

XXXVII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase – 10 de agosto de 2013

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)



Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

a) Veja que a soma dos dígitos do número 45 é igual a $4 + 5 = 9 = 3^2$, que é um quadrado perfeito. Escreva todos os naturais de dois dígitos (ou seja, no intervalo que vai de 10 a 99) tais que a soma de seus dois algarismos seja igual a um quadrado perfeito.

b) Além de quadrados, podemos pensar em potências de maior expoente.

Por exemplo, a soma dos dígitos de 8919 é $8 + 9 + 1 + 9 = 27 = 3^3$ que é um cubo perfeito; a soma dos dígitos de 109501 é $1 + 0 + 9 + 5 + 0 + 1 = 16 = 2^4$ que é uma quarta potência perfeita; a soma dos dígitos de 5999 é $5 + 9 + 9 + 9 = 32 = 2^5$ que é uma quinta potência perfeita, etc.

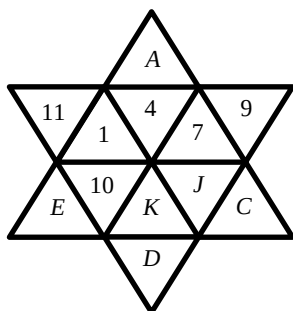
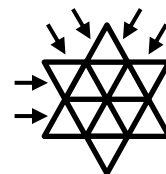
Determine o maior número natural de 6 dígitos cuja soma desses algarismos é uma potência perfeita. Vale qualquer expoente.

Lembre-se de justificar a sua resposta.

PROBLEMA 2

Uma *estrela mágica* é uma estrela formada por 12 triângulos equiláteros na qual ao distribuirmos os números de 1 a 12 nesses triângulos as seis somas (de cinco números) nas direções indicadas na figura abaixo são iguais.

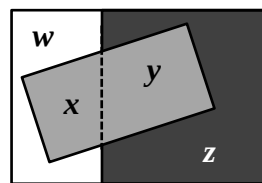
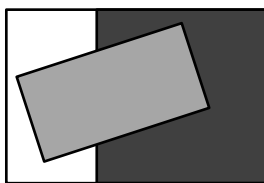
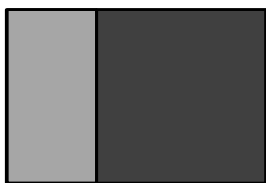
a) Determine A e E na estrela mágica a seguir. *Lembre-se de justificar a sua resposta.*



b) Acabe de completar a estrela mágica dada no item acima, ou seja, determine C , D , J e K .

PROBLEMA 3

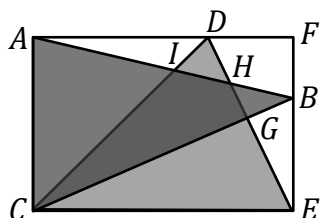
Um fato relativamente simples sobre áreas e que muitas vezes ajuda a resolver problemas complexos é o *Teorema dos carpetes*:



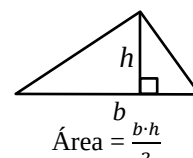
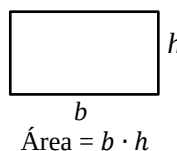
Colocamos dois carpetes em um dormitório. Se a soma das áreas dos carpetes é igual à área do dormitório, então a área da intersecção dos carpetes é igual à área da região não coberta por carpetes.

a) Utilizando a notação dada pela figura, isto é, w é a região branca, z é a região cinza escuro, e a região cinza claro é composta pelas regiões x e y , sendo que a região y é a intersecção dos carpetes, prove o Teorema dos carpetes, ou seja, prove que $y = w$.

b) Na figura a seguir $ACEF$ é um retângulo. Prove que a área mais escura (quadrilátero $CGHI$) é igual à soma das três áreas brancas.

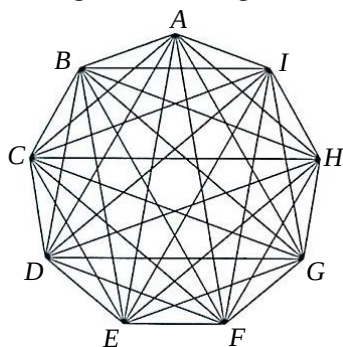


Nessa questão você pode querer utilizar que:



PROBLEMA 4

A figura a seguir é um eneágono regular, ou seja, é um polígono de 9 vértices que possui todos os lados com mesma medida e todos os ângulos internos iguais. Além disso, estão traçadas todas as suas diagonais.



