

XXXVIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (9 de agosto de 2014)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)



Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

A música Gangnam Style, do rapper coreano Psy, fez muito sucesso e o seu vídeo já atingiu 2 bilhões de visualizações no YouTube. O clipe, de 4min12s, foi o primeiro a atingir essa marca.

Para esse problema, consideraremos que o número de visualizações é 2 bilhões, a duração do vídeo é 250 s e que cada visualização foi completa, ou seja, todos viram o clipe do começo ao fim.

a) Determine o total de horas destinadas à visualização desse clipe.

b) O número de horas gastas com a visualização do clipe é o mesmo número de horas de trabalho necessárias para construir 6 edifícios iguais ao Burj Khalifa, o edifício mais alto do mundo, com 828 m, que fica em Dubai. Quantas horas de trabalho foram necessárias para construir esse edifício?

PROBLEMA 2

Nesta questão vamos apresentar um pequeno mistério da Matemática. Ele será esclarecido na prova do nível γ (confira mais tarde!).

Considere, por exemplo, $n = 5$.

- Tomamos, inicialmente, $2^5 - 1 = 31$ e, o menor número ímpar positivo, 1. Temos que:

$$31 - 1 = 30 = 2^1 \cdot \boxed{15}$$

$$31 - \boxed{15} = 16 = 2^4 \cdot \boxed{1}$$

E voltamos para o número inicial, 1. Observando os expoentes que apareceram: $1 + 4 = 5$.

- Tomando agora, como número inicial, 3:

$$31 - 3 = 28 = 2^2 \cdot \boxed{7}$$

$$31 - \boxed{7} = 24 = 2^3 \cdot \boxed{3}$$

E voltamos para o 3. Observando os expoentes que apareceram: $2 + 3 = 5$.

- Tomando agora, como número inicial, 5 (observe que ele não apareceu ainda ao aplicarmos o algoritmo):

$$31 - 5 = 26 = 2^1 \cdot \boxed{13}$$

$$31 - \boxed{13} = 18 = 2^1 \cdot \boxed{9}$$

$$31 - \boxed{9} = 22 = 2^1 \cdot \boxed{11}$$

$$31 - \boxed{11} = 20 = 2^2 \cdot \boxed{5}$$

E voltamos para o 5. Observando os expoentes que apareceram: $1 + 1 + 1 + 2 = 5$.

Olhando atentamente agora, vemos que todos os ímpares menores do que $\frac{2^5}{2} = 16$ apareceram na aplicação do algoritmo e obtivemos todas as maneiras de representar o 5 como a soma de um número par de parcelas: $1 + 4 = 2 + 3 = 1 + 1 + 1 + 2$.

Agora é sua vez!

a) Começando agora com o número $2^6 + 1 = 65$, repita o procedimento, começando com o ímpar 3. Que maneira de representar o 6 como soma é obtida?

b) Utilizando o procedimento, obtenha todas as maneiras de representar 6 como soma de um número ímpar de parcelas.

PROBLEMA 3

No jogo “*You’re Bluffing*” (em tradução livre, “Você está Blefando”), criado por Rüdiger Koltze e conhecido popularmente como “Bodão”, cada jogador deve obter todas as cartas de cada um dos dez animais do jogo: galinha, pato, gato, cachorro, ovelha, bode, burro, porco, boi e cavalo. Cada animal possui uma pontuação diferente, conforme a figura a seguir. Por exemplo, o porco vale 650 pontos.

Infelizmente, não há espaço nem tempo para explicar os detalhes do funcionamento do jogo.

Ao final do jogo, cada animal passa a ser propriedade de um único jogador que conseguiu colecionar todas as cartas dele. A pontuação de cada jogador é a soma dos pontos dos animais que ele completou multiplicada pela quantidade de animais que ele completou. Por exemplo, se um jogador terminar o jogo com cachorro, bode e porco, sua pontuação é $(160 + 350 + 650) \times 3 = 3480$. O vencedor é o jogador que obtiver maior pontuação.



- a) Em uma partida, Humberto terminou com galinha, pato, gato, cachorro e ovelha, Doisberto terminou com vaca e cavalo e Trêsberto terminou com os demais animais. Quem ganhou essa partida?
- b) Em uma partida com 5 jogadores, Pedro conseguiu completar exatamente dois animais, entre eles a galinha. Pedro pode vencer o jogo? Justifique sua resposta.
- c) Em outra partida de Bodão com 5 jogadores, Pedro conseguiu completar apenas um animal. Pedro pode vencer o jogo? Justifique sua resposta.

PROBLEMA 4

Justapondo em ordem todos os números inteiros positivos $1, 2, 3, 4, \dots$ obtemos $1234567891011121314 \dots$. Toda vez que for possível encontrar um número antes da sua posição original, ele será chamado de *Early Bird*.

