

Solução da prova da 1ª Fase

QUESTÃO 1 – ALTERNATIVA A

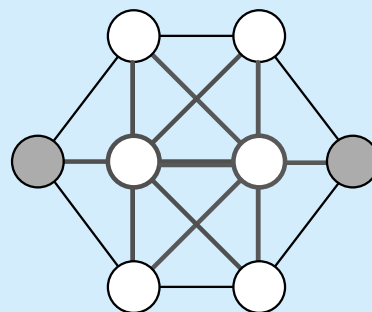
Solução: Como $AAA = 100A + 10A + A = 111A = 3 \times 37 \times A$, temos que $AB \times C = 3 \times 37 \times A$. Como 37 é primo e maior que 9, ele não pode dividir C; logo, 37 divide AB. Assim $AB = 37$ ou 74.

Se $AB = 37$, $C = 9$ resolve a conta, com $A = 3$, $B = 7$ e $C = 9$.

Se $AB = 74$, ou seja, $A = 7$, então não há solução inteira para $74 \times C = 111 \times 7 = 777$. Assim, a única possibilidade é $A = 3$, $B = 7$ e $C = 9$, e $A + B + C = 19$.

QUESTÃO 2 – ALTERNATIVA A

Solução: Na figura ao lado, cada um dos círculos centrais se conecta a outros 6 círculos, como destacado em verde e em vermelho. Isso significa que há apenas um outro círculo da figura ao qual cada círculo central não se conecta. Os números 2, 3, 4, 5, 6, e 7 podem ser conectados a dois outros. Logo, nos círculos centrais devem ser colocados o 1 e o 8.

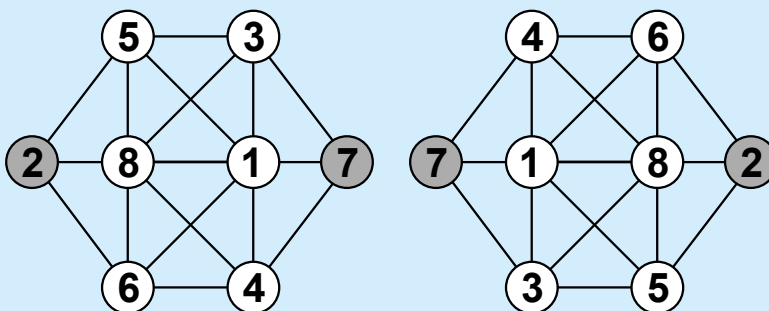


Caso o 1 seja colocado no círculo central mais à esquerda, o 2 deve ser colocado longe dele, no círculo cinza da direita. Simetricamente, caso o 1 seja colocado no círculo central mais à direita, o 2 deve ser colocado no círculo cinza da esquerda.

Caso o 8 seja colocado no círculo central mais à esquerda, o 7 deve ser colocado longe dele, no círculo cinza da direita. Simetricamente, caso o 8 seja colocado no círculo central mais à direita, o 7 deve ser colocado no círculo cinza da esquerda.

Portanto, Marcela deve colocar os números 2 e 7 nos círculos cinza.

Alguns preenchimentos possíveis:



Outra solução: Um número que apareça em um dos círculos centrais não pode ter antecessor e sucessor pois, nesse caso, sobriam apenas cinco números para preencher os seis círculos a ele conectados; dessa maneira, os números que aparecem nos círculos centrais são 1 e 8. Se o 1 aparece no círculo central à direita, o 2 só pode aparecer no círculo na extremidade esquerda; nesse caso, o 8 está no círculo central à esquerda e, pelo mesmo argumento, o 7 deve aparecer no círculo da extremidade direita. O mesmo raciocínio se aplica se o 1 aparece no círculo central à esquerda.

QUESTÃO 3 – ALTERNATIVA D

Solução: Nos quadrados em que no final aparece um adesivo pequeno, não há adesivos médios. Nos quadrados em que aparece um adesivo médio, há no máximo 4 adesivos médios. Nos quadrados em que aparece um adesivo grande, há no máximo 3 adesivos médios. Logo, o número máximo de adesivos médios é $3 \times 4 + 3 \times 3 = 21$.

