda de cada lado do nó.

Portanto, para cada nó foram utilizados 0,15 cm de cada uma das cordas.



Para fazer o nó entre o segundo e o terceiro pedaço de corda será usado o pedaço final de 0,15 cm da segunda corda e o pedaço de mesmo comprimento no início da terceira corda. Dessa forma, o comprimento de corda entre dois nós sucessivos será de $1,85 - 0,15 = 1,70$ m.

Se atarmos cordas de forma a ter n intervalos entre nós sucessivos, podemos escrever a expressão para o comprimento total da corda:

$$1,85 + n \cdot 1,70 + 1,85 = 3,70 + n \cdot 1,70.$$

Observamos que se $n = 10$, o comprimento total da corda será $3,70 + 17,00 = 20,70$.

Portanto, para termos uma corda com 20 m, devemos cortar 0,70 m no final da última corda amarrada.

QUESTÃO 14 – ALTERNATIVA A

Solução: Podemos analisar a ação de cada ponteiro independentemente e “concatenar” os resultados das mudanças de cores, pois a cor de um número muda cada vez que um ponteiro, não importa qual, aponta para a hora que o relógio representa.

Às 3h30min o ponteiro das horas terá apontado para os números 1, 2 e 3, alterando suas cores. Esses são os únicos números alterados pelo movimento do ponteiro das horas.

O ponteiro dos minutos terá dado três voltas e meia, portanto terá alterado os números 1 a 6, quatro vezes e os números de 7 a 12, três vezes.

Assim, a cor dos números de 1 a 3 terá sido alterada $1 + 4 = 5$ vezes (uma vez pelo ponteiro das horas e quatro vezes pelo ponteiro dos minutos), os números de 4 a 6, quatro vezes (apenas pelo ponteiro dos minutos), e os números de 7 a 12, três vezes (apenas pelo ponteiro dos minutos).

Se o número de alterações é par, ele fica preto, se é ímpar, ele fica branco. Então, os números 4, 5 e 6 ficam pretos e os restantes ficam brancos.

QUESTÃO 15 – ALTERNATIVA E

Solução: Dado um número de três algarismos ABC, podemos escolher o valor B a partir de A realizando uma dentre três operações no valor de A: $+1$, $+0$, -1 . O mesmo argumento se aplica para escolher o valor de C a partir de B. Apenas temos que tomar o cuidado para que essas escolhas de operações produzam algarismos no conjunto: $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Se A é qualquer algarismo de 2 a 8, pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, qualquer uma das $3 \cdot 3 = 9$ escolhas para os algarismos B e C são admissíveis, exceto a escolha $+1 +1$ quando $A = 8$. Portanto, começando com um algarismo de 2 a 8, temos $7 \cdot 9 - 1 = 62$ números balanceados. Falta contarmos os números que começam com 1 ou 9, mas isso pode ser feito por listagem:

100, 101, 110, 111, 112, 123, 122, 121, 999, 998, 989, 988 e 987

Portanto, existem $62 + 13 = 75$ números balanceados.

Uma listagem organizada também soluciona o problema:

100, 101, 110, 111, 112, 123, 122, 121

210, 211, 212, 221, 222, 223, 232, 233, 234

321, 322, 323, 332, 333, 334, 343, 344, 345

432, 433, 434, 443, 444, 445, 454, 455, 456

543, 544, 545, 554, 555, 556, 565, 566, 567

654, 655, 656, 665, 666, 667, 676, 677, 678

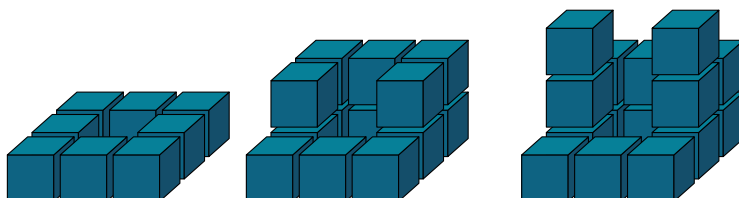
765, 766, 767, 776, 777, 778, 787, 788, 789

876, 877, 878, 887, 888, 889, 898, 899

987, 988, 989, 998, 999

QUESTÃO 16 – ALTERNATIVA D

Solução: Como os cubos estão empilhados uns sobre os outros, a primeira figura mostra que existem ao menos 8 cubos, todos eles em contato com o chão. Analisando a segunda figura, vemos que podem ser colocados mais 5 cubos na camada intermediária e mais 2 cubos na camada superior. No total, temos ao máximo $8 + 5 + 2 = 15$ cubos. A figura a seguir mostra como essa situação com máxima utilização de cubinhos pode ser obtida.