Por exemplo, 12 é um *Early Bird*, pois podemos localizá-lo no início da sequência, antes da sua posição original: 1234567891011121314 ... Note que 13 não é um *Early Bird*.

Outro exemplo de *Early Bird* é o número 8192, que aparece bem no começo, quando escrevemos $18 - 19 - 20$, ou seja, 181920. Ou então 1492, que aparece quando escrevemos $491 - 492$, ou seja, 491492.

a) Qual é o menor número inteiro positivo de três dígitos que é um *Early Bird*?

b) O número 314159 (baseado no número $\pi = 3,14159265 \dots$) é um *Early Bird*. E uma maneira para encontrá-lo antes de sua posição original na sequência é:

- Separamos 314159 em 3 e 14159.
- Buscamos agora dois números consecutivos com a forma XXXXX3 e 14159X.
- Encontramos 141593 e 141594.
- Verificamos que $314159 > 141594$.

Logo 314159 é um *Early Bird*, pois aparece em ... 141593141594

Vamos agora analisar o número 27182 (baseado na constante de Euler $e = 2,718281828 \dots$).

- Começamos separando 27182 em 2 e 7182.
- Buscamos então dois números consecutivos com a forma XXXX2 e 7182X.
- Encontramos 71822 e 71823. Mas $27182 < 71822$.
- Separamos então em 27 e 182 e obtemos 18227 e 18228.
- Verificamos que $27182 > 18228$.

Portanto, 27182 é um *Early Bird*, pois aparece em ... 1822718228

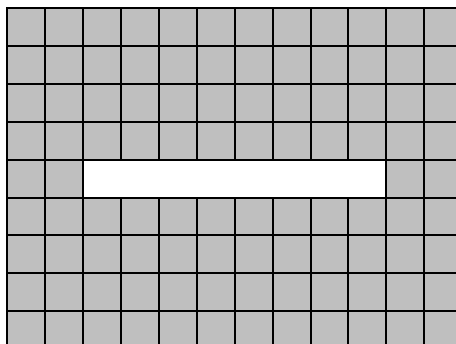
Agora é sua vez! Verifique se o número 57721 (baseado na constante de Euler-Mascheroni $\gamma = 0,5772156649 \dots$) é um *Early Bird*.

PROBLEMA 5

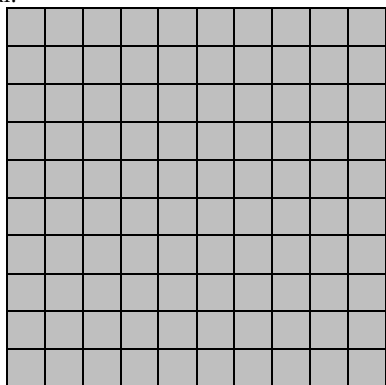
Martin Gardner foi um dos maiores expoentes da divulgação da Matemática, e através de sua coluna *Mathematical Games*, na revista *Scientific American*, publicada de 1956 a 1986, introduziu vários quebra-cabeças matemáticos que estimularam muitos, matemáticos profissionais ou não.

Um dos problemas propostos na coluna foi o seguinte:

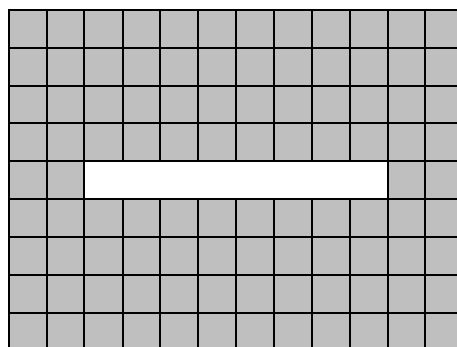
A colcha de retalhos na figura era originalmente formada por 108 quadrados unitários. Parte da colcha ficou velha e foi necessário retirar 8 quadrados dela, como a figura indica. Corte a colcha pelas linhas em dois pedaços iguais que podem ser costurados em uma colcha 10×10 .