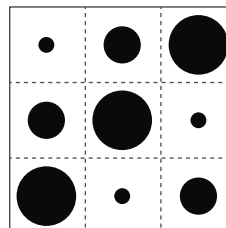
Outra solução: Darlene colou 36 adesivos no papel transparente, um adesivo em cada um dos 36 quadradinhos do quadriculado 6×6 , bem no centro do quadradinho.

Na primeira dobra, metade dos 36 quadradinhos se sobrepõem e o resultado é um quadriculado com 18 quadradinhos.

Cada quadradinho terá 2 adesivos sobrepostos.

Na segunda dobra, metade dos 18 quadradinhos se sobrepõem e o resultado é um quadriculado com 9 quadradinhos. Cada quadradinho terá 4 adesivos sobrepostos.

Na figura vemos o resultado após a segunda dobra, com os 9 quadradinhos e 4 adesivos sobrepostos em cada quadradinho. Sobrepostos a cada adesivo de tamanho pequeno estão, com certeza, outros três adesivos de tamanho pequeno. Logo o menor número de adesivos de tamanho pequeno que Darlene pode ter colado é $3 \times 4 = 12$. Já o menor número de adesivos de tamanho grande que Darlene pode ter colado é 3.



Assim, o maior número de adesivos de tamanho médio que Darlene pode ter colado é $36 - 12 - 3 = 21$.

QUESTÃO 4 – ALTERNATIVA B

Solução: Pelo enunciado,

$$\frac{2026 - k}{2025 - k} = \frac{2025}{2026}$$

$$2026(2026 - k) = 2025(2025 - k)$$

$$k = 2026^2 - 2025^2 = (2026 - 2025)(2026 + 2025)$$

$$k = 4051$$

A soma dos algarismos de k é $4 + 0 + 5 + 1 = 10$

QUESTÃO 5 – ALTERNATIVA A

Solução: Se retirarmos x litros do tanque, nele restarão com $\frac{18}{100} (21 - x)$ litros de álcool puro. Por outro lado, ao acrescentar x litros da mistura a 90% colocaremos $\frac{90}{100} x$ litros de álcool no tanque. Como 21 litros de uma mistura a 42% contém $\frac{42}{100} \cdot 21$ litros de álcool, devemos ter $\frac{18}{100} (21 - x) + \frac{90}{100} x = \frac{42}{100} \cdot 21$; essa equação se reduz a $72x = 24 \cdot 21$, cuja solução é $x = 7$.

QUESTÃO 6 – ALTERNATIVA A

Solução: Podemos analisar a ação de cada ponteiro independentemente e “concatenar” os resultados das mudanças de cores, pois a cor de um número muda cada vez que um ponteiro, não importa qual, aponta para a hora que o relógio representa.

Às 3h30min o ponteiro das horas terá apontado para os números 1, 2 e 3, alterando suas cores. Esses são os únicos números alterados pelo movimento do ponteiro das horas.

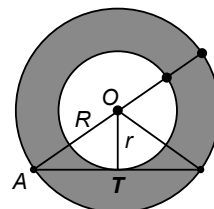
O ponteiro dos minutos terá dado três voltas e meia, portanto terá alterado os números 1 a 6, quatro vezes e os números de 7 a 12, três vezes.

Assim, a cor dos números de 1 a 3 terá sido alterada $1 + 4 = 5$ vezes (uma vez pelo ponteiro das horas e quatro vezes pelo ponteiro dos minutos), os números de 4 a 6, quatro vezes (apenas pelo ponteiro dos minutos), e os números de 7 a 12, três vezes (apenas pelo ponteiro dos minutos).

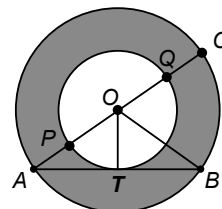
Se o número de alterações é par, ele fica preto, se é ímpar, ele fica branco. Então, os números 4, 5 e 6 ficam pretos e os restantes ficam brancos.

QUESTÃO 7 – ALTERNATIVA A

Solução: Se $OT = r$ e $OA = R$, a área que queremos é $\pi(R^2 - r^2)$. Basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo ATO : $R^2 = r^2 + (AT/2)^2 = r^2 + 1$, ou seja, $R^2 = r^2 + 1$. A área, portanto, é π .



Outra solução: Vamos indicar os comprimentos dos raios das circunferências concêntricas por X e x , e, por O , o centro comum às duas circunferências. O triângulo OAB é isósceles, pois $AO = OB = X$; sendo T o ponto de tangência e sabendo que o raio OT é perpendicular a AB , conseqüentemente, temos que OT será a mediatriz do triângulo isósceles OAB , e a medida do segmento AT é 1 cm.



