



Somando novos talentos para o Brasil
Escolas Públicas e Privadas



20ª OBMEP - 2025

SOLUÇÕES NÍVEL 3

Solução N3Q1

- (a) Observe que cada vez que descemos uma casa, o número escrito aumenta 20. Toda vez que vamos uma casa para esquerda, o número escrito diminui em 1. Portanto, $x = 17 + 20 + 20 - 1 - 1 = 55$.
- (b) Temos que $z = y + 20 + 1 = y + 21$ e que $w = y + 20 + 20 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = y + 35$. Se d é divisor de y , $y + 21$ e $y + 35$, então d é divisor de 21 e de 35. Como $\text{mdc}(21, 35) = 7$, d é divisor de 7. Sabendo que d é maior do que 1, concluímos que $d = 7$.
- (c) Como y está na primeira linha, os únicos múltiplos de 7 que estão entre 1 e 20 são: 7 e 14.

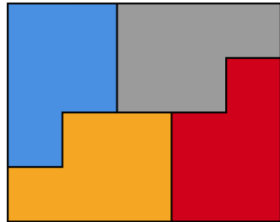
Note que temos os seguintes valores para as triplas de letras $(y, z, w) = (7, 28, 42)$ ou $(y, z, w) = (14, 35, 49)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Solução N3Q2

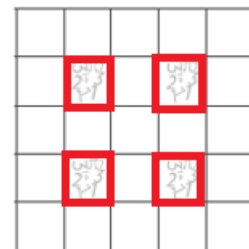
(a) Uma possível cobertura está ilustrada abaixo:



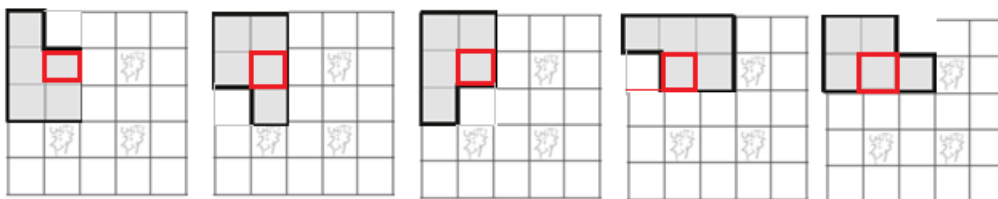
(b) Há duas possíveis coberturas, ilustradas abaixo:



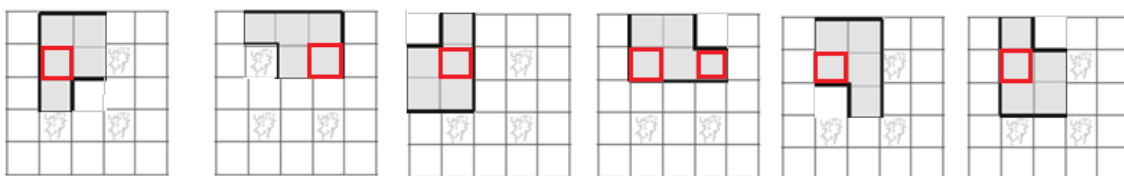
(c) Observe que qualquer peça colocada no tabuleiro ocupa pelo menos uma das quatro casas marcadas com a imagem da OBMEP. Porém, devemos tentar colocar cinco peças. Mas, quatro peças já cobrem as quatro casas marcadas e, assim, não é possível usar cinco peças. De fato, vejamos com mais detalhe por que isso ocorre:



Se uma peça cobrir a casa superior direita, ela também cobrirá o menos uma casa com logo (nesse caso, a casa marcada em vermelho):



Isso acontecerá com qualquer outra casa do tabuleiro, ou seja, uma peça colocada sempre cobrirá ao menos uma casa com o logo da OBMEP. Por exemplo, observe que para cobrir a segunda casa da primeira linha, independentemente de como colocarmos a peça cinza, sempre uma casa com o logo da OBMEP será também coberta por ela:



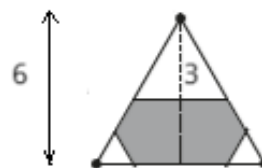
Para as demais casas o mesmo argumento se aplica.

Solução N3Q3

Para esse problema é muito útil expressar a área de um triângulo equilátero como função do comprimento de seu lado a é dada por $a^2 \sqrt{3}/4$, e em função da altura h é $h^2 \sqrt{3}/3$. Note que pelo teorema de Pitágoras, $a = 2h \sqrt{3}/3$.

a) Para $x = 3$ a superposição dos dois triângulos consiste em dois triângulos equiláteros de altura $h = 3/2$. Assim, a área é dada por $A(3) = 2(3/2)^2 \sqrt{3}/3 = 3 \sqrt{3}/2$.