Tiina Hohn e Andy Liu desenvolveram uma técnica para resolver problemas desse tipo. Primeiro, desenhamos o resultado final desejado ao lado da situação inicial:



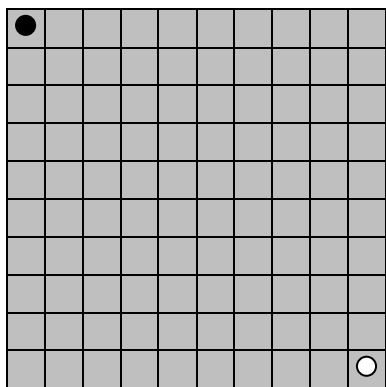
Final



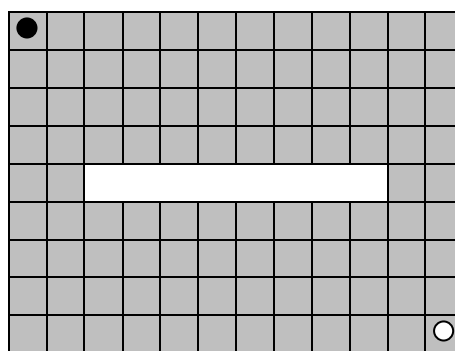
Inicial

Vamos preencher as duas peças com fichas: uma peça fica com fichas brancas e a outra, com fichas pretas. As duas colchas devem ser montadas com as mesmas duas peças; portanto, fichas de mesma cor devem preencher casas correspondentes das duas peças nas duas colchas. Ao terminarmos o preenchimento, as fichas brancas representarão uma peça e as fichas pretas, a outra peça.

Tentaremos obter soluções simétricas. Para isso, escolhemos dois cantos opostos e colocamos uma ficha preta em um canto e uma ficha branca no outro em ambas as colchas:

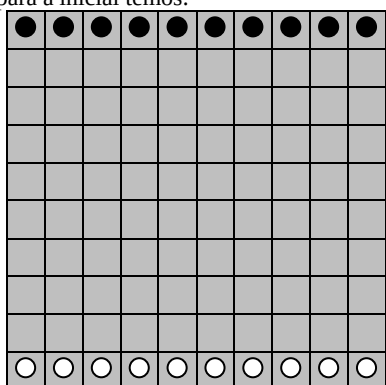


Final

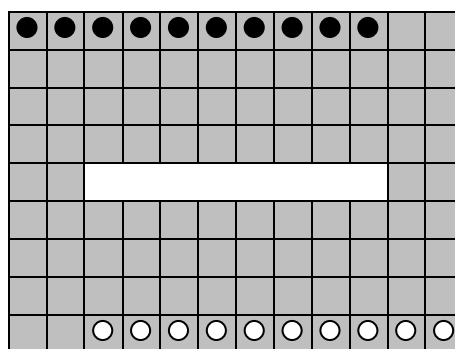


Inicial

A colcha inicial só tem nove linhas e a final, dez. Assim, cada peça vai ocupar no máximo nove linhas. Portanto, não há como haver fichas pretas na última linha da colcha final. Assim, na colcha final, toda a última linha tem fichas brancas e toda a primeira linha tem fichas pretas. Transferindo para a inicial temos:

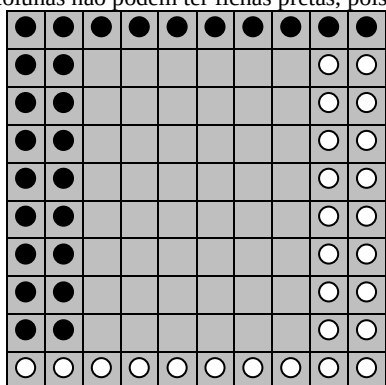


Final

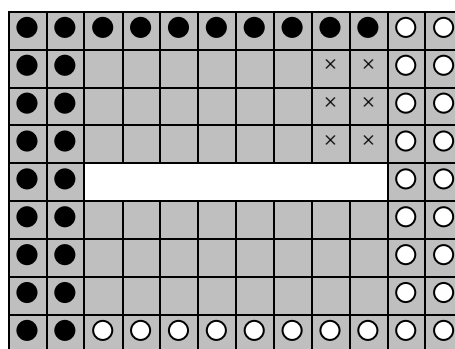


Inicial

Observe a colcha final: as peças devem ocupar dez colunas. Logo as duas primeiras colunas da colcha inicial não podem ter fichas brancas e as duas últimas colunas não podem ter fichas pretas, pois não há mais espaço na colcha final. Completando, temos:

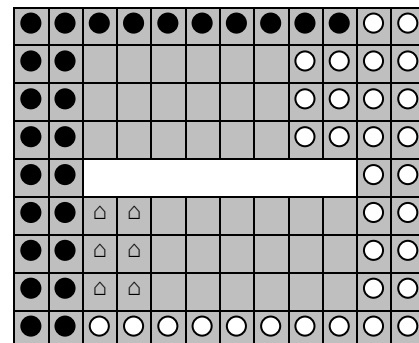
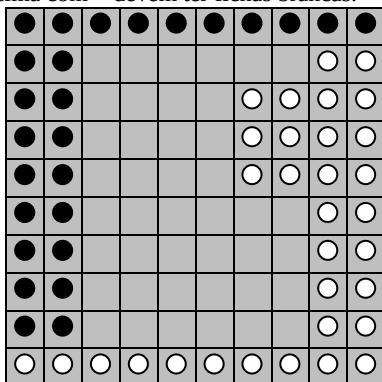
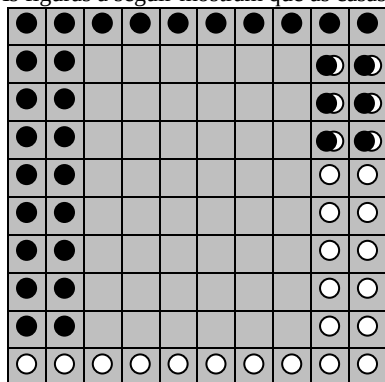


Final



Inicial

As figuras a seguir mostram que as casas marcadas acima com × devem ter fichas brancas.



Agora é a sua vez!

- Determine as cores nas casas marcadas com △.
- Termine de resolver o problema, preenchendo os tabuleiros final e inicial.

XXXVIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (9 de agosto de 2014)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)



Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Nesta questão vamos apresentar um pequeno mistério da Matemática. Ele será esclarecido na prova do nível γ (confira mais tarde!). Considere, por exemplo, $n = 5$.

- Tomamos, inicialmente, $2^5 - 1 = 31$ e, o menor número ímpar positivo, 1. Temos que:

$$31 - 1 = 30 = 2^1 \cdot \boxed{15}$$

$$31 - \boxed{15} = 16 = 2^4 \cdot \boxed{1}$$

E voltamos para o número inicial, 1. Observando os expoentes que apareceram: $1 + 4 = 5$.

- Tomando agora, como número inicial, 3:

$$31 - 3 = 28 = 2^2 \cdot \boxed{7}$$

$$31 - \boxed{7} = 24 = 2^3 \cdot \boxed{3}$$

E voltamos para o 3. Observando os expoentes que apareceram: $2 + 3 = 5$.

- Tomando agora, como número inicial, 5 (observe que ele não apareceu ainda ao aplicarmos o algoritmo):

$$31 - 5 = 26 = 2^1 \cdot \boxed{13}$$

$$31 - \boxed{13} = 18 = 2^1 \cdot \boxed{9}$$

$$31 - \boxed{9} = 22 = 2^1 \cdot \boxed{11}$$

$$31 - \boxed{11} = 20 = 2^2 \cdot \boxed{5}$$

E voltamos para o 5. Observando os expoentes que apareceram: $1 + 1 + 1 + 2 = 5$.

Olhando atentamente agora, vemos que todos os ímpares menores do que $\frac{2^5}{2} = 16$ apareceram na aplicação do algoritmo e obtivemos todas as maneiras de representar o 5 como a soma de um número par de parcelas: $1 + 4 = 2 + 3 = 1 + 1 + 1 + 2$.

a) Começando agora com o número $2^6 + 1 = 65$, repita o procedimento, começando com o ímpar 3. Que maneira de representar o 6 como soma é obtida?

b) Utilizando o procedimento, obtenha todas as maneiras de representar 6 como soma de um número ímpar de parcelas.

PROBLEMA 2

A música Gangnam Style, do rapper coreano Psy, fez muito sucesso e o seu vídeo já atingiu 2 bilhões de visualizações no YouTube. O clipe, de 4min12s, foi o primeiro a atingir essa marca.

Para esse problema, consideraremos que o número de visualizações é 2 bilhões, a duração do vídeo é 250 s e que cada visualização foi completa, ou seja, todos viram o clipe do começo ao fim.

a) Determine o total de horas destinadas à visualização desse clipe.

b) O número de horas gastas com a visualização do clipe é o mesmo número de horas de trabalho necessárias para construir 6 edifícios iguais ao Burj Khalifa, o edifício mais alto do mundo, com 828 m, que fica em Dubai. Quantas horas de trabalho foram necessárias para construir esse edifício?

c) Considere que o Burj Khalifa levou 6 anos para ser construído (2004 a 2010). Em média, quantas pessoas trabalharam por dia durante a construção?

PROBLEMA 3

Justapondo em ordem todos os números inteiros positivos 1, 2, 3, 4, ... obtemos 1234567891011121314 Toda vez que for possível encontrar um número antes da sua posição original, ele será chamado de *Early Bird*.

Por exemplo, 12 é um *Early Bird*, pois podemos localizá-lo no início da sequência, antes da sua posição original: 1234567891011121314 ... Note que 13 não é um *Early Bird*.

