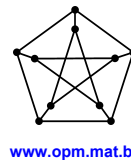


XXXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (8 de agosto de 2015)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)
Folha de Perguntas

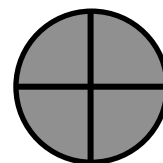


- Instruções:**
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
 - Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
 - Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
 - Todas as respostas devem ser **justificadas** e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
 - Resoluções a tinta ou a lápis.
 - É permitido o uso de calculadora simples (não é permitida a de telefones/aparelhos com acesso à Internet).
 - Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

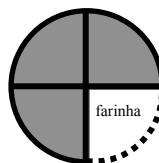
PROBLEMA 1

Nhoque de batatas é um prato tradicional na Itália e conhecido mundialmente. Uma receita bem tradicional para prepará-lo é usando apenas batata e farinha de trigo, da seguinte maneira:

- 1) Cozinhe as batatas em água até que estejam macias.
- 2) Escorra, descasque e passe as batatas pelo espremedor, ainda quentes.
- 3) Amasse bem e forme um bolo circular, como na figura. Em seguida, divida o bolo em quatro partes iguais.



- 4) Remova então uma parte e preencha esse lugar com farinha de trigo.



- 5) Junte de volta a parte de batata retirada e misture bem os dois ingredientes.
- 6) A massa está pronta. Comece então a separar pequenas porções da massa e fazer os rolinhos, os nhoques!
- 7) Agora coloque os nhoques em água fervente temperada com sal, e cozinhe até eles começarem a boiar na água. Retire-os, escorra bem e coloque-os numa travessa, servindo com o seu molho de preferência. Bom apetite!

- a) Independente da quantidade de batata usada na receita, qual é a porcentagem de farinha em relação ao total da massa pronta?
- b) Picolino Giorgio vai preparar um almoço de domingo para a sua família e planeja fazer nhoque para 12 pessoas. Ele calcula que cada pessoa comerá 250g de nhoque. Sendo assim, quanto de batata e quanto de farinha ele precisará para o preparo? Considere que não há perda dos ingredientes e dê sua resposta em gramas.

Observação: nesse problema considere que mesmos volumes de farinha e batatas têm o mesmo peso.

PROBLEMA 2

Em um Quadrado Mágico 4×4 , a soma dos números das quatro linhas, das quatro colunas e das duas diagonais é sempre a mesma, chamada de Soma Mágica.

Mandrácula, um mágico romeno, mostra uma “matemágica” para preenchimento do Quadrado Mágico em sua apresentação. Para ficar mais desafiante, ele pergunta a data de nascimento de um voluntário da plateia e coloca essa informação na primeira linha. Wesley S., o voluntário, nasceu em 16 de setembro de 1978, e Mandrácula preencheu a primeira linha do Quadrado Mágico assim: na primeira coluna ele colocou o dia, na segunda, o mês e, nas outras duas, a dezena e a unidade do ano em que Wesley S. nasceu.

16	9	7	8

Em seguida, Mandrácula colocou o mês e a dezena do ano de nascimento do S., digo Wesley, na última linha, dizendo para plateia que assim a data apareceria nos quatro cantos do quadrado. Além disso, pediu para Wesley dizer um número inteiro positivo. Quando ele ouviu 3 de S., digo Wesley, ele imediatamente preencheu usando a sua “matemágica” a segunda linha com $8 - 3 = 5$, $7 + 3 = 10$, $16 - 3 = 13$ e $9 + 3 = 12$, da esquerda para a direita. Com essas informações, o quadrado ficou como mostra a figura.

16	9	7	8
5	10	13	12
9			7

- a) Qual é a Soma Mágica do Quadrado Mágico de Wesley S.?
- b) Termine de preenchê-lo, completando as seis casas restantes do Quadrado Mágico de Wesley.
- c) Agora é sua vez! Apresente um Quadrado Mágico completo a partir da data de nascimento de Sidney M., que é 19 de junho de 1953, segundo a matemágica do Mandrácula e sabendo que Sidney M. disse o número 2.

PROBLEMA 3

Os testes de divisibilidade são muito importantes para verificar se números (geralmente grandes) são divisíveis por outros números sem efetuar a divisão. O *Método de Zbikowski* serve para testar se certo número é divisível por um número p que possui dígito das unidades igual a 1, 3, 7 ou 9. O primeiro passo é multiplicar p por 1, 7, 3 ou 9, respectivamente, de modo que o resultado seja um número com dígito das unidades 1, ou seja, que pode ser escrito na forma $10k + 1$.