- a) O triângulo ACH é isósceles de vértice A , pois seus ângulos da base são iguais, ou seja, $m(\widehat{ACH}) = m(\widehat{AHC})$ pela simetria da figura. Apresente todos os triângulos isósceles de vértice A . Algum desses triângulos é equilátero (i.e., seus três lados têm a mesma medida e seus três ângulos internos são iguais)?
- b) Agora considere todos os triângulos cujos vértices são vértices do eneágono: quantos são triângulos equiláteros? Quantos são triângulos isósceles? Lembre-se que todo triângulo equilátero é isósceles.

PROBLEMA 5

No xadrez, um problema muito famoso é o *Caminho do Cavalo*, que consiste em verificar se existe um caminho formado pelos movimentos do cavalo que passa por todas as casas do tabuleiro exatamente uma vez e volta para a casa onde começou. No tabuleiro de xadrez ao lado há um exemplo de tal caminho, que começa na casa 1 e segue as casas em ordem numérica. Ao chegar à casa 64 o cavalo pode retornar para a casa 1. Trataremos nessa questão de um problema similar: o cavalo percorrendo as casas das faces de um cubo mágico $2 \times 2 \times 2$.

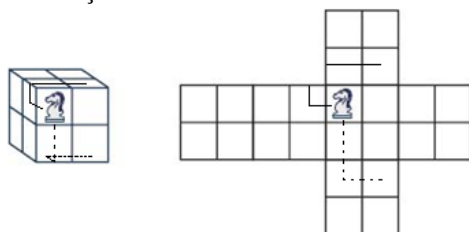
38	35	62	25	60	23	10	7
63	26	37	34	11	8	59	22
36	39	28	61	24	57	6	9
27	64	33	40	5	12	21	58
50	29	4	13	48	41	56	19
1	14	49	32	53	20	47	44
30	51	16	3	42	45	18	55
15	2	31	52	17	54	43	46

Vamos considerar que o cavalo tem dois movimentos diferentes:

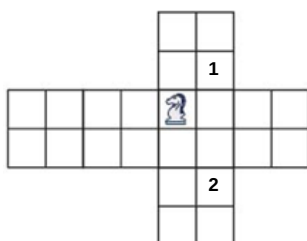
- percorre duas casas numa direção, gira 90° e percorre uma casa.
- percorre uma casa, gira 90° e percorre duas.

Se ao caminhar o cavalo encontra uma borda do cubo, ele simplesmente segue no plano do outro lado que também contém essa borda.

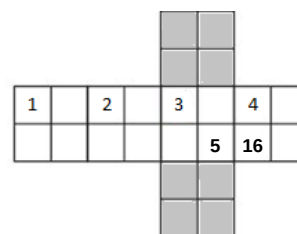
Veja dois exemplos desses movimentos, representados no cubo e em sua planificação.



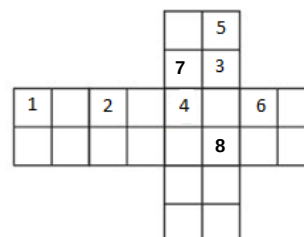
a) Considerando a planificação a seguir, marque todas as 10 casas que podem ser alcançadas pelo cavalo representado. Duas posições já foram marcadas. Copie o desenho na sua folha de respostas e use os números de 3 a 10 para marcar as demais casas.



b) Agora vamos construir um caminho fechado parcial. Você deve marcar um caminho fechado que passe apenas pelas casas da faixa 2×8 , não sendo permitido parar nas casas escuras. As cinco primeiras casas a serem visitadas e a última já estão representadas. Copie o desenho na sua folha de respostas e continue a marcar os movimentos (as casas pelas quais o cavalo deve passar) de 6 a 15.



c) Finalmente, construa um caminho fechado passando por todas as 24 casas do cubo. Observe que da casa 24 deve ser possível chegar a casa 1. As oito primeiras casas a serem visitadas já estão marcadas. Copie o desenho na sua folha de respostas e marque os movimentos (as casas pelas quais o cavalo deve passar) de 9 a 24.