Outro exemplo de *Early Bird* é o número 8192, que aparece bem no começo, quando escrevemos $18 - 19 - 20$, ou seja, 181920. Ou então 1492, que aparece quando escrevemos $491 - 492$, ou seja, 491492.

a) Qual é o menor número inteiro positivo de três dígitos que é um *Early Bird*?

b) Quais dos números a seguir são *Early Birds*: 35, 53, 22, 94, 30? Não se esqueça de justificar sua resposta.

c) Quantos números *Early Bird* de dois dígitos existem?

PROBLEMA 4

Elevar números ao cubo sem usar calculadora é uma tarefa trabalhosa. Nesse problema, veremos um método para elevar números ao cubo mentalmente. Suponha que temos um número A que desejamos elevar ao cubo. Seja $A = z + d$, onde z é um número com dígito das unidades 0 e $d \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Usaremos a identidade

$$(z + d)^3 = z(z(z + 3d) + 3d^2) + d^3.$$

Agora basta calcularmos em três passos de dentro para fora:

- Primeiro, calculamos $m = z + 3d$.
- Em seguida, calculamos $n = z \cdot m + 3d^2$.
- Finalmente, calculamos $(z + d)^3 = z \cdot n + d^3$.

Por exemplo, se $A = 23$, tomemos $d = 3$ e $z = 20$, teremos:

- $m = 20 + 3 \cdot 3 = 29$.
- $n = 20 \cdot 29 + 3 \cdot 3^2 = 607$.
- Calculamos $(20 + 3)^3 = 20 \cdot 607 + 3^3 = 12140 + 27 = 12167$.

Suponha por outro lado que $A = 48$. Se fizermos $d = 8$, então fica “muito grande” (lembre-se que queremos fazer mentalmente). Por isso tomamos $d = -2$ e $z = 50$.

- $m = 50 + 3 \cdot (-2) = 44$.
- $n = 50 \cdot 44 + 3 \cdot (-2)^2 = 2212$.
- Calculamos $(50 + (-2))^3 = 50 \cdot 2212 + (-2)^3 = 110600 + (-8) = 110592$.

a) Agora é a sua vez! Use o método descrito para calcular 88^3 . Deixe explícitos os valores de m e n nos dois primeiros passos.

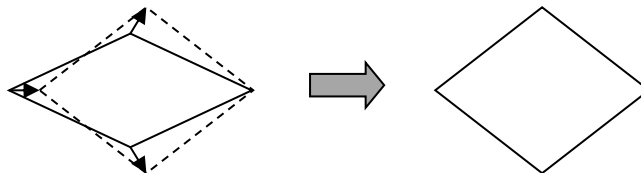
b) Prove que $(z + d)^3 = z(z(z + 3d) + 3d^2) + d^3$.

c) Calcule $\underbrace{2\,000 \dots 00}_{2014 \text{ zeros}} 3^3$.

PROBLEMA 5

Martin Gardner foi um dos maiores expoentes da divulgação da Matemática, e através de sua coluna *Mathematical Games*, na revista *Scientific American*, publicada de 1956 a 1986, introduziu vários quebra-cabeças matemáticos que estimularam muitos, matemáticos profissionais ou não.

Um dos problemas propostos na coluna, inventado por Raphael Robinson, consiste no seguinte: suponha que você tem varetas de comprimento 1, que se conectam só nas extremidades. Varetas conectadas podem girar em torno da conexão. Um triângulo fica rígido, mas um quadrilátero não: se você conectar quatro varetas, você forma um losango que pode ser deformado sem quebrar as varetas ou desconectar as extremidades.



O desafio é montar um quadrado rígido no plano. Por exemplo, só ter as quatro varetas acima e deformá-las para um quadrado não vale. A solução original de Robinson tinha 31 varetas além das quatro que formam o quadrado. A surpresa é que alguns leitores conseguiram soluções com menos varetas! Sete leitores conseguiram a solução da figura 1, que tem 23 varetas adicionais (27 ao todo).

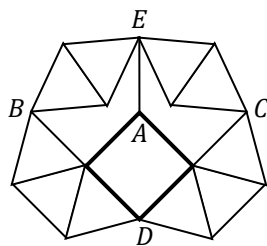


Figura 1

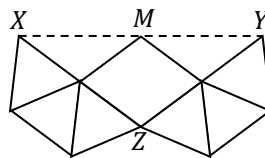


Figura 2

a) Calcule a medida de BE .

b) A estrutura na figura 2 não é rígida, mas os pontos X , Y e M estão sempre alinhados, não importando como a estrutura se mova. Justifique esse fato.

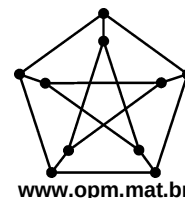
c) Explique por que $E\hat{A}C$ é um ângulo reto.

d) Calcule AC e explique por que o quadrilátero destacado deve ser necessariamente um quadrado.

