



20ª OBMEP - 2025

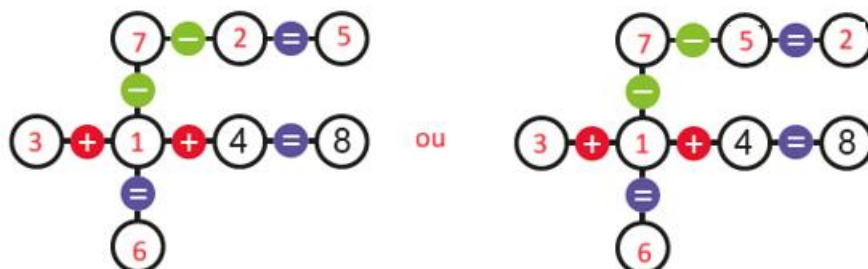
SOLUÇÕES NÍVEL 1

Solução N1Q1

a)



b) Primeiro preenchimento:



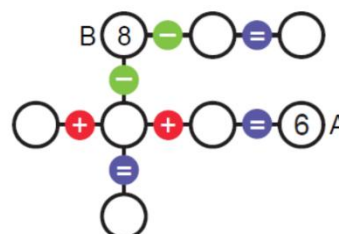
c) Segundo preenchimento:



c) Os 3 círculos vazios da segunda linha deverão ser preenchidos, em alguma ordem, pelos números 1, 2 e 3. Portanto, os números dos círculos vazios da primeira linha serão

escolhidos entre {4, 5, 7, 8}; mas, nesse conjunto, não há 3 elementos tais que a subtração de dois deles resulte no terceiro, diferente das parcelas. Logo, o preenchimento é impossível.

Variação da argumentação da solução: Nos itens a) e b) observa-se que quando o círculo A está preenchido, o maior dos números ainda não utilizado deve ser colocado no círculo B para tornar as subtrações possíveis. Então, no círculo B deve ser colocado o número 8. Na segunda linha devem aparecer os algarismos 1, 2 e 3 em alguma ordem; com isso, restam os números 4, 5 e 7 para serem colocados nos círculos que restam.



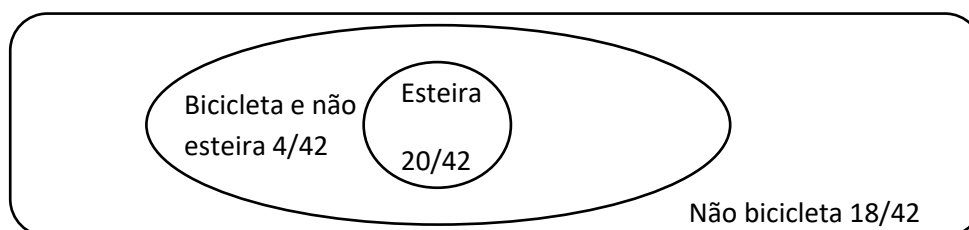
Portanto, as subtrações $8 - 7 = 1$, $8 - 5 = 3$ na primeira linha são inviáveis. Como $8 - 4 = 4$, precisaríamos de dois números 4 para tornar verdadeira a igualdade da primeira linha. Logo, não é possível completar o preenchimento.

Solução N1Q2

- Não utilizam a bicicleta 6 em cada 14, ou seja, $6/14 = 1 - (8/14)$, que equivale a $3/7$. Não utilizam a esteira 22 em cada 42, ou seja, $22/42 = 1 - (20/42)$, que equivale a $11/21$.
- Porque $(8/14) + (20/42) = 44/42 > 1$.

Mais detalhadamente, se T é o número total de atletas, $8T/14$ é o número dos que andam de bicicleta e $20T/42$ é o número dos que andam na esteira. Caso não haja atletas que realizem ambas as atividades, $(8T/14) + (20T/42) \leq T$, ou seja, $44T/42 \leq T$ e, daí, $44 \leq 42$, uma contradição. Logo, há atletas que utilizam bicicleta e também esteira.