Por exemplo, consideremos $p = 37$. Esse número possui dígito das unidades igual a 7 e, portanto, vamos multiplicá-lo por 3. Temos então como resultado $111 = 10 \cdot 11 + 1$, ou seja, $k = 11$.

Seja $n = 10a + b$ o número que queremos verificar se é múltiplo de p . Pode-se concluir que p divide $10a + b$ se, e somente se, p divide $a - kb$. Com isso, podemos trocar o número n por um número cada vez menor, até que mentalmente possamos realizar a divisão.

Por exemplo, para verificar se 2035 é divisível por 37, sem realizar a divisão, lembrando que já obtivemos $k = 11$, temos:

- $2035 = 10 \cdot 203 + 5$ é divisível por 37 $\Leftrightarrow 203 - 11 \cdot 5 = 148$ é divisível por 37. Nesse caso, $a = 203$ e $b = 5$.
- $148 = 10 \cdot 14 + 8$ é divisível por 37 $\Leftrightarrow 14 - 11 \cdot 8 = -74$ é divisível por 37.

Desse modo, seguimos os passos $2035 \rightarrow 148 \rightarrow -74$ e, como $-74 = 37 \cdot (-2)$ é múltiplo de 37, concluímos que 2035 é divisível por 37. Observe que se, após os passos, tivéssemos um número que não fosse múltiplo de 37, então o número que começou o processo não seria divisível por 37.

a) Usando o método de Zbikowski, verifique se o número 22423 é divisível por 17. Lembre-se de expressar na sua resposta cada um dos números intermediários usados e o número final de dois dígitos, possivelmente negativo, que é ou não divisível por 17.

Em alguns casos, a multiplicação por k se torna trabalhosa. Uma opção é usar o número $a + (p - k)b$ no lugar do número $a - kb$. Então, quando $k < p - k$, utiliza-se o número $a - kb$ e, quando $k > p - k$, utiliza-se $a + (p - k)b$.

b) Para $p = 23$ verifique qual dos números k ou $p - k$ é menor. Usando o método de Zbikowski, verifique se 31721 é divisível por 23. Novamente, lembre-se de expressar na sua resposta cada um dos números intermediários.

c) Usando o método de Zbikowski, verifique se 19 e 41 são divisores do número 155059. Novamente, lembre-se de expressar na sua resposta cada um dos números intermediários.

PROBLEMA 4

Wesley S. quer colocar no tabuleiro 3×5 , representado na figura 1, a maior quantidade possível de peças S-tetraminó, representada na figura 2. Observe que cada peça S-tetraminó deve cobrir exatamente quatro quadradinhos do tabuleiro que não foram cobertos por outra peça, ou seja, não pode haver sobreposição. E cada peça pode ser girada para ser adequadamente colocada sobre o tabuleiro.

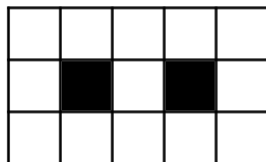


Figura 1

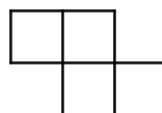


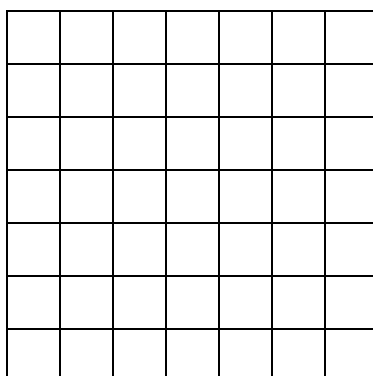
Figura 2

a) Mostre que cada S-tetraminó colocado no tabuleiro cobre exatamente um dos quadradinhos pretos.

b) Determine a maior quantidade possível de peças S-tetraminó que Wesley S. pode colocar no tabuleiro. Lembre-se de justificar sua resposta.

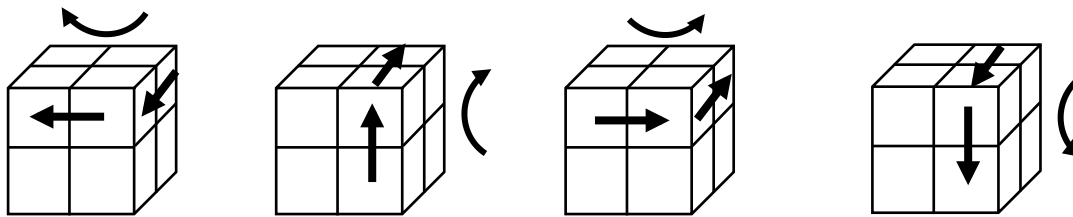
c) Wesley S. decidiu trocar seu tabuleiro 3×5 por um tabuleiro 7×7 , como o da figura. Determine a maior quantidade possível de peças S-tetraminó que ele pode colocar no tabuleiro 7×7 .