Para $x = 9$, a superposição dos dois triângulos é uma figura hexagonal. Podemos calcular a área desse hexágono subtraindo da área de um dos triângulos originais as áreas de 3 triângulos equiláteros brancos, como indicado na figura:



O triângulo original tem área $12\sqrt{3}$, pois tem altura 6.

O triângulo branco superior tem área $3\sqrt{3}$, pois tem altura 3.

Cada um dos triângulos brancos inferiores tem área $3\sqrt{3}/4$, pois sua altura é $3/2$.

Logo, a área do hexágono é $A(9) = 12\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 2 \cdot 3\sqrt{3}/4 = 15\sqrt{3}/2$.

b) Para $0 \leq x \leq 6$ a região comum é formada por dois triângulos equiláteros de altura $x/2$. Assim, temos $A(x) = 2(x/2)^2 \sqrt{3}/3 = x^2 \sqrt{3}/6$.

Se a distância entre C e P for maior que 6 a região comum passa a ser hexagonal. Uma maneira simples de calcular essa área é subtrair a área do triângulo equilátero superior e dos dois triângulos equiláteros laterais da área total.

Por partes:

1. Área total do triângulo ABC: $(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}/4 = 12\sqrt{3}$;

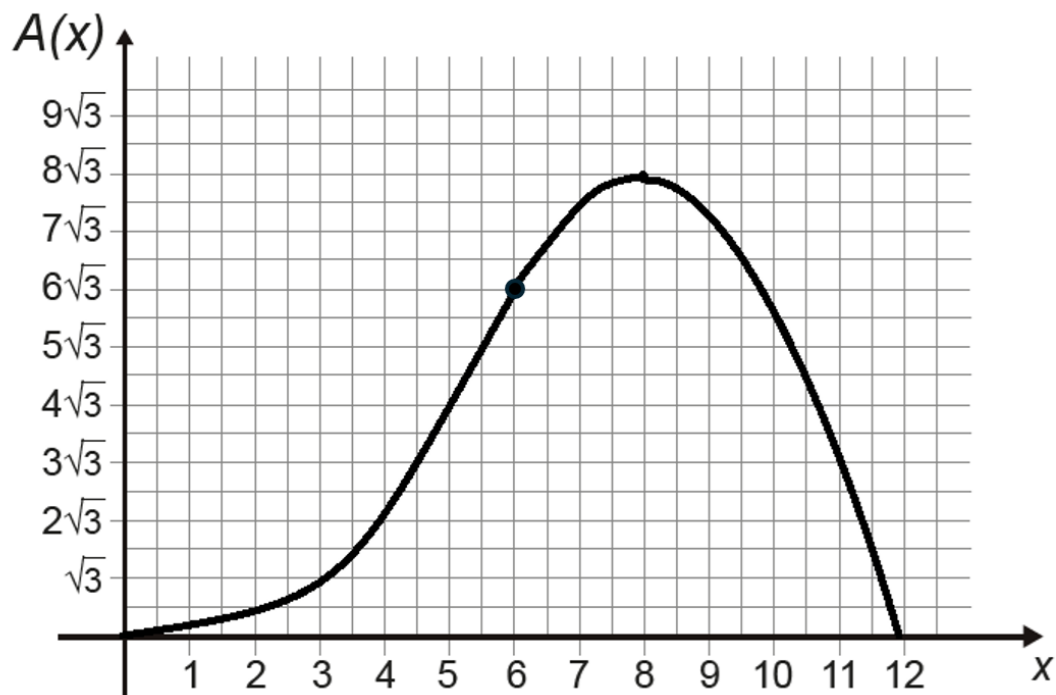
2. Para a área do triângulo equilátero superior é conveniente calcular a sua altura. Como a distância entre C e P é x e a altura do triângulo equilátero PQR é 6, a altura do triângulo equilátero superior é $x - 6$ e seu lado é $2(x - 6) \sqrt{3}/3$. Sua área é, portanto $(x - 6)^2 \sqrt{3}/3$;

3. Como o lado do triângulo equilátero superior é $2(x - 6) \sqrt{3}/3$, o lado de cada um dos triângulos equiláteros laterais é $(4\sqrt{3} - 2(x - 6) \sqrt{3}/3)/2 = (12 - x) \sqrt{3}/3$. Assim, a área de cada um desses triângulos equiláteros das laterais é $(12 - x)^2 \sqrt{3}/12$.