- O uso de diagramas de Veen, como os apresentados abaixo, ajuda na argumentação. A cada 42 pessoas, apenas 24 andam de bicicleta e 20 na esteira, ou seja, $24 - 20 = 4$ só usam bicicleta enquanto que $42 - (8/14) \cdot 42 = 18$ não andam de bicicleta; logo, a quantidade de pessoas que não andam de bicicleta é $18/4$ da quantidade de pessoas que só utilizam bicicleta. O enunciado nos informa que 10 atletas utilizam bicicleta, mas não esteira. Logo, a quantidade de pessoas que não andam de bicicleta é $18/4 \times 10 = 45$.



Outra solução (com rudimentos de álgebra)

Sejam T = número total de atletas,

B = atletas que andam de bicicleta,
E = atletas que andam de esteira.

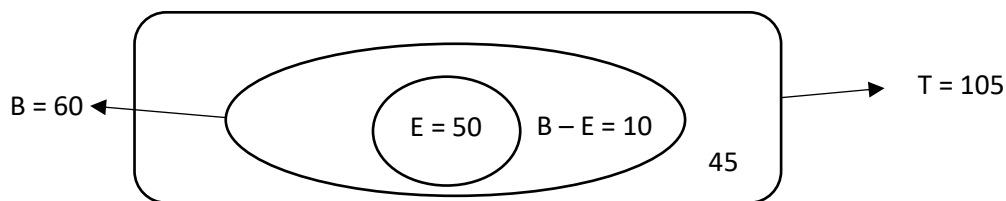
De acordo com o enunciado, $B - E = 10$; logo, $(B - E)/T = (10/T)$, portanto,

$$(B/T) - (E/T) = 10/T$$

$$(8/14) - (20/42) = 10/T$$

$$(2/21) = 10/T; \text{ logo, } T = 105$$

A quantidade dos que andam de bicicleta é $B = (8/14) \cdot 105 = 60$ e a quantidade dos que não andam de bicicleta é $105 - 60 = 45$.



Solução N1Q3

- A figura de Ana é uma estrela, pois ela mentiu apenas sobre a cor. Logo, Ana pode ter feito uma das escolhas: estrela branca ou estrela cinza.
- A figura de Carla não é um círculo, nem tem a cor branca; portanto, ela pode ter escolhido o triângulo cinza ou o triângulo preto ou a estrela cinza ou a estrela preta.

Ana escolheu uma estrela (item a)); logo, Carla obrigatoriamente escolheu um triângulo (item b)), consequentemente a figura da Bia só pode ser um círculo. Ainda não sabemos as cores.

	Forma	Cor
Ana	Estrela	?
Bia	Círculo	?
Carla	Triângulo	?

Como a figura da Bia é cinza (segundo item do enunciado), então ela escolheu o círculo cinza. Logo, o triângulo da Carla não pode ser cinza; assim, Carla escolheu o triângulo preto e como a estrela da Ana não é cinza, então só pode ser branca.

	Forma	Cor
Ana	Estrela	Branca
Bia	Círculo	Cinza
Carla	Triângulo	Preta



Ana



Bia



Carla

Outra solução:

Na tabela abaixo, com todos os formatos e cores das figuras, estão indicados os nomes das possíveis donas de algumas figuras.

Formato/Cor	Preto	Cinza	Branco
Triângulo	Carla	Carla	
Círculo		Bia	
Estrela	Carla	Ana/Bia/Carla	Ana

Para que Ana, Bia e Carla tenham figuras de cores e formatos diferentes, cada linha e cada coluna da tabela deve apresentar exatamente um nome correto para a dona de alguma figura.