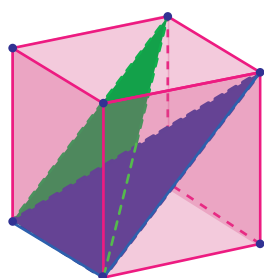
QUESTÃO 17 – ALTERNATIVA A

Solução: Podemos organizar a contagem começando pelas possibilidades de triângulos que têm como um dos lados uma aresta do cubo (Figura 1).

Para cada aresta, temos os 2 triângulos destacados na Figura 1, cujos lados são a aresta escolhida, a diagonal de uma face e uma das diagonais do cubo; os demais triângulos determinados por essa aresta e um vértice do cubo distinto dessas duas possibilidades estão contidos em uma face do cubo, assim como os triângulos determinados por duas arestas consecutivas. Como são 12 arestas, teremos 24 triângulos todos distintos determinados por uma aresta e um vértice, como exemplificado na Figura 1.

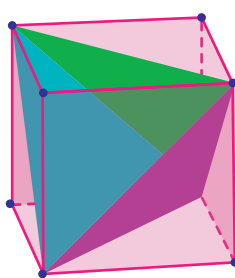
Tomando a diagonal de uma face como lado de um triângulo (Figura 2A), os dois vértices da face oposta extremos da diagonal dessa face não paralela à diagonal escolhida determinam quatro triângulos diferentes dos anteriores, cujos três lados são diagonais de faces do cubo; a outra diagonal da mesma face determina, da mesma forma, cada par quatro triângulos diferentes dos anteriores (Figuras 2B). Portanto, temos ao todo, 8 triângulos equiláteros determinados pelas diagonais das faces do cubo.

Figura 1



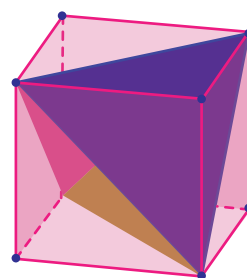
24 triângulos - aresta do cubo como um dos lados

Figura 2A



8 triângulos - diagonais das faces como lados

Figura 2B



Os triângulos que têm por lado uma diagonal do cubo estão contemplados na primeira contagem.

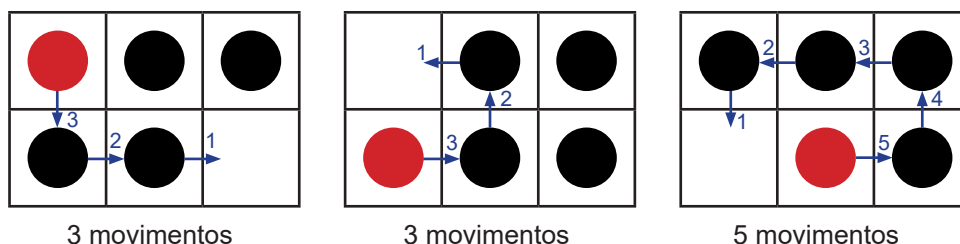
Conclusão: o número de triângulos determinados por vértices do cubo, não contidos nas suas faces são $24 + 8 = 32$.

Outra solução: O cubo tem 8 vértices. Podemos escolher três deles de $\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$ maneiras. Porém, algumas dessas maneiras formam triângulos que estão contidos em uma face do cubo. Cada face possui 4 triângulos. Como são 6 faces, temos $4 \times 6 = 24$ triângulos desse tipo. Portanto, o número total de triângulos não contidos nas faces é $56 - 24 = 32$.