XXXVII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase – 10 de agosto de 2013

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)



Folha de Perguntas

- Instruções:**
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
 - Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
 - Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
 - Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
 - Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
 - Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Eduardo ficou impressionado ao pesquisar na Internet e descobrir na página

<http://www.futilitycloset.com/2011/01/14/through-and-through/>

que o número

3139971973786634711391448651577269485891759419122938744591877656925789747974914319422889611373939731 de 100 dígitos é um *primo reversível*, ou seja, é um primo que quando lido da direita para a esquerda também é um primo. Mais ainda, se dividirmos esse número em dez pedaços e montarmos a tabela abaixo, temos em cada uma das dez linhas, das dez colunas e das duas diagonais um primo reversível de 10 dígitos:

3	1	3	9	9	7	1	9	7	3
7	8	6	6	3	4	7	1	1	3
9	1	4	4	8	6	5	1	5	7
7	2	6	9	4	8	5	8	9	1
7	5	9	4	1	9	1	2	2	9
3	8	7	4	4	5	9	1	8	7
7	6	5	6	9	2	5	7	8	9
7	4	7	9	7	4	9	1	4	3
1	9	4	2	2	8	8	9	6	1
1	3	7	3	9	3	9	7	3	1

Ele decidiu então tentar encontrar algo similar, porém bem mais simples: um primo de 4 dígitos diferentes de zero $abcd$ (não obrigatoriamente reversível) tal que, ao distribuímos esses dígitos na tabela a seguir, os números que aparecem nas duas linhas, nas duas colunas e nas duas diagonais sejam primos reversíveis:

a	b
c	d

Ou seja, $abcd$ primo, com a, b, c e d dígitos não nulos, tal que ab, ac, ad, bc, bd e cd são primos reversíveis.

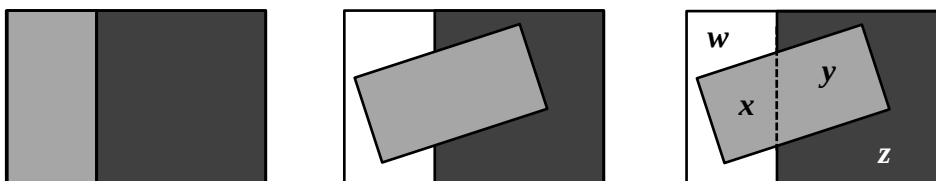
a) Dê um exemplo de um número $abcd$ que satisfaça as condições estabelecidas por Eduardo.

b) Eduardo decidiu complicar um pouco a situação, procurando um número com quatro dígitos não nulos **distintos dois a dois** que satisfaça as condições do problema.

Existe tal número?

PROBLEMA 2

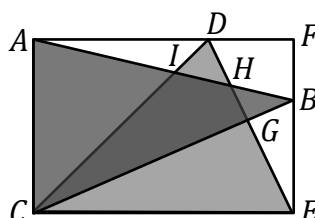
Um fato relativamente simples sobre áreas e que muitas vezes ajuda a resolver problemas complexos é o Teorema dos carpetes:



Colocamos dois carpetes em um dormitório. Se a soma das áreas dos carpetes é igual à área do dormitório, então a área da intersecção dos carpetes é igual à área da região não coberta por carpetes.

a) Utilizando a notação dada pela figura, isto é, w é a região branca, z é a região cinza escuro, e a região cinza claro é composta pelas regiões x e y , sendo que a região y é a intersecção dos carpetes, prove o Teorema dos carpetes, ou seja, prove que $y = w$.

b) Na figura a seguir $ACEF$ é um retângulo. Prove que a área mais escura (quadrilátero $CGHI$) é igual à soma das três áreas brancas.



PROBLEMA 3

Sejam a, b, c e d números reais não nulos, é imediato que a expressão $(ax - b)^2 + (cx - d)^2$ é maior ou igual a zero para todo x real.

a) Determine a para que exista x real tal que $(ax - 15)^2 + (3x - 9)^2 = 0$

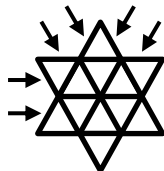
b) Mostre a equação do segundo grau $(ax - b)^2 + (cx - d)^2 = 0$ terá duas raízes reais iguais ou não terá raízes reais.

c) A partir do item b, prove que $(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \geq (ab + cd)^2$.