XXXVI OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (9 de agosto de 2014)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)



www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

- Instruções:**
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
 - Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
 - Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
 - Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
 - Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
 - Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Elevar números ao cubo sem usar calculadora é uma tarefa trabalhosa. Nesse problema, veremos um método para elevar números ao cubo mentalmente. Suponha que temos um número A que desejamos elevar ao cubo. Seja $A = z + d$, onde z é um número com dígito das unidades 0 e $d \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Usaremos a identidade

$$(z + d)^3 = z(z(z + 3d) + 3d^2) + d^3.$$

Agora basta calcularmos em três passos de dentro para fora:

- Primeiro, calculamos $m = z + 3d$.
- Em seguida, calculamos $n = z \cdot m + 3d^2$.
- Finalmente, calculamos $(z + d)^3 = z \cdot n + d^3$.

Por exemplo, se $A = 23$, tomemos $d = 3$ e $z = 20$, teremos:

- $m = 20 + 3 \cdot 3 = 29$.
- $n = 20 \cdot 29 + 3 \cdot 3^2 = 607$.
- Calculamos $(20 + 3)^3 = 20 \cdot 607 + 3^3 = 12140 + 27 = 12167$.

Suponha por outro lado que $A = 48$. Se fizermos $d = 8$, então fica “muito grande” (lembre-se que queremos fazer mentalmente). Por isso tomamos $d = -2$ e $z = 50$.

- $m = 50 + 3 \cdot (-2) = 44$.
- $n = 50 \cdot 44 + 3 \cdot (-2)^2 = 2212$.
- Calculamos $(50 + (-2))^3 = 50 \cdot 2212 + (-2)^3 = 110600 + (-8) = 110592$.

a) Agora é a sua vez! Use o método descrito para calcular 88^3 . Deixe explícitos os valores de m e n nos dois primeiros passos.

b) Prove que $(z + d)^3 = z(z(z + 3d) + 3d^2) + d^3$.

c) Calcule $\underbrace{2\,000\,000}_{2014 \text{ zeros}} \cdot 3^3$.

PROBLEMA 2

Considere um experimento com somente dois resultados A e B . Suponha que a probabilidade de A ocorrer seja $p > 1/2$ (ou seja, A ocorre com mais frequência do que B). A *desigualdade de Hoeffding*, demonstrada em 1963, diz que a probabilidade de que A ocorra no máximo a metade de n vezes em que o experimento é repetido é menor ou igual a $e^{-2n(p-\frac{1}{2})^2}$.

Considere uma moeda viciada de modo que a probabilidade de sair uma das faces é 0,6. Digamos que queremos ter pelo menos 95% de certeza de qual é a face que sai mais vezes. Nesse problema, encontraremos, com o auxílio da desigualdade de Hoeffding, um número de lançamentos que garante isso.

a) Se $k = e^{-2n(p-\frac{1}{2})^2}$, calcule n em termos de k e p .

b) Queremos que a probabilidade de que escolhemos a face errada seja 0,05 ou menos. Com isso em mente, calcule usando a desigualdade de Hoeffding a quantidade de lançamentos que garante isso.

Você pode querer utilizar: $\ln 20 \cong 3$.

PROBLEMA 3

Dez pessoas muito tímidas devem se sentar em dez assentos enfileirados e numerados, na ordem, de **1 a 10**:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Essas pessoas são tímidas, então elas seguem essas regras:

- Uma pessoa de cada vez ocupa o seu assento e não sai mais dele;
- Um lugar é *desejável* se está vazio e os lugares vizinhos (um lugar no caso dos assentos 1 e 10 e dois lugares, $n - 1$ e $n + 1$, se $2 \leq n \leq 9$) estão também vazios. Cada pessoa, na sua vez, tenta encontrar um ou mais lugares desejáveis; caso consiga, escolhe qualquer um deles e se senta nele; caso não consiga, senta-se em qualquer lugar vazio.

Anotamos, na ordem, os assentos escolhidos pelas pessoas, obtendo uma sequência de números de 1 a 10. Uma tal sequência é denominada *permutação tímida*. Por exemplo, $(3, 5, 8, 1, 10, 2, 6, 7, 9, 4)$ é uma permutação tímida, mas $(3, 5, 8, 1, 2, 10, 6, 7, 9, 4)$ não é.

a) Considere a afirmação:

As n primeiras pessoas conseguem um lugar desejável, mas a $(n + 1)$ -ésima pessoa não consegue.

