



20ª OBMEP - 2025

SOLUÇÕES NÍVEL 2

Solução N2Q1

- a) A figura de Ana é uma estrela, pois ela mentiu apenas sobre a cor. Logo, Ana pode ter feito uma das escolhas: estrela branca ou estrela cinza.
- b) A figura de Carla não é um círculo, nem tem a cor branca; portanto, ela pode ter escolhido o triângulo cinza ou o triângulo preto ou a estrela cinza ou a estrela preta.

Ana escolheu uma estrela (item a)); logo, Carla obrigatoriamente escolheu um triângulo (item b)), consequentemente a figura da Bia só pode ser um círculo. Ainda não sabemos as cores.

	Forma	Cor
Ana	Estrela	?
Bia	Círculo	?
Carla	Triângulo	?

Como a figura da Bia é cinza (segundo item do enunciado), então ela escolheu o círculo cinza. Logo, o triângulo da Carla não pode ser cinza; assim, Carla escolheu o triângulo preto e como a estrela da Ana não é cinza, então só pode ser branca.

	Forma	Cor
Ana	Estrela	Branca
Bia	Círculo	Cinza
Carla	Triângulo	Preta



Ana



Bia



Carla

Outra solução:

Na tabela abaixo, com todos os formatos e cores das figuras, estão indicados os nomes das possíveis donas de algumas figuras.

Formato/Cor	Preto	Cinza	Branco
Triângulo	Carla	Carla	
Círculo		Bia	
Estrela	Carla	Ana/Bia/Carla	Ana

Para que Ana, Bia e Carla tenham figuras de cores e formatos diferentes, cada linha e cada coluna da tabela deve apresentar exatamente um nome correto para a dona de alguma figura.

Formato/Cor	Preto	Cinza	Branco
Triângulo	Carla	Carla	
Círculo		Bia	
Estrela	Carla	Ana/Bia/Carla	Ana

Portanto, Ana tem a estrela branca, Bia tem o círculo cinza e Carla tem o triângulo preto.

Solução N2Q2

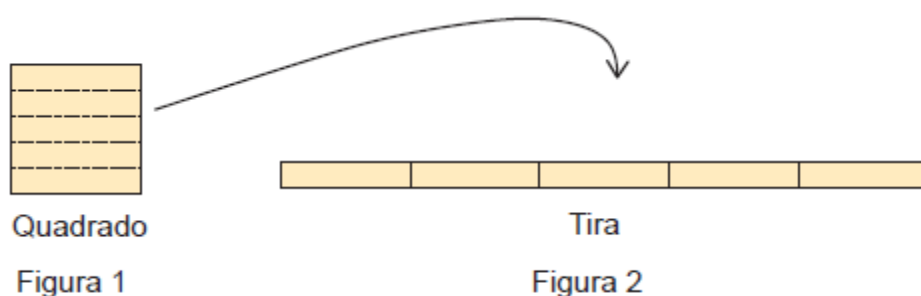
- (a) Observe que cada vez que descemos uma casa, o número escrito aumenta 20. Toda vez que vamos uma casa para esquerda, o número escrito diminui em 1. Portanto, $x = 17 + 20 + 20 - 1 - 1 = 55$.
- (b) Temos que $z = y + 20 + 1 = y + 21$ e que $w = y + 20 + 20 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = y + 35$. Se d é divisor de y , $y + 21$ e $y + 35$, então d é divisor de 21 e de 35. Como $\text{mdc}(21, 35) = 7$, d é divisor de 7. Sabendo que d é maior do que 1, concluímos que $d = 7$.
- (c) Como y está na primeira linha, os únicos múltiplos de 7 que estão entre 1 e 20 são: 7 e 14.
- Note que temos os seguintes valores para as triplas de letras $(y, z, w) = (7, 28, 42)$ ou $(y, z, w) = (14, 35, 49)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

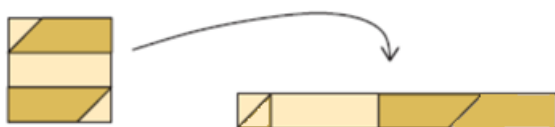
Solução N2Q3

a)



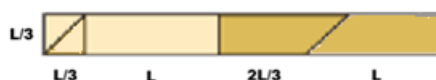
Na Figura 1, temos o quadrado dividido em cinco retângulos cujos lados medem 10 cm e 2 cm. A tira formada por esses retângulos mostrada na Figura 2 é um retângulo cujos lados medem 50 cm e 2 cm; portanto, o perímetro do retângulo formado será dado por $50 + 50 + 2 + 2$, ou seja, 104 cm.