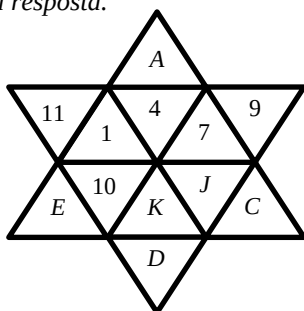
Nesse item você pode querer utilizar que a equação do 2º grau $Ax^2 + Bx + C = 0$, com A, B e C reais, $A \neq 0$, possui duas raízes reais iguais ou não tem raízes reais se, e somente se, $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow B^2 - 4AC \leq 0$.

PROBLEMA 4

Uma *estrela mágica* é uma estrela formada por 12 triângulos equiláteros na qual ao distribuímos os números de 1 a 12 nesses triângulos as seis somas (de cinco números) nas direções indicadas na figura abaixo são iguais.



a) Determine A e E na estrela mágica a seguir. *Lembre-se de justificar a sua resposta.*



b) Acabe de completar a estrela mágica dada no item acima, ou seja, determine C, D, J e K .

c) Na estrela mágica do item acima, as somas são todas iguais a 32. Iremos agora construir uma na qual as somas são todas iguais a 33 (de fato, pode se demonstrar que essas são essencialmente as duas únicas estrelas mágicas que existem).

Suponha que ao lado tenhamos uma estrela mágica cujas somas são iguais a 33.

Pelas condições do problema temos que, por exemplo:

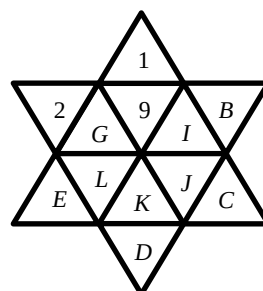
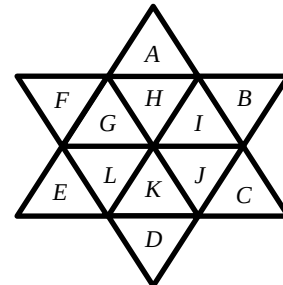
$$A + H + I + J + C = 33$$

$$A + H + G + L + E = 33$$

Escreva as outras quatro equações e, adicionando as seis equações obtidas, calcule o valor de $G + H + I + J + K + L$.

d) Sabemos que, por exemplo, $C + J + I + H + A = C + J + K + L + E \Leftrightarrow I + H + A = K + L + E$. Prove que $L + K + D = H + I + B$ e conclua que $A + D = B + E$. Ou seja, as somas das pontas opostas são iguais.

e) Complete a estrela mágica na qual todas as somas são iguais a 33, ou seja, determine B, C, D, E, G, I, J, K e L .

**PROBLEMA 5**

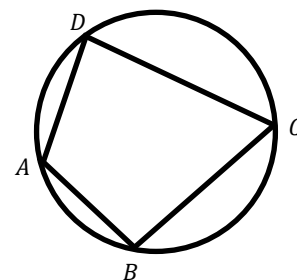
Um quadrilátero $ABCD$ é chamado *cíclico* ou *inscritível* se ele pode ser inscrito numa circunferência. Pode-se mostrar que $ABCD$ é cíclico a partir da verificação de uma das condições a seguir.

(i) a soma de dois ângulos opostos é 180° , ou seja:

$$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CDA}) = 180^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{DAB}) = 180^\circ$$

(ii) dois ângulos que “enxergam” um mesmo lado são iguais, ou seja:

$$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB}) \Leftrightarrow m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BDC}) \Leftrightarrow m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{CBD}) \Leftrightarrow m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACD})$$



Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em C .

Seja CN a altura relativa à hipotenusa AB . Sejam CK e CL bissetrizes dos ângulos $\widehat{ACN}$ e $\widehat{BCN}$, respectivamente. Sejam ainda T e S os incentros (isto é, encontros das bissetrizes) dos triângulos CAN e CBN , respectivamente.

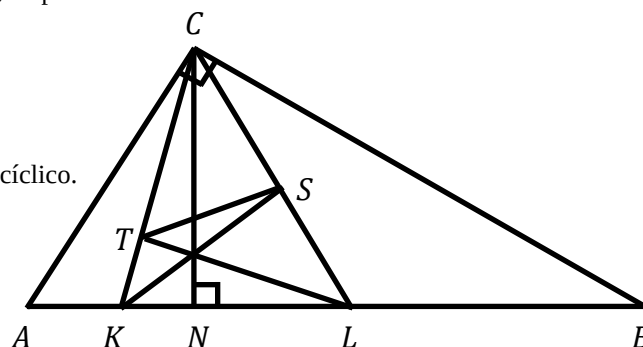
a) Calcule as medidas dos ângulos $\widehat{KCS}$ e $\widehat{KNS}$.

b) Mostre que o quadrilátero $CKNS$ é cíclico.