Observe que para provar que uma quantidade é máxima você deve mostrar que não é possível colocar mais peças e deve exibir um exemplo com essa quantidade de peças.

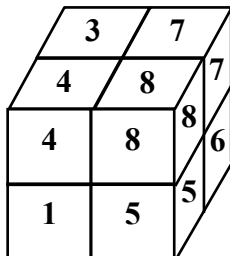


PROBLEMA 5

Um dos movimentos mais conhecidos na resolução do Cubo Mágico é o *Sexy Move*. No diagrama a seguir, mostramos os 4 movimentos (giros de 90° em uma das camadas do cubo) que compõem o Sexy Move. Utilizaremos um cubo $2 \times 2 \times 2$.



a) Um cubo $2 \times 2 \times 2$ é formado por 8 cubinhos unitários os quais iremos numerar da forma indicada abaixo.



Observe que o único cubinho que não aparece no desenho é o de número 2.

É fácil ver que após os quatro movimentos que compõem o Sexy Move, os cubinhos 1 e 2 continuam nas suas posições originais.

Indicaremos isso utilizando a seguinte notação: $1 \rightarrow 1$; $2 \rightarrow 2$.

Utilizando a mesma notação, indique o que acontece com os demais seis cubinhos unitários, ou seja, complete:

$3 \rightarrow \dots$; $4 \rightarrow \dots$; $5 \rightarrow \dots$; $6 \rightarrow \dots$; $7 \rightarrow \dots$; $8 \rightarrow \dots$

b) Após duas aplicações do Sexy Move, podemos observar que todos os cubinhos estão nas suas posições originais, porém alguns sofreram rotações (giros).

Observando a posição do cubinho 3 como mostra a figura a seguir, determine de quantos graus foi a sua rotação e em qual sentido (horário ou anti-horário).

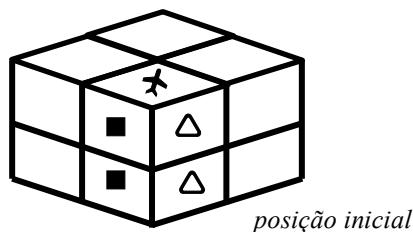
Você pode usar os desenhos colocados no cubinho como uma referência para determinar a rotação.



c) Após três aplicações do Sexy Move, podemos observar que os cubinhos 5 e 8 trocaram as suas posições. Na verdade, podemos dizer com maior precisão que esse par de cubos sofreu uma rotação.

Observando a posição desses cubos na figura a seguir, determine de quantos graus foi a rotação e em qual sentido (horário ou anti-horário).

Você pode usar os desenhos colocados nos cubinhos como uma referência para determinar a rotação.



d) Após quantas aplicações do Sexy Move o cubo irá voltar pela primeira vez à sua situação original, ou seja, com todas as faces como estavam no começo? Não se esqueça de justificar a sua resposta!

XXXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (8 de agosto de 2015)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

Folha de Perguntas



- Instruções:**
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
 - Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
 - Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
 - Todas as respostas devem ser **justificadas** e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
 - Resoluções a tinta ou a lápis.
 - É permitido o uso de calculadora simples (não é permitida a de telefones/aparelhos com acesso à Internet).
 - Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em um Quadrado Mágico 4×4 , a soma dos números das quatro linhas, das quatro colunas e das duas diagonais é sempre a mesma, chamada de Soma Mágica.

Mandrácula, um mágico romeno, mostra uma “matemágica” para preenchimento do Quadrado Mágico em sua apresentação. Para ficar mais desafiante, ele pergunta a data de nascimento de um voluntário da plateia e coloca essa informação na primeira linha. Wesley S., o voluntário, nasceu em 16 de setembro de 1978, e Mandrácula preencheu a primeira linha do Quadrado Mágico assim: na primeira coluna ele colocou o dia, na segunda, o mês e, nas outras duas, a dezena e a unidade do ano em que Wesley S. nasceu.

16	9	7	8

Em seguida, Mandrácula colocou o mês e a dezena do ano de nascimento do S., digo Wesley, na última linha, dizendo para plateia que assim a data apareceria nos quatro cantos do quadrado. Além disso, pediu para Wesley dizer um número inteiro positivo. Quando ele ouviu 3 de S., digo Wesley, ele imediatamente preencheu usando a sua “matemágica” a segunda linha com $8 - 3 = 5$, $7 + 3 = 10$, $16 - 3 = 13$ e $9 + 3 = 12$, da esquerda para a direita. Com essas informações, o quadrado ficou como mostra a figura.