b)



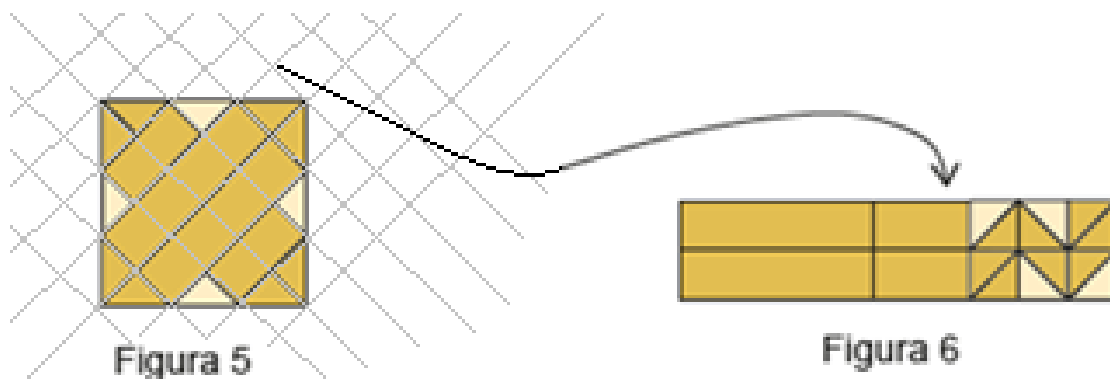
Vamos chamar de L o comprimento do lado do quadrado da Figura 3.

A medida da largura da tira é um terço do comprimento desse lado ($L/3$), que também é a medida dos lados iguais dos triângulos isósceles; os lados horizontais dos trapézios que foram recortados medem L e $2L/3$.

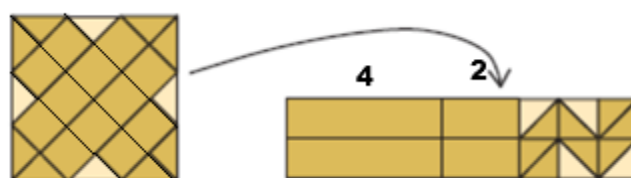


Usando as medidas das peças, anotadas na figura acima, dado que o perímetro da tira é 40 cm, temos que: $40 = 2 \cdot \frac{L}{3} + 2 \cdot (\frac{L}{3} + \frac{2L}{3} + 2L)$, ou seja, $6L + \frac{2L}{3} = 40$, daí $\frac{20L}{3} = 40$ e $L = 6$. Consequentemente, a área do segundo quadrado cortado por Joana é 36 cm^2 .

c)



Recuperando o quadriculado utilizado por Joana para recortar as peças Figura 5, observamos que as peças retangulares da tira têm comprimentos 4 cm ou 2 cm; as larguras das tiras retangulares são 2 cm e os lados iguais dos triângulos medem 1 cm.



Observe que o comprimento da Figura 6 é 9 cm e sua largura, 2 cm, logo, a área da Figura 6 é 18 cm^2 . Joana usou todas as peças da decomposição do quadrado para formar a tira, portanto, ambas as figuras têm a mesma área; logo, a área do quadrado da Figura 5 é 18 cm^2 .

Outra solução: Podemos também calcular a área das figuras 5 e 6 observando, no quadriculado que aparece sobre a Figura 5, que as regiões retangulares são equivalentes a 12 quadrados do quadriculado e cada par de triângulos equivale a um quadradinho do quadriculado; portanto, temos uma decomposição da Figura 5 que é equivalente a 18 quadrados do quadriculado, e a área da Figura 5 é 18 cm^2 .

Observamos que, nesse item, temos uma situação especial na qual o comprimento da diagonal do quadrado é um número inteiro, o que nos permite calcular a área do quadrado sem conhecer o comprimento do seu lado.

d) Com as informações do item c), temos que o perímetro da Figura 6 é $2 \cdot 2 + 2 \cdot (4 + 2 + 3) = 4 + 18 = 22 \text{ cm}$.