Formato/Cor	Preto	Cinza	Branco
Triângulo	Carla	Carla	
Círculo		Bia	
Estrela	Carla	Ana/Bia/Carla	Ana

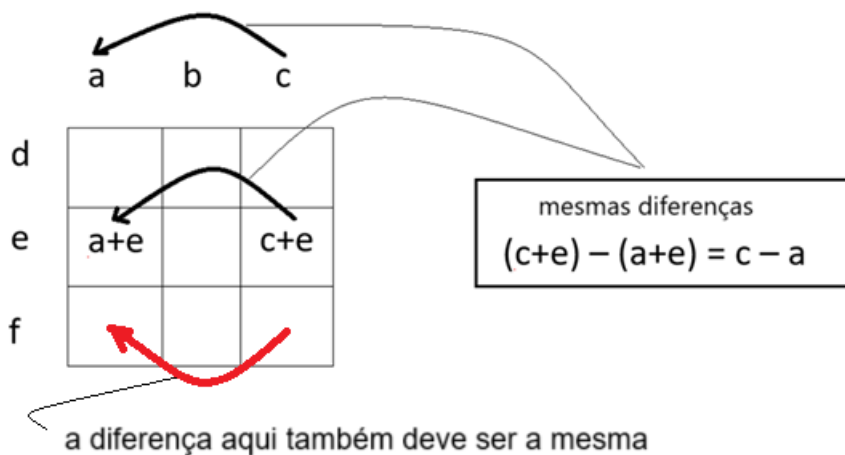
Portanto, Ana tem a estrela branca, Bia tem o círculo cinza e Carla tem o triângulo preto.

Solução N1Q4

- a) Cada quadradinho do tabuleiro deve ser preenchido com a soma do valor de sua linha com o valor de sua coluna.

	5	10	21
9	14	19	30
15	20	25	36
19	24	29	40

- b) Observe que para um tabuleiro preenchido corretamente, os valores que aparecem em uma linha qualquer têm, dois a dois, a mesma diferença entre si que os valores externos associados às colunas correspondentes. Observe:



A mesma observação pode ser feita quando observamos os valores que aparecem em uma coluna.

Agora vamos preencher o tabuleiro do item b).

Olhe para a terceira linha e compare-a com a primeira: de 20 para 27 houve um aumento de 7, logo, como observado acima, na primeira linha e segunda coluna teremos o $12 + 7 = 19$.

Olhe para a terceira coluna e compare-a com a segunda: de 4 para 14 temos um aumento de 10, logo teremos a segunda linha com $22 = 12 + 10$, $29 = 19 + 10$ e 14.

Por fim, compare a segunda com a terceira linha; na segunda linha e nas últimas colunas, passamos de 29 para 14, temos uma diminuição de 15; assim, na terceira linha também devemos, a partir do 27 diminuir 15 para obtermos o valor que ainda falta, que é $27 - 15 = 12$.

12	19	4
		14
20	27	
12	19	4
22	29	14
20	27	
12	19	4
22	29	14
20	27	12

Outra solução (usando rudimentos de álgebra).

Vamos iniciar calculando o valor de x indicado abaixo.

	a	b	c
d	12	x	4
e	y	z	14
f	20	27	w

$$\begin{aligned}
 a + d &= 12 \\
 a + f &= 20 \\
 b + f &= 27 \\
 b + d &= x
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 (a + d) + (b + f) &= 12 + 27 = 39 \\
 a + (d + b) + f &= a + x + f = x + (a + f) = x + 20
 \end{aligned}$$

Logo, $x + 20 = 39$ e $x = 19$

O mesmo método serve para determinar y , z e w .

- c) A soma de todos os valores colocados nos 9 quadradinhos será o triplo da soma dos valores das linhas e colunas, pois cada um dos números externos participará de 3 somas como podemos observar, por exemplo, no tabuleiro preenchido no item (a).

	5	10	21
9	9+5	9+10	9+21
15	15+5	15+10	15+21
19	19+5	19+10	19+21

Note que cada número externo aparece 3 vezes nas somas internas. Mais ainda, somando os valores dos quadradinhos da diagonal principal teremos exatamente a soma dos valores externos.