Observe que, por analogia, $CLNT$ também é cíclico.

c) Mostre que $m(\widehat{CKS}) = m(\widehat{CNS})$.

d) Mostre que $m(\widehat{TKS}) = m(\widehat{TLS})$ e conclua que o quadrilátero $TKLS$ é cíclico.



XXXVII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase – 10 de agosto de 2013

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)



Folha de Perguntas

- Instruções:**
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
 - Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
 - Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
 - Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
 - Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
 - Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Eduardo ficou impressionado ao pesquisar na Internet e descobrir na página

<http://www.futilitycloset.com/2011/01/14/through-and-through/>

que o número

3139971973786634711391448651577269485891759419122938744591877656925789747974914319422889611373939731 de 100 dígitos é um *primo reversível*, ou seja, é um primo que quando lido da direita para a esquerda também é um primo. Mais ainda, se dividirmos esse número em dez pedaços e montarmos a tabela abaixo, temos em cada uma das dez linhas, das dez colunas e das duas diagonais um primo reversível de 10 dígitos:

3	1	3	9	9	7	1	9	7	3
7	8	6	6	3	4	7	1	1	3
9	1	4	4	8	6	5	1	5	7
7	2	6	9	4	8	5	8	9	1
7	5	9	4	1	9	1	2	2	9
3	8	7	4	4	5	9	1	8	7
7	6	5	6	9	2	5	7	8	9
7	4	7	9	7	4	9	1	4	3
1	9	4	2	2	8	8	9	6	1
1	3	7	3	9	3	9	7	3	1

Ele decidiu então tentar encontrar algo similar, porém bem mais simples: um primo de 4 dígitos diferentes de zero $abcd$ (não obrigatoriamente reversível) tal que, ao distribuímos esses dígitos na tabela a seguir, os números que aparecem nas duas linhas, nas duas colunas e nas duas diagonais sejam primos reversíveis:

a	b
c	d

Ou seja, $abcd$ primo, com a, b, c e d dígitos não nulos, tal que ab, ac, ad, bc, bd e cd são primos reversíveis.

- a) Dê um exemplo de um número $abcd$ que satisfaça as condições estabelecidas por Eduardo.
- b) Eduardo decidiu complicar um pouco a situação, procurando um número com quatro dígitos não nulos **distintos dois a dois** que satisfaça as condições do problema. Existe tal número?

PROBLEMA 2

Seja s_n o produto dos coeficientes binomiais da linha n do triângulo de Pascal, ou seja:

$$s_n = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n}$$

- a) Sendo n inteiro positivo, simplifique o quociente:

$$\frac{s_n}{s_{n-1}}$$

Sua resposta deve ser da forma $\frac{a^b}{c!}$, em que a, b e c são dados em função de n .

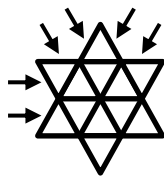
- b) Sabendo que o número $e \approx 2,718281828$ pode ser definido como sendo o valor que a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima quando n cresce, calcule o valor aproximado de:

$$\frac{s_{2013}/s_{2012}}{s_{2012}/s_{2011}}$$

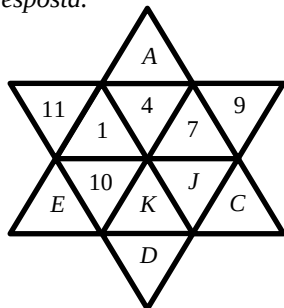
Lembre-se de justificar sua resposta.

PROBLEMA 3

Uma *estrela mágica* é uma estrela formada por 12 triângulos equiláteros na qual ao distribuirmos os números de 1 a 12 nesses triângulos as seis somas (de cinco números) nas direções indicadas na figura abaixo são iguais.



a) Determine A e E na estrela mágica a seguir. *Lembre-se de justificar a sua resposta.*



b) Acabe de completar a estrela mágica dada no item acima, ou seja, determine C, D, J e K .

c) Na estrela mágica do item acima, as somas são todas iguais a 32. Iremos agora construir uma na qual as somas são todas iguais a 33 (de fato, pode se demonstrar que essas são essencialmente as duas únicas estrelas mágicas que existem).