Consideremos o diâmetro AC da circunferência externa; esse segmento contém o diâmetro PQ da circunferência interna.

Como AT é um segmento tangente à circunferência interna, temos que: $AT^2 = AQ \cdot AP$ (potência de ponto); sabemos que $AT = 1$, $AP = (X - x)$ e $AQ = 2X - (X - x) = (X + x)$.

Daí, $1 = (X - x)(X + x) = X^2 - x^2$. Portanto, a área da região cinza, dada por

$(X^2 - x^2)\pi$ é igual a π .

QUESTÃO 8 – ALTERNATIVA D

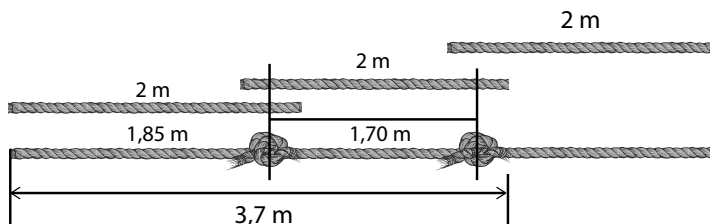
Solução: Como $3 = \frac{6}{2}$ segue que $f(3) = f\left(\frac{6}{2}\right) = 2f(6) = 2 \times 4 = 8$.

A expressão geral de f é: $f(x) = f\left(\frac{6}{\frac{6}{x}}\right) = \frac{6}{x}f(6) = \frac{24}{x}$.

QUESTÃO 9 – ALTERNATIVA B

Solução: Vamos supor que, para fazer o nó, foram usados pedaços de mesmo comprimento nas extremidades das cordas. Feito o nó, uma vez que a figura nos indica que o comprimento das cordas atadas é 3,70 m, restaram 1,85 m de corda de cada lado do nó.

Portanto, para cada nó foram utilizados 0,15 cm de cada uma das cordas.



Para fazer o nó entre o segundo e o terceiro pedaço de corda será usado o pedaço final de 0,15 cm da segunda corda e o pedaço de mesmo comprimento no início da terceira corda. Dessa forma, o comprimento de corda entre dois nós sucessivos será de $1,85 - 0,15 = 1,70$ m.

Se atarmos cordas de forma a ter n intervalos entre nós sucessivos, podemos escrever a expressão para o comprimento total da corda:

$$1,85 + n \cdot 1,70 + 1,85 = 3,70 + n \cdot 1,70.$$

Observamos que se $n = 10$, o comprimento total da corda será $3,70 + 17,00 = 20,70$.

Portanto, para termos uma corda com 20 m, devemos cortar 0,70 m no final da última corda amarrada.

QUESTÃO 10 – ALTERNATIVA C

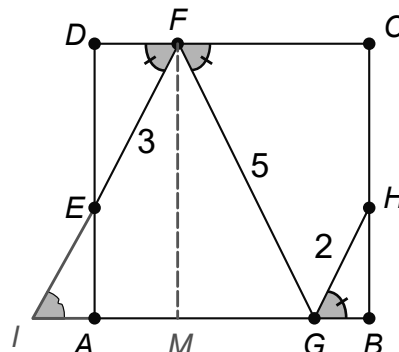
Solução: Prolongamos FE até encontrar a reta AB no ponto I . O triângulo IGF é isósceles, pois o ângulo FIG é congruente ao ângulo DFI , que é congruente ao CFG e este é congruente a FGI (ângulos alternos internos e dados do problema). Logo, $FI = FG = 5$ e $EI = 5 - 3 = 2$.

O triângulo EIA é congruente ao triângulo HGB , pois ambos são triângulos retângulos, os ângulos EIA e HGB são congruentes e $EI = HG = 2$.

Sendo M o ponto médio de IG , concluímos que $FM \perp MG$. Se a medida do lado do quadrado é $FM = a$, temos $IA + AG = AG + GB = a$. Assim, $MG = \frac{a}{2}$.