Solução N2Q4

a) Seja $\underline{A12D}$ esse número. Uma das condições para que se forme um número dourado é $A \times D = 12$. Mas 12 pode ser escrito como 2×6 ou 3×4 devido às condições do problema, ou seja, com A e D algarismos entre 1 e 9. Os algarismos de um número dourado devem ser distintos e, além disso, $A < D$; portanto, a única opção válida é $A = 3$ e $D = 4$. O número procurado é 3124.

b) Vamos chamar de ABCD o menor número dourado. Vamos escolher o menor valor possível para A . Não podemos ter $A = 1$, pois $A \times 1 = A$ e não teríamos como obter os dois algarismos não nulos B e C . Se $A = 2$, então $A \times D$ deverá gerar o menor número possível de dois algarismos, sem o zero e sem repetir algarismos.

$2 \times 1 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$, $2 \times 4 = 8$ não servem pois são números de apenas 1 algarismo.

Em $2 \times 5 = 10$ aparece o zero, em $2 \times 6 = 12$ o 2 aparece repetido. No caso $2 \times 7 = 14$ todas as condições do enunciado ficam verificadas e o menor número dourado é 2147.

Como curiosidade, o maior número dourado é 8729.

c) Vamos supor que o algarismo das unidades é 5; portanto, nosso número teria a forma ABC5 e teríamos ainda que $A \times 5 = BC$, em outras palavras, o número BC seria múltiplo de 5. Todo número múltiplo de 5 termina em 5 ou 0. Como em um número dourado o zero não aparece e os algarismos não se repetem, então não existe um número dourado que tem o algarismo das unidades como 5.

d) Não existem números dourados com 5 na casa dos milhares, devido a raciocínio análogo ao item anterior (faz aparecer 0 ou repetir o 5). Também não existem números dourados com algarismo 5 na casa das dezenas, pelos mesmos motivos.

Resta analisar números da forma A5CD. Devemos ter que o número de dois algarismos 5C é igual ao produto $A \cdot D$. Vamos listar todos os números de dois algarismos da forma 5C e vamos escrever sua fatoração, lembrando que o zero não pode aparecer e não que não podem aparecer algarismos repetidos (assim, excluimos 50 e 55). Devemos encontrar A e D como números entre 1 e 9, com $A < D$.

$51 = 3 \cdot 17$ e 17 é um número primo com dois algarismos.

$52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$ e 13 é um número primo com dois algarismos.

53 é um número primo de dois algarismos.

$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ e podemos escrever 54 como o produto de dois números de um algarismo como $54 = 6 \cdot 9$. Temos aqui o número dourado 6549.

$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ e podemos escrever 56 como o produto de dois números de um algarismo como $56 = 8 \cdot 7$. Temos aqui o número dourado 7568.

$57 = 3 \cdot 19$ e 19 é um número primo com dois algarismos.

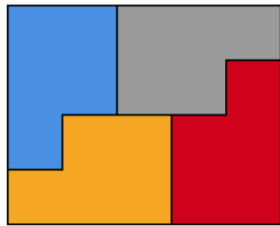
$58 = 2 \cdot 29$ e 29 é um número primo com dois algarismos.

59 é um número primo.

Conclusão: os números dourados com o algarismo 5 na centena são 6549 e 7568.

Solução N2Q5

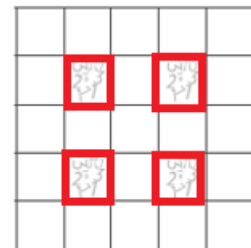
(a) Uma possível cobertura está ilustrada abaixo:



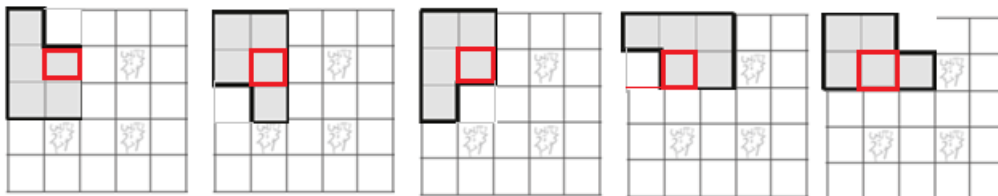
(b) Há duas possíveis coberturas, ilustradas abaixo:



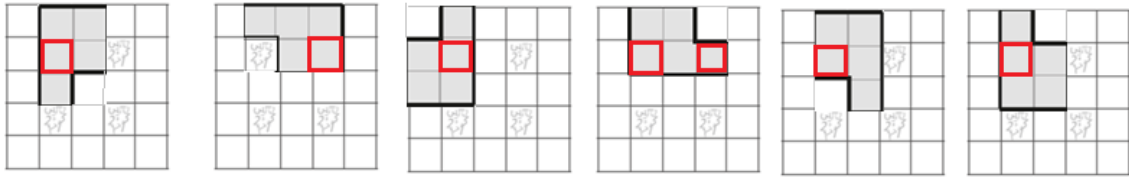
(c) Observe que qualquer peça colocada no tabuleiro ocupa pelo menos uma das quatro casas marcadas com a imagem da OBMEP. Porém, devemos tentar colocar cinco peças. Mas, quatro peças já cobrem as quatro casas marcadas e, assim, não é possível usar cinco peças. De fato, vejamos com mais detalhe por que isso ocorre:



Se uma peça cobrir a casa superior direita, ela também cobrirá o menos uma casa com logo (nesse caso, a casa marcada em vermelho):



Isso acontecerá com qualquer outra casa do tabuleiro, ou seja, uma peça colocada sempre cobrirá ao menos uma casa com o logo da OBMEP. Por exemplo, observe que para cobrir a segunda casa da primeira linha, independentemente de como colocarmos a peça cinza, sempre uma casa com o logo da OBMEP será também coberta por ela:



Para as demais casas o mesmo argumento se aplica.

Solução N2Q6

a)

- $\begin{smallmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{smallmatrix}$: a peça 6 pula sobre as peças 3 e 5 e sobrepõe-se à peça 2.
- $\begin{smallmatrix} 4 & & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{smallmatrix}$: a peça 2 pula sobre as peças 3 e 5 e sobrepõe-se à peça 6.

b) Há muitas possibilidades, a tabela abaixo apresenta todos os movimentos possíveis:

	Movimento 1	Movimento 2	Movimento 3	Movimento 4
1 2 3 4 5 6 7 8	$\begin{smallmatrix} 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$
				4 5 8 3
			$\begin{smallmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 \end{smallmatrix}$
				2 4 7 8
				5 1 8 3
				2 4 6 7
				4 5 3 6
			$\begin{smallmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 3 & 6 \end{smallmatrix}$
				2 4 7 8
	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 7 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 & 5 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \end{smallmatrix}$
				5 1 8 3
				2 4 6 7
			$\begin{smallmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$
				3 6 8 4
				1 2 5 7
			$\begin{smallmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$
				6 1 8 4
				2 3 5 7
	$\begin{smallmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$		3 6 4 5
				1 2 7 8
				6 1 4 5
				2 3 7 8
	$\begin{smallmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \end{smallmatrix}$		6 1 8 4
				2 3 5 7
				3 6 8 4
				1 2 5 7

c)

Vamos assumir que temos uma quantidade par $2n$ peças de peças sozinhas, lado a lado, sem nenhuma peça sobre outra. Vimos no item b) que se $2n = 8$, podemos terminar a brincadeira sem peças sozinhas. Vamos ver o que acontece com um número de peças par, maior do que 8.

O primeiro movimento pode ser sempre “a quarta peça pula sobre a segunda e terceira peça e sobrepõe-se à primeira peça”. Esse movimento faz com que 2 peças fiquem sobrepostas na primeira posição, e as demais $2n - 2$ peças fiquem ao lado dessas 2 peças sobrepostas, sozinhas, lado a lado, sem nenhuma peça sobre outra.

Considerando somente as $2n - 2$ peças sozinhas, lado a lado, sem nenhuma peça sobre outra, o segundo movimento pode ser o mesmo que o anterior nessas peças: “a quarta peça pula sobre a segunda e terceira peça e sobrepõe-se à primeira peça”. Teremos então 4 peças sobrepostas nas 2 primeiras posições, e as demais $2n - 4$ peças lado a lado, sem nenhuma peça sobre outra.

Se continuarmos fazendo sempre assim, considerando somente as peças que ficaram sozinhas, após $n - 3$ movimentos teremos $2n - 8$ peças sobrepostas nas $n - 3$ primeiras posições, e as demais 8 peças sozinhas, lado a lado, sem nenhuma peça sobre outra.

Agora basta fazer os movimentos do item b) para que essas 8 peças fiquem todas sobrepostas, não sobrando peças sozinhas.

Resumidamente, a brincadeira termina do jeito correto quando o número inicial de peças é $k = 2 \times 4 = 8$. Para resolver um problema com $2k+2$ peças, podemos começar jogando a peça 4 para cima da peça 1 e a partir daí resolver um problema com $2k$ peças. Portanto, se o problema tem solução para $2k$ peças, então ele também terá solução para $2k+2$ peças, portanto, por indução finita, segue o resultado.