Suponha que ao lado tenhamos uma estrela mágica cujas somas são iguais a 33.

Pelas condições do problema temos que, por exemplo:

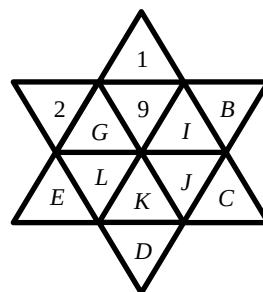
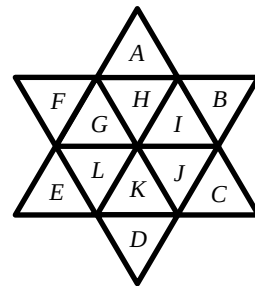
$$A + H + I + J + C = 33$$

$$A + H + G + L + E = 33$$

Escreva as outras quatro equações e, adicionando as seis equações obtidas, calcule o valor de $G + H + I + J + K + L$.

d) Sabemos que, por exemplo, $C + J + I + H + A = C + J + K + L + E \Leftrightarrow I + H + A = K + L + E$. Prove que $L + K + D = H + I + B$ e conclua que $A + D = B + E$. Ou seja, as somas das pontas opostas são iguais.

e) Complete a estrela mágica na qual todas as somas são iguais a 33, ou seja, determine B, C, D, E, G, I, J, K e L .

**PROBLEMA 4**

Nessa questão, mostraremos como utilizar o diagrama criado por Arquimedes para a trisseção de ângulos e as definições de seno e cosseno para obter diretamente fórmulas para $\sin 2\theta$, $\sin 3\theta$, $\cos 2\theta$ e $\cos 3\theta$.

Na figura O é o centro da circunferência dada de raio 1, B é tal que $m(\widehat{ABC}) = \theta$ e $BD = 1$, em que D é a intersecção da circunferência com o segmento BC ; E, F e G são pés de perpendiculares como mostra a figura.

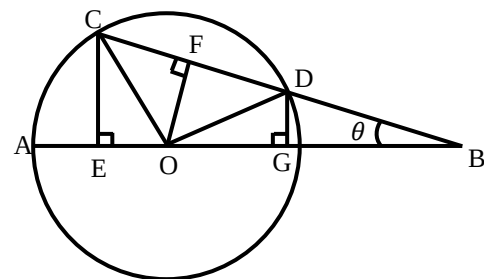
a) Determine $m(\widehat{CDO})$ e $m(\widehat{EOC})$ em função de θ .

b) Mostre que $BC = 1 + 2\cos 2\theta$.

c) Considerando as razões trigonométricas no triângulo retângulo BFO , mostre que $\cos \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2\cos \theta}$ e $\sin \theta = \frac{\sin 2\theta}{2\cos \theta}$. (Observe que, assim, podemos concluir imediatamente que $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ e $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$.)

d) Considerando as razões trigonométricas no triângulo retângulo BEC , mostre que $\cos \theta = \frac{\cos 3\theta + 2\cos \theta}{1 + 2\cos 2\theta}$.

d) Conclua a resolução, obtendo a partir dos itens anteriores as fórmulas para $\sin 3\theta$ e $\cos 3\theta$ em função, respectivamente, de $\sin \theta$ e de $\cos \theta$.

**PROBLEMA 5**

Nessa questão iremos contar quantos números de n dígitos não nulos possuem uma quantidade ímpar de dígitos 1 e também uma quantidade ímpar de dígitos 3. Por exemplo, para $n = 4$, os seguintes números – entre outros – satisfazem as condições do problema: 1113, 1663, 3124, 3313 e 8341.

a) Resolva o problema para $n = 3$.

b) Resolva o problema para $n = 4$.

c) Sejam

$$S_1 = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} a^{n-2k} b^{2k}$$

e

$$S_2 = \sum_{0 \leq 2k-1 \leq n} \binom{n}{2k-1} a^{n-(2k-1)} b^{2k-1}$$

Calcule $S_1 + S_2$ e $S_1 - S_2$. A partir desses resultados determine S_1 e S_2 .

d) Resolva o problema original, ou seja, determine quantos números de n dígitos não nulos possuem uma quantidade ímpar de dígitos 1 e 3. O item anterior pode ajudá-lo a obter uma fórmula fechada para a resposta, sem a presença de somatórios.

Nessa questão você pode querer utilizar a fórmula do Binômio de Newton: $\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a + b)^n$.