No triângulo FMG , retângulo em M , temos, pelo Teorema de Pitágoras, .

$$5^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 25 = a^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 100 = 4a^2 + a^2 = 5a^2 \Leftrightarrow a^2 = 20.$$



QUESTÃO 11 – ALTERNATIVA A

Solução: Se temos X pessoas que dizem a verdade e Y pessoas que mentem, então o número de “SIM’s” é $X + 2Y$, pois cada um que diz a verdade diz SIM para uma fruta, enquanto os mentirosos dizem SIM para duas frutas. O total de SIM’s é $140 + 120 + 110 = 370$. Como podemos escrever $X + 2Y = X + Y + Y$ e como $X + Y$ é o número de pessoas da ilha, temos $370 = 250 + Y$ e $Y = 120$.

Outra solução: Cada habitante que diz a verdade vai responder “sim” para uma pergunta (sobre a fruta de que gosta) e “não” para duas perguntas (sobre as frutas de que não gosta).

Por outro lado, cada habitante mentiroso vai responder “sim” para duas perguntas (sobre as frutas de que não gosta) e “não” para uma pergunta (sobre a fruta de que gosta).

Isso significa que haverá um excesso de respostas “sim” para as perguntas quando considerado o número total de habitantes da ilha, pois os mentirosos responderão “sim” o dobro de vezes do que responderiam caso estivessem dizendo a verdade. Esse excesso corresponde justamente ao número de mentirosos.

Há $140 + 120 + 110 = 370$ respostas “sim” para as três perguntas. Portanto, há $370 - 250 = 120$ mentirosos na ilha.

Solução alternativa: caso todos os habitantes da ilha estivessem dizendo a verdade, haveria o dobro de respostas “não” quando comparadas às respostas “sim”, pois cada habitante diria “sim” para a fruta de que gosta e “não” para as duas frutas de que não gosta.

Há $140 + 120 + 110 = 370$ respostas “sim”. Caso todos estivessem dizendo a verdade, haveria $2 \times 370 = 740$ respostas “não”. Por outro lado, há 250 habitantes na ilha, então deveria haver $2 \times 250 = 500$ respostas “não”. Isso significa que há um excesso de $740 - 500 = 240$ respostas “não”. Portanto, há $240 \div 2 = 120$ mentirosos na ilha.

QUESTÃO 12 – ALTERNATIVA B

Solução: Temos

$$(10^{25} + 25)^2 = (10^{25})^2 + 2(10^{25})(25) + (25)^2 = 10^{50} + 50 \cdot 10^{25} + 625$$

Logo

$$(10^{25} + 25)^2 = 10^{50} + 5 \cdot 10^{26} + 625 = 1 \overbrace{000 \dots 0}^{23 \text{ zeros}} 5 \overbrace{000 \dots 0}^{23 \text{ zeros}} 625$$

Portanto, a soma dos algarismos do número $(10^{25} + 25)^2$ é $1 + 5 + 6 + 2 + 5 = 19$.

QUESTÃO 13 – ALTERNATIVA B

Solução: Os dados devem ter faces opostas de cores diferentes. Logo não é possível termos um dado com quatro faces de uma mesma cor pois, neste caso, pelo menos um par de faces opostas teriam a mesma cor.

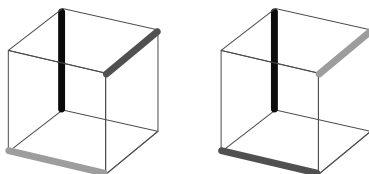
Os dados também devem ter pelo menos uma face preta, uma face vermelha e uma face branca.

Assim, temos as seguintes possibilidades de dados diferentes:

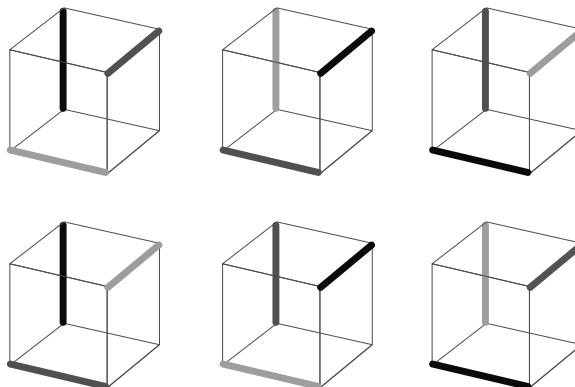
1) Duas faces de uma cor 1, duas faces de uma cor 2 e duas faces de uma cor 3.

2) Três faces de uma cor 1, duas faces de uma cor 2 e uma face de uma cor 3.