A função que fornece a área da região comum para $6 \leq x \leq 12$ é, portanto, $A(x) = 12\sqrt{3} - (x - 6)^2 \sqrt{3}/3 - (2(12 - x)^2 \sqrt{3}/12) = (12 - (x - 6)^2/3 - (12 - x)^2/6)\sqrt{3} = (-x^2 + 16x - 48) \sqrt{3}/2$.

O valor máximo ocorre em $x = 8$ e é igual a $8\sqrt{3}$.

d) O gráfico da função tem o seguinte aspecto:



Solução N3Q4

a) Basta organizarmos uma lista de acordo com a posição do primeiro acerto e, em seguida, com as demais possibilidades do segundo acerto:

[11000] , [10100], [10010], [10001], [01100], [01010], [01001], [00110], [00101] e [00011]

São 10 possibilidades. Uma outra maneira de se obter isso é ver que a quantidade de listas corresponde ao número de escolhas de 2 posições dentre 5, que é $\binom{5}{2} = 10$.

b) Para cada questão, temos 2 maneiras de vincular um número no boletim e isso nos dá o total de $2^5 = 32$ boletins distintos. Como 33 é maior que a quantidade total de boletins distintos, pelo menos dois alunos terão o mesmo boletim (Princípio das Casas de Pombos).

c) Como a prova tem apenas 5 questões, essas 81 respostas corretas podem ser classificadas em 5 tipos. Dado que $\frac{81}{5} > 16$, pelo menos uma questão foi resolvida corretamente por 17 pessoas. Observemos os boletins dessas 17 pessoas nas outras 4 questões. Como temos apenas $2^4=16$ formas de preencher o restante do boletim e $17 > 16$, pelo menos duas delas terão exatamente as mesmas respostas nas demais questões.

Outra solução:

Vamos analisar o total de cartões com cada quantidade de acertos:

Há uma única sequência com 0 acertos

Há 5 sequências distintas com 1 acerto

Há 10 sequências distintas com 2 acertos

Há 10 sequências distintas com 3 acertos

Há 5 cartões distintos com 4 acertos

Há 1 uma única sequência com 5 acertos

Portanto, se utilizarmos apenas cartões distintos, o número máximo de acertos seria

$$1 \times 0 + 5 \times 1 + 10 \times 2 + 10 \times 3 + 5 \times 4 + 1 \times 5 = 80.$$

Como 81 questões foram acertadas, obrigatoriamente alguma sequência de zeros e uns foi repetida.

SOLUÇÃO N3Q5

- a) Para que nenhum cartão seja pintado de preto, é preciso que o cartão escolhido ao acaso seja o mais à direita. A probabilidade de ele ser escolhido é $1/11$.

- b) 1ª solução:

O cartão a ser removido pode ser escolhido de 11 modos e o cartão sorteado de 10 modos. Logo há $11 \times 10 = 110$ casos possíveis. Se o cartão removido é o mais à direita, não há casos favoráveis, porque nenhum cartão foi pintado de preto. Se o cartão removido é o segundo mais à direita, há 1 caso favorável; se for o terceiro, há dois casos favoráveis; e assim por diante, até chegar ao décimo-primeiro cartão. Logo, o número de casos favoráveis é $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$. Portanto, a probabilidade de que o primeiro cartão sorteado seja preto é $\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{55}{110} = \frac{1}{2}$.

- 2ª solução:

Suponhamos que os cartões sobre a mesa sejam numerados de 1 a 11. Escolher um cartão para jogar fora e depois sortear um dos restantes equivale a escolher ao acaso dois números de 1 a 11. O cartão sorteado é preto se e somente se o segundo número sorteado é maior do que o primeiro, o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{2}$.

- 3ª solução:

A probabilidade de que um dado cartão da configuração original seja pintado de preto é igual à probabilidade de que seu simétrico seja pintado de branco. Devido a essa simetria as probabilidades de sortear um cartão branco ou um preto são iguais, ou seja, iguais a $\frac{1}{2}$.

- c) 1ª solução:

O cartão a ser removido pode ser escolhido de 11 modos e os cartões sorteados de 10 e 9 modos, respectivamente. Logo há $11 \times 10 \times 9 = 990$ casos possíveis. Se o cartão removido é o mais à direita, não há casos favoráveis, porque nenhum cartão foi pintado de preto. Se o cartão removido é o segundo mais à direita, também não há casos favoráveis, já que só há um cartão preto; se for o terceiro, há dois cartões pretos e, assim, 2×1 casos favoráveis; se for o quarto, há três cartões pretos e, assim, 3×2 casos favoráveis; e assim por diante, até chegar ao décimo-primeiro cartão. Logo, o número de casos favoráveis é $2 \times 1 + 3 \times 2 + \dots + 10 \times 9 = 330$. Portanto, a probabilidade de que o primeiro cartão sorteado seja preto é $\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{330}{990} = \frac{1}{3}$.