16	9	7	8
5	10	13	12
9			7

- a) Termine de preenchê-lo, completando as seis casas restantes do Quadrado Mágico de Wesley.
b) Agora é sua vez! Apresente um Quadrado Mágico completo a partir da data de nascimento de Sidney M., que é 19 de junho de 1953, segundo a matemágica do Mandrácula e sabendo que Sidney M. disse o número 2.

PROBLEMA 2

Os testes de divisibilidade são muito importantes para verificar se números (geralmente grandes) são divisíveis por outros números sem efetuar a divisão. O *Método de Zbikowski* serve para testar se certo número é divisível por um número p que possui dígito das unidades igual a 1, 3, 7 ou 9. O primeiro passo é multiplicar p por 1, 7, 3 ou 9, respectivamente, de modo que o resultado seja um número com dígito das unidades 1, ou seja, que pode ser escrito na forma $10k + 1$.

Por exemplo, consideremos $p = 37$. Esse número possui dígito das unidades igual a 7 e, portanto, vamos multiplicá-lo por 3. Temos então como resultado $111 = 10 \cdot 11 + 1$, ou seja, $k = 11$.

Seja $n = 10a + b$ o número que queremos verificar se é múltiplo de p . Pode-se concluir que p divide $10a + b$ se, e somente se, p divide $a - kb$. Com isso, podemos trocar o número n por um número cada vez menor, até que mentalmente possamos realizar a divisão.

Por exemplo, para verificar se 2035 é divisível por 37, sem realizar a divisão, lembrando que já obtivemos $k = 11$, temos:

- $2035 = 10 \cdot 203 + 5$ é divisível por 37 $\Leftrightarrow 203 - 11 \cdot 5 = 148$ é divisível por 37. Nesse caso, $a = 203$ e $b = 5$.
- $148 = 10 \cdot 14 + 8$ é divisível por 37 $\Leftrightarrow 14 - 11 \cdot 8 = -74$ é divisível por 37.

Desse modo, seguimos os passos $2035 \rightarrow 148 \rightarrow -74$ e, como $-74 = 37 \cdot (-2)$ é múltiplo de 37, concluímos que 2035 é divisível por 37. Observe que se, após os passos, tivéssemos um número que não fosse múltiplo de 37, então o número que começou o processo não seria divisível por 37.

- a) Usando o método de Zbikowski, verifique se o número 22423 é divisível por 17. Lembre-se de expressar na sua resposta cada um dos números intermediários usados e o número final de dois dígitos, possivelmente negativo, que é ou não divisível por 17.

Em alguns casos, a multiplicação por k se torna trabalhosa. Uma opção é usar o número $a + (p - k)b$ no lugar do número $a - kb$. Então, quando $k < p - k$, utiliza-se o número $a - kb$ e, quando $k > p - k$, utiliza-se $a + (p - k)b$.

- b) Para $p = 23$ verifique qual dos números k ou $p - k$ é menor. Usando o método de Zbikowski, verifique se 31721 é divisível por 23. Novamente, lembre-se de expressar na sua resposta cada um dos números intermediários.

- c) Usando o método de Zbikowski, verifique se 19 e 41 são divisores do número 155059. Novamente, lembre-se de expressar na sua resposta cada um dos números intermediários.

Se p possui dígitos das unidades igual a 7, então $p = 10c + 7$. Então devemos multiplicar p por 3 e obtemos

$$3p = 3(10c + 7) = 10(3c + 2) + 1$$

Implicando $k = 3c + 2$ e $p - k = 10c + 7 - (3c + 2) = 7c + 5$. Desse modo, $k < p - k$ e usamos o número $a - kb$ no método de Zbikowski.

d) Considerando os números das formas $p = 10c + 1$, $p = 10c + 3$ e $p = 10c + 9$, determine em cada caso o menor dos números, k ou $p - k$. Não se esqueça de justificar a sua resposta em cada caso!

PROBLEMA 3

Wesley S. quer colocar no tabuleiro 3×5 , representado na figura 1, a maior quantidade possível de peças S-tetraminó, representada na figura 2. Observe que cada peça S-tetraminó deve cobrir exatamente quatro quadradinhos do tabuleiro que não foram cobertos por outra peça, ou seja, não pode haver sobreposição. E cada peça pode ser girada para ser adequadamente colocada sobre o tabuleiro.