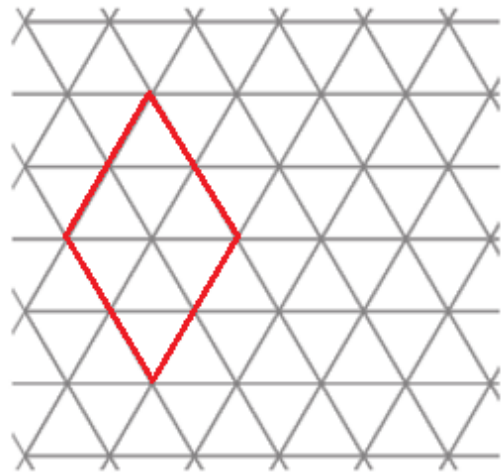
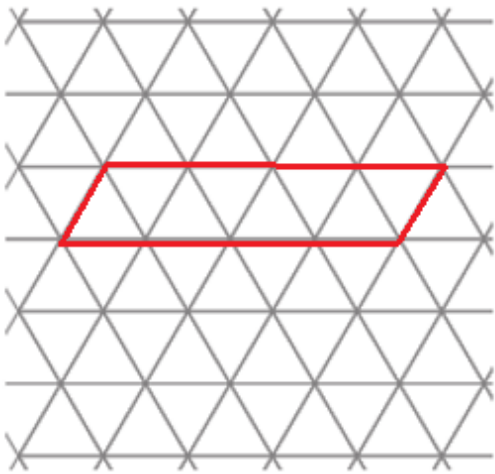
Nomeamos os valores externos de acordo com a ilustração ao lado.

Vamos agora descobrir o número escrito na casa cinza do tabuleiro ao lado, sabendo que a soma dos nove números que serão escritos nele deve ser 150. Observe que o número escrito na casa cinza é $a + d$. Como vimos acima, a soma dos números nos 9 quadrados do tabuleiro é $3 \times (a + b + c + d + e + f) = 150$, ou seja $(a + d) + (b + e) + (c + f) = 50$. Portanto, $(a + d) + 18 + 23 = 50$, ou seja, $a + d = 9$.

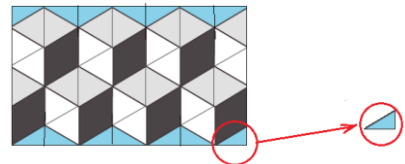
	a	b	c
d			
e		18	
f			23

Solução N1Q5

a) Basta desenhar dois paralelogramos, tais como os da figura abaixo:



b) O retângulo original azul pode ser decomposto em 14 triângulos equiláteros pretos, 14 triângulos equiláteros da cor cinza, 14 triângulos equiláteros brancos (cada um deles de área 1), mais 14 metades de triângulos equiláteros azuis (cada uma deles de área $\frac{1}{2}$). Logo, a área do triângulo azul original é $14 + 14 + 14 + 14 \times (1/2) = 49 \text{ cm}^2$.



c)

Ao ser colocado no tabuleiro triangular ao lado, cada losango cobre um pequeno triângulo com o logo da OBMEP e um em branco.

Como há 6 triângulos com o logo da OBMEP e 10 brancos, só será possível usar, no máximo, 6 losangos.

Podemos efetivamente usar 6 losangos, como mostrado a seguir:



Solução N1Q6

- (a) Observe que cada vez que descemos uma casa, o número escrito aumenta 20. Toda vez que vamos uma casa para esquerda, o número escrito diminui em 1. Portanto, $x = 17 + 20 + 20 - 1 - 1 = 55$.
- (b) Temos que $z = y + 20 + 1 = y + 21$ e que $w = y + 20 + 20 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = y + 35$. Se d é divisor de y , $y + 21$ e $y + 35$, então d é divisor de 21 e de 35. Como $\text{mdc}(21, 35) = 7$, d é divisor de 7. Sabendo que d é maior do que 1, concluímos que $d = 7$.
- (c) Como y está na primeira linha, os únicos múltiplos de 7 que estão entre 1 e 20 são: 7 e 14.

Note que temos os seguintes valores para as triplas de letras $(y, z, w) = (7, 28, 42)$ ou $(y, z, w) = (14, 35, 49)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60