- 2ª solução:

Suponhamos que os cartões sobre a mesa sejam numerados de 1 a 11. Escolher um cartão para jogar fora e depois sortear dois dos restantes equivale a escolher ao acaso três números de 1 a 11. O cartão sorteado é preto se e somente se o primeiro número sorteado é o menor dos três. Como todas as ordenações desses três números são igualmente prováveis, a probabilidade de que o menor seja o primeiro sorteado é igual a $1/3$.

Comentário: a resposta **não é** $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Embora sejam iguais as probabilidades de retirar cartão branco ou preto em cada extração, esses eventos não são independentes.

Solução N3Q6

Antes das perguntas, Rafael e Gabriel obviamente sabem seus números (cada um sabe o seu e vão tentar descobrir qual é o número do outro) e sabem também que 60 pode ser a soma ou o produto deles. Para que cada um saiba o número do outro basta saber se 60 é a soma ou é o produto dos números: se for a soma, basta subtrair de 60 o seu número; se for o produto, basta dividir 60 pelo seu número.

- a) O número de Rafael é um divisor de 60 porque, se não fosse, ele saberia que 60 era a soma dos números. Logo, ele saberia o número de Gabriel, e iria responder SIM à primeira pergunta de Michel.
- b) Pela resposta de Rafael à primeira pergunta, Gabriel sabe que o número de Rafael é um divisor de 60. Se o seu número fosse o 15 então ele saberia que 60 era o produto dos números, já que $60 - 15 = 45$ não é divisor de 60. Logo ele saberia o número de Rafael, e iria responder SIM à pergunta de Michel.
- c) Na segunda pergunta, Gabriel respondeu que ainda não tinha informação suficiente para saber o número de Rafael porque, apesar de saber, após a primeira pergunta, que o número de Rafael é um divisor de 60, o seu número não permitia saber se 60 era a soma ou era o produto dos números. Logo, o número de Gabriel também deve ser um divisor de 60, pois, se não fosse, ele saberia que 60 era a soma dos números. Além disso, os números de Rafael e Gabriel são divisores de 60 (pertencem ao conjunto $\{(1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60)\}$ que, multiplicados ou somados, resultam 60. As únicas possibilidades são:
 - (i) ambos com o número 30;
 - (ii) um com o número 2 e outro com o número 30;

Rafael observou que o número 30 é comum às expressões $60 = 30 + 30$ e $60 = 30 \times 2$; isso permitiu a ele concluir que o número de Gabriel é 30.

Outra variação da solução:

- a) Seja r o número do cartão do Rafael e g o número de Gabriel. Se r não fosse um divisor de 60 então a resposta de Rafael à primeira pergunta seria “sim”. De fato, nesse caso $60 = gr$ não seria possível; logo $60 = g + r$ e Rafael poderia calcular $g = 60 - r$. Como a resposta de Rafael à primeira pergunta foi “não”, segue que r é um divisor de 60.
- b) Da mesma maneira, g é um também é um divisor de 60. Se g fosse igual a 15, não poderia ocorrer o caso da soma dos números dos cartões, isto é, não seria possível $g + r = 60$. De fato, se isso ocorresse, r seria igual 45, mas 45 não é divisor de 60. Logo, ocorre somente o caso $r: g=15.r= 60$ e, como consequência, $r=4$ (Gabriel saberia o número de Rafael, não ficaria em dúvida).

- c) Antes da conclusão, Gabriel pode fazer uma lista dos inteiros da forma $g + d$ e outra dos inteiros da forma gd , em que d percorre todos os divisores de 60. Se 60 aparecesse em apenas uma dessas listas, a resposta do Gabriel à segunda pergunta seria “sim”, pois ele poderia calcular $r = 60 - g$, caso 60 aparecesse na primeira lista e $r = \frac{60}{g}$, caso 60 aparecesse na segunda. Dessa maneira, ele só pode ter respondido “não” porque viu que o 60 aparece nas duas listas. Por inspeção, isso ocorre apenas para $60 = 30 + 30 = 30 \times 2$; com a informação que o Gabriel tem, nesse momento ele não consegue decidir entre os possíveis valores $r = 30$ ou $r = 2$.

Rafael fez o mesmo raciocínio e observou que o número 30 é comum às expressões $60 = 30 + 30$ e $60 = 30 \times 2$; isso permitiu a ele concluir que $g = 30$.