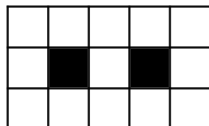


Figura 1

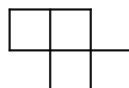
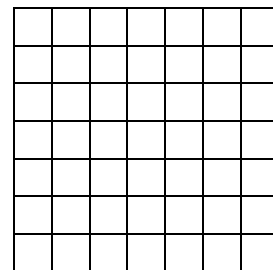


Figura 2

- Mostre que cada S-tetraminó colocado no tabuleiro cobre exatamente um dos quadradinhos pretos.
- Determine a maior quantidade possível de peças S-tetraminó que Wesley S. pode colocar no tabuleiro? Lembre-se de justificar sua resposta.
- Wesley S. decidiu trocar seu tabuleiro 3×5 por um tabuleiro 7×7 , como o da figura. Determine a maior quantidade possível de peças S-tetraminó que ele pode colocar no tabuleiro 7×7 . Observe que para provar que uma quantidade é máxima você deve mostrar que não é possível colocar mais peças e deve exibir um exemplo com essa quantidade de peças.



PROBLEMA 4

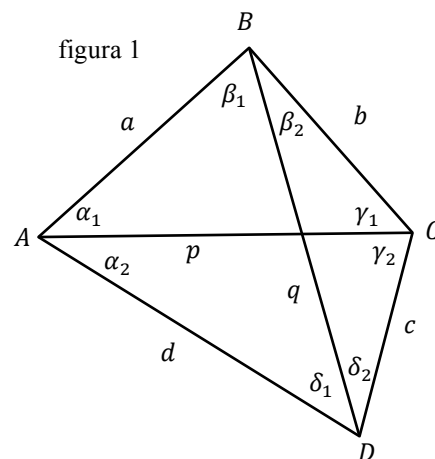
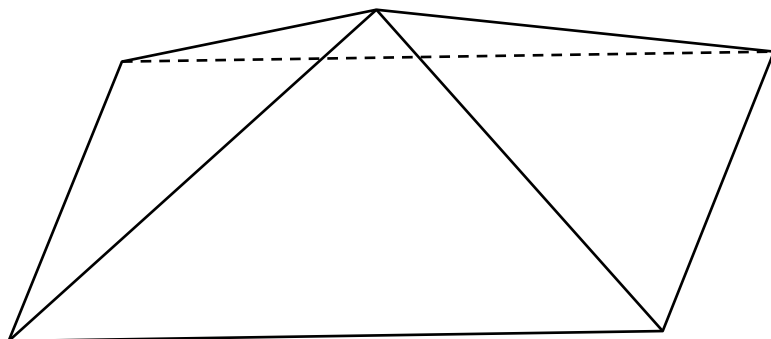
Um dos teoremas mais importantes sobre quadriláteros é a *Desigualdade de Ptolomeu*:

Em um quadrilátero convexo cujos lados têm medidas a, b, c e d (nessa ordem) e as diagonais têm medidas p e q , tem-se que $p \cdot q \leq a \cdot c + b \cdot d$.

Nessa questão iremos aprender uma demonstração desse teorema.

Considere a figura a seguir em que, por construção:

$\triangle ABC$ (figura 1) é semelhante a $\triangle EFG$; $\triangle ABD$ (da figura 1) é semelhante a $\triangle HGF$ e $\triangle CBD$ (da figura 1) é semelhante a $\triangle IEF$. Fazemos, ainda, $EG = p \cdot q$.



- Determine as medidas de FH e FI .
- Prove que $IEGH$ é um paralelogramo e conclua a demonstração do teorema. Nesse item você pode desejar utilizar o fato de que $IEGH$ é um paralelogramo se, e somente se, $EI = GH$ e as retas EI e GH são paralelas.
- Supondo que $p \cdot q = a \cdot c + b \cdot d$, calcule $\angle ABC + \angle CDA$, ou seja, a soma dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ do quadrilátero inicial.

PROBLEMA 5

Algo muito importante quando trabalhamos com polinômios é encontrar suas raízes. Quando o polinômio possui grau 2, podemos resolver a equação do 2º grau. Quando o polinômio possui grau maior que 2, essa tarefa pode ser tornar muito complicada. Nesse problema vamos ver o *Método de Lill* para descobrir raízes reais de um polinômio de coeficientes reais.

Considere o polinômio p dado por $6x^3 + 17x^2 + 11x + 2$. As raízes desse polinômio são valores de x tais que o resultado