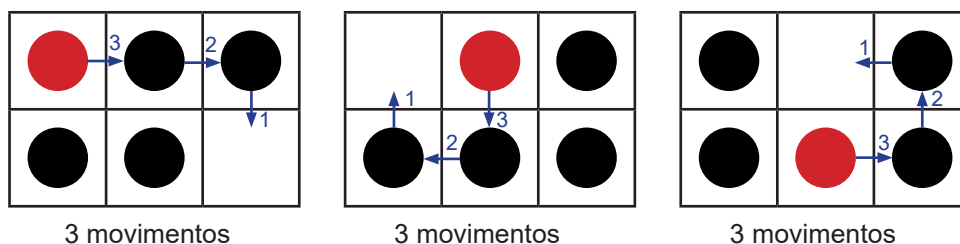
QUESTÃO 18 – ALTERNATIVA B

Solução: Para levar a peça vermelha na casa inicialmente vazia será preciso movimentá-la pelo menos três vezes: uma vez para baixo e duas vezes para a direita.

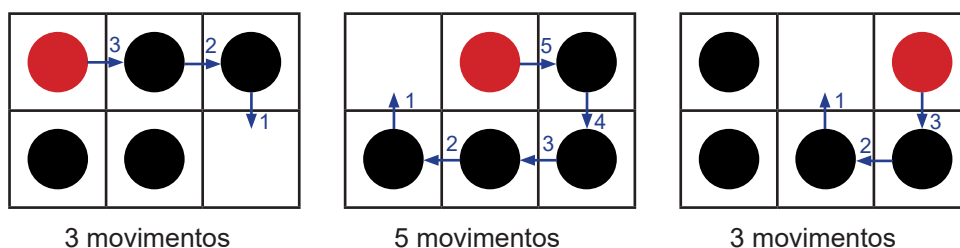
Se o movimento para baixo da peça vermelha for seu primeiro movimento, então serão necessários, no mínimo, $11 = 3 + 3 + 5$ movimentos, como descrito abaixo:



Se o movimento para baixo da peça vermelha for seu segundo movimento, então serão necessários, no mínimo, $9 = 3 + 3 + 3$ movimentos, como descrito abaixo:



Se o movimento para baixo da peça vermelha for seu terceiro movimento, então serão necessários, no mínimo, $11 = 3 + 5 + 3$ movimentos, como descrito abaixo:



Logo, o menor número de movimentos necessários para levar a peça vermelha na casa inicialmente vazia ocorre quando ela desce pela coluna do meio, sendo necessários 9 movimentos.

QUESTÃO 19 – ALTERNATIVA D

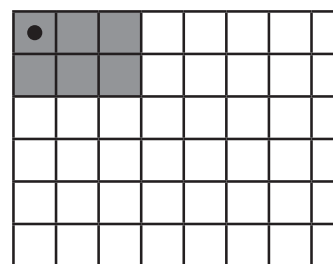
Solução: Vamos indicar uma pessoa que ganhou o prêmio por S e uma que não ganhou por N. Se a pessoa que ganhou o prêmio estivesse na terceira posição, teríamos a seguinte configuração na fila: _NSN_ (aqui os traços representam espaços que são ocupados por alguma pessoa). Perceba que as duas pessoas com as letras N estariam falando a verdade independentemente da frase proferida e isso não seria possível pela informação do enunciado. O mesmo absurdo aconteceria se a pessoa que ganhou o prêmio estivesse na segunda ou quarta posição. Portanto, a pessoa que ganhou o prêmio só pode estar nos extremos da fila. Além disso, como só há um prêmio, se três pessoas falarem que não ganharam o prêmio, pelo menos duas delas estarão falando a verdade e isso também é impossível pelo enunciado.

Um exemplo de distribuição do prêmio seria: NNNNS e todas poderiam dizer: “A pessoa que ganhou o prêmio está ao meu lado”. Apenas a quarta pessoa estaria falando a verdade.

QUESTÃO 20 – ALTERNATIVA A

Solução: Chamemos uma peça de “deitada” se ela está em duas linhas e três colunas, e “em pé” se ela está em três linhas e duas colunas.

Contemos de quantas maneiras podemos colocar uma peça deitada 2×3 em um tabuleiro $6 \times k$. Para isso basta saber onde será colocado o quadradinho superior esquerdo dessa peça. São $5 \times (k - 2)$ possibilidades.



Para uma peça em pé podemos aplicar a mesma estratégia, e temos $4 \times (k - 1)$ possibilidades.

O total de possibilidades é, portanto, $5k - 10 + 4k - 4 = 9k - 14$. Sabemos que esse total é 76; logo, $9k = 90$, e $k = 10$.