Na possibilidade 1) as faces de uma mesma cor devem ter uma aresta comum, senão seriam faces opostas de uma mesma cor. Além disso, essas três arestas não podem ser paralelas. Temos duas situações possíveis para essas três arestas não serem paralelas entre si:

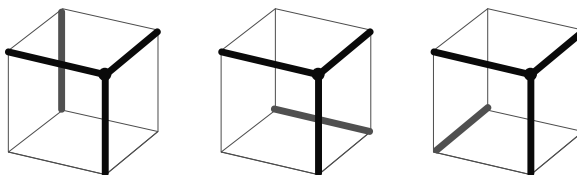


Se girarmos essas situações conforme abaixo, vamos observar que, independentemente da cor, em cada uma delas os dados serão todos iguais.



Logo temos dois dados diferentes no caso de duas faces de uma cor 1, duas faces de uma cor 2 e duas faces de uma cor 3.

Na possibilidade 2) as três faces de uma mesma cor devem ter um vértice em comum, senão seriam faces opostas de uma mesma cor. Além disso, as duas faces de uma mesma cor devem ter uma aresta comum. Se girarmos esse dado conforme mostra a figura abaixo, vamos observar que, escolhidas as cores, eles serão todos iguais.



Logo temos 6 dados diferentes no caso de três faces de uma cor 1, duas faces de uma cor 2 e uma face de uma cor 3, pois temos 3 possibilidades de escolha para a cor 1, duas possibilidades de escolha para a cor 2 e uma possibilidade de escolha para a cor 3, totalizando $3 \times 2 \times 1 = 6$ dados diferentes.

Temos, então, $2 + 6 = 8$ dados diferentes com faces pretas, brancas ou vermelhas em que faces opostas quaisquer tenham cores distintas e as três cores apareçam em cada dado.

QUESTÃO 14 – ALTERNATIVA C

Solução: Igualando as equações, temos: $x^2 + y = y^2 + x$ que pode ser reescrita como

$$(x^2 - y^2) - (x - y) = 0.$$

Usando a diferença de quadrados, temos:

$$(x - y)(x + y) - (x - y) = 0.$$

Fatorando,

$$(x - y)(x + y - 1) = 0.$$

Logo, $x - y = 0$ ou $x + y - 1 = 0$. No primeiro caso, temos que $x = y$. Substituindo na primeira equação do sistema, temos que $x^2 + x = 1$ que tem duas soluções reais, a saber, $(1/2) (-1 + \sqrt{5})$ e $(1/2) (-1 - \sqrt{5})$, cuja soma é -1 (isso poderia ser obtido diretamente pelas relações de Viète-Girard).

No segundo caso, temos que $y = 1 - x$. Substituindo na primeira equação do sistema, temos que $x^2 + 1 - x = 1$. Ou seja, $x^2 - x = 0$ cujas soluções são 0 e 1.

Portanto, a soma de todos os valores x tais que (x, y) é uma solução do sistema é 0.

QUESTÃO 15 – ALTERNATIVA A

Solução: Para o produto ser 60, um dos resultados deve ser 5 e o produto dos outros dois deve ser 12. Para tal, esses dois resultados podem ser 3 e 4 ou 2 e 6. O número total de casos possíveis ao lançar três dados é $6 \times 6 \times 6 = 216$. O número de casos favoráveis corresponde aos dois conjuntos de resultados que fornecem produto igual a 60 (3, 4 e 5 ou 2, 6, 5), em qualquer ordem. Logo, há $6 + 6 = 2 \times 6 = 12$ casos favoráveis.

A probabilidade de se obter produto 60 é, portanto, igual a $\frac{12}{216} = \frac{1}{18}$.

QUESTÃO 16 – ALTERNATIVA B

Solução: Os triângulos equiláteros ABF e CEG têm ângulos internos medindo 60° cada. Dessa forma, os ângulos GCB e GBC medem 30° cada e, conseqüentemente, o triângulo BCG é isósceles.

Assim, a altura do triângulo CEG é igual à metade do lado do quadrado $ABCD$, que, por sua vez, é igual ao lado do triângulo ABF .