Quais são os possíveis valores de n ? Justifique sua resposta.

b) Para cada valor de n encontrado no item anterior, determine o número de listas não ordenadas dos n primeiros lugares ocupados. Por exemplo, uma lista é $\{2, 5, 8, 10\}$.

c) Calcule a quantidade de permutações tímidas dos números de 1 a 10.

PROBLEMA 4

Nesta questão vamos apresentar um pequeno mistério da Matemática que pode ser esclarecido com o auxílio da *Base Binária*.

Considere, por exemplo, $n = 5$.

- Tomamos, inicialmente, $2^5 - 1 = 31$ e, o menor número ímpar positivo, 1. Temos que:

$$31 - 1 = 30 = 2^1 \cdot \boxed{15}$$

$$31 - \boxed{15} = 16 = 2^4 \cdot \boxed{1}$$

E voltamos para o número inicial, 1. Observando os expoentes que apareceram: $1 + 4 = 5$.

- Tomando agora, como número inicial, 3:

$$31 - 3 = 28 = 2^2 \cdot \boxed{7}$$

$$31 - \boxed{7} = 24 = 2^3 \cdot \boxed{3}$$

E voltamos para o 3. Observando os expoentes que apareceram: $2 + 3 = 5$.

- Tomando agora, como número inicial, 5 (observe que ele não apareceu ainda ao aplicarmos o algoritmo):

$$31 - 5 = 26 = 2^1 \cdot \boxed{13}$$

$$31 - \boxed{13} = 18 = 2^1 \cdot \boxed{9}$$

$$31 - \boxed{9} = 22 = 2^1 \cdot \boxed{11}$$

$$31 - \boxed{11} = 20 = 2^2 \cdot \boxed{5}$$

E voltamos para o 5. Observando os expoentes que apareceram: $1 + 1 + 1 + 2 = 5$.

Olhando atentamente agora, vemos que todos os ímpares menores do que $\frac{2^5}{2} = 16$ apareceram na aplicação do algoritmo e obtivemos todas as maneiras de representar o 5 como a soma de um número par de parcelas: $1 + 4 = 2 + 3 = 1 + 1 + 1 + 2$.

De novo, para mais “mistério”:

- Tomamos, inicialmente, $2^5 + 1 = 33$ e, o menor número ímpar positivo, 1. Temos que:

$$33 - 1 = 32 = 2^5 \cdot \boxed{1}$$

E voltamos para o número inicial, 1. Observando os expoentes que apareceram: $5 = 5$.

- Tomando agora, como número inicial, 3:

$$33 - 3 = 30 = 2^1 \cdot \boxed{15}$$

$$33 - \boxed{15} = 18 = 2^1 \cdot \boxed{9}$$

$$33 - \boxed{9} = 24 = 2^3 \cdot \boxed{3}$$

E voltamos para o 3. Observando os expoentes que apareceram: $1 + 1 + 3 = 5$.

- Tomando agora, como número inicial, 5 (observe que ele não apareceu ainda ao aplicarmos o algoritmo):

$$33 - 5 = 28 = 2^2 \cdot \boxed{7}$$

$$33 - \boxed{7} = 26 = 2^1 \cdot \boxed{13}$$

$$33 - \boxed{13} = 20 = 2^2 \cdot \boxed{5}$$

E voltamos para o 5. Observando os expoentes que apareceram: $2 + 1 + 2 = 5$.

Olhando atentamente, vemos que obtivemos maneiras de representar o 5 como a soma de um número ímpar de parcelas: $5 = 1 + 1 + 3 = 2 + 1 + 2$, mas não todas. Está faltando $1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Contudo, ao aplicarmos o algoritmo, não apareceu ainda o 11. Vejamos:

$$33 - 11 = 22 = 2^1 \cdot \boxed{11}$$

E, podemos fazer:

$$33 - 11 = 22 = 2^1 \cdot \boxed{11}$$

$$33 - \boxed{11} = 22 = 2^1 \cdot \boxed{11}$$

$$33 - \boxed{11} = 22 = 2^1 \cdot \boxed{11}$$

$$33 - \boxed{11} = 22 = 2^1 \cdot \boxed{11}$$

$$33 - \boxed{11} = 22 = 2^1 \cdot \boxed{11}$$

obtendo o $1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Mistério!!

Como dissemos no começo do enunciado a Base Binária vai nos ajudar.