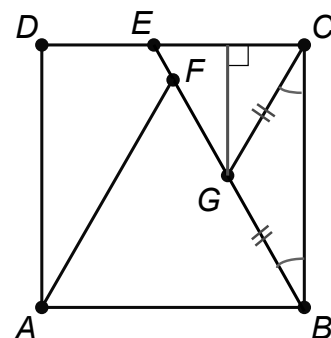
Sejam L o lado do quadrado $ABCD$ e do triângulo ABF e l , o lado do triângulo CEG . A altura do triângulo CEG é igual a $\frac{l}{2}$. Logo, temos a seguinte relação:

$$\frac{l}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow l = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

A partir da relação entre áreas e lados dos triângulos, conseguimos descobrir a área do triângulo CEG (A_{CEG}):

$$\frac{18}{A_{CEG}} = \left(\frac{L}{\frac{L}{\sqrt{3}}} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{18}{A_{CEG}} = 3 \Leftrightarrow A_{CEG} = 6 \text{ cm}^2$$

Portanto, a área do triângulo CEG é igual a 6 cm^2 .



QUESTÃO 17 – ALTERNATIVA D

Solução: Vamos indicar uma pessoa que ganhou o prêmio por S e uma que não ganhou por N. Se a pessoa que ganhou o prêmio estivesse na terceira posição, teríamos a seguinte configuração na fila: _NSN_ (aqui os tracinhos representam espaços que são ocupados por alguma pessoa). Perceba que as duas pessoas com as letras N estariam falando a verdade independentemente da frase proferida e isso não seria possível pela informação do enunciado. O mesmo absurdo aconteceria se a pessoa que ganhou o prêmio estivesse na segunda ou quarta posição. Portanto, a pessoa que ganhou o prêmio só pode estar nos extremos da fila. Além disso, como só há um prêmio, se três pessoas falarem que não ganharam o prêmio, pelo menos duas delas estarão falando a verdade e isso também é impossível pelo enunciado.

Um exemplo de distribuição do prêmio seria: NNNNS e todas poderiam dizer: “A pessoa que ganhou o prêmio está ao meu lado”. Apenas a quarta pessoa estaria falando a verdade.

QUESTÃO 18 – ALTERNATIVA B

Solução: Existem $\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ maneiras de escolhermos três algarismos diferentes de zero. Para cada uma dessas escolhas há duas formas de escrevermos um número ordeiro com os algarismos escolhidos: uma na ordem crescente e outra na ordem decrescente. Portanto, há $84 \times 2 = 168$ números ordeiros. Agora observe que se abc é um número ordeiro crescente (ou decrescente) então $(10 - a)(10 - b)(10 - c)$ também é ordeiro, mas decrescente (respectivamente, crescente). Isso significa que os números ordeiros podem ser separados em 84 duplas cuja soma é 1110. Logo, a soma de todos os números ordeiros é $84 \times 1110 = 93240$.

QUESTÃO 19 – ALTERNATIVA D

Solução: Se sentarmos 6 pessoas em uma mesa e quaisquer duas não se conhecerem, isso significa que as $5 \cdot 6 = 30$ relações de amizades que essas pessoas possuem dentro da família são com as outras $10 - 6 = 4$ pessoas. Entretanto, essas 4 pessoas em conjunto só podem manter no máximo $4 \cdot 5 = 20$ relações de amizade. Como $20 < 30$, isso é um absurdo. Logo, entre quaisquer 6 pessoas de uma família amistosa há duas que se conhecem. Por outro lado, isso não é verdade para 5 pessoas. Um exemplo é considerar dois grupos $\{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1\}$, $\{A_2, B_2, C_2, D_2, E_2\}$ em que cada pessoa do primeiro grupo conhece apenas as pessoas do segundo, mas ninguém do seu próprio grupo. Isso garante que cada pessoa possui apenas 5 conhecidos na família. Note que se sentarmos qualquer um desses dois grupos numa mesa não é verdade que entre dois deles há pessoas que se conhecem. Por isso, o valor mínimo de k é 6.

QUESTÃO 20 – ALTERNATIVA A

Solução: Dado U com subconjuntos A , B e C , podemos perguntar se um elemento pertence ou não a cada um desses subconjuntos. Isso nos dá $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades para cada um deles. Em uma tripla ordenada especial, porém, devemos excluir o caso no qual um elemento pertence a C e não pertence nem a A e nem a B . Assim temos apenas sete possibilidades para cada elemento. Como são cinco elementos em U , pelo princípio multiplicativo o total de triplas ordenadas especiais é 7^5 .