Para escrever um número na Base Binária, basta expressá-lo como uma soma de potências de 2, distintas e com expoente natural. Por exemplo:

$$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11111)_2 \text{ e}$$

$$3 = 2 + 1 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11)_2.$$

Colocando uma representação sobre a outra e comparando os $n = 5$ primeiros dígitos a “magia” acontece:

$$\begin{array}{r} \overline{(11111)}_2 \\ \overline{(00011)}_2 \end{array}$$

Olhando as representações da direita para a esquerda, temos que: há um grupo de dois algarismos iguais (primeiros e segundos); e, finalmente, há um grupo de três algarismos (terceiros, quartos e quintos) que são diferentes. Lembra a representação de 5 que o algoritmo forneceu nessa situação? $5 = 2 + 3$. *Interessante!*

Tomemos agora

$$33 = 32 + 1 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (100001)_2 \text{ e,}$$

$$11 = 8 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (1011)_2.$$

Colocando uma representação sobre a outra e comparando os $n = 5$ primeiros dígitos a “magia” acontece, de novo:

$$\begin{array}{r} \overline{(100001)}_2 \\ \overline{(001011)}_2 \end{array}$$

Olhando as representações da direita para a esquerda, temos que: os primeiros algarismos são iguais; os segundos algarismos são diferentes; os terceiros são iguais; os quartos são diferentes; e finalmente, os quintos que são iguais. Lembra a representação de 5 que o algoritmo forneceu nessa situação? $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. *Muito interessante!*

a) Seja $n = 7$. Aplique o algoritmo para $2^7 + 1$ e para o ímpar 19. Qual representação de 7 como soma de um número ímpar de parcelas é obtida?

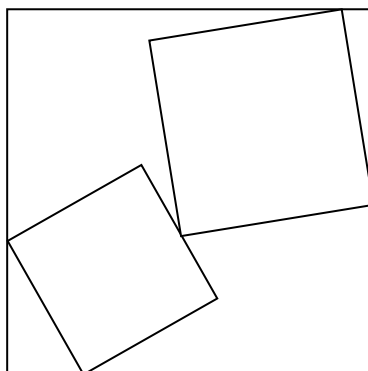
b) Através do algoritmo, pode-se obter, de mais uma maneira, 7 como a soma de duas parcelas iguais a 1, uma parcela igual a 2 e uma parcela igual a 3: uma obtém as parcelas 1,1,2,3, nessa ordem; outra obtém as parcelas 1,2,1,3, nessa ordem; e outra obtém as parcelas 1,1,3,2. Para cada uma dessas três sequências, apresente um ímpar menor do que $2^7/2$ que a gere.

c) Não nos preocuparemos agora em demonstrar por que a correspondência entre a aplicação do algoritmo e a representação binária funciona (você pode fazer isso no aconchego do seu lar). Supondo que essa correspondência vale, prove que, para todo n inteiro positivo, aplicando o algoritmo para $2^n - 1$ obtemos as maneiras de representar n com uma quantidade par de parcelas e aplicando o algoritmo para $2^n + 1$ obtemos as maneiras de representar n com uma quantidade ímpar de parcelas.

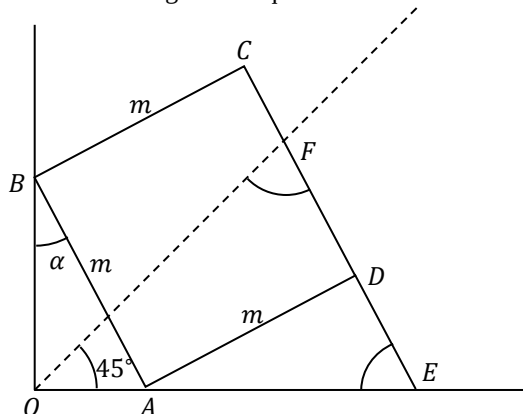
PROBLEMA 5

Provaremos aqui que se dois quadrados de lados m e n cujos interiores não se intersectam estão contidos em um quadrado de lado 1 então $m + n \leq 1$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que os quadrados estão na seguinte posição (você pode verificar isso no aconchego do seu lar):



a) Considere o quadrado da esquerda inferior e trace a diagonal do quadrado de lado 1:



Calcule, em função de α , as medidas dos ângulos $\widehat{OEF}$ e $\widehat{OFE}$.

b) A lei dos senos no triângulo XYZ nos diz que

$$\frac{XY}{\sin \widehat{XZY}} = \frac{XZ}{\sin \widehat{XYZ}} = \frac{YZ}{\sin \widehat{YXZ}}.$$

Aplicando-a no triângulo OEF , mostre que

$$OF = \frac{m\sqrt{2}(\sin \alpha \cos \alpha + 1)}{\cos \alpha + \sin \alpha}.$$

c) Prove que $OF \geq m\sqrt{2}$.

d) Prove que $m + n \leq 1$.

Você pode querer utilizar as seguintes fórmulas:

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

e o fato de que se $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ então $0 \leq \sin \alpha \leq 1$, $0 \leq \cos \alpha \leq 1$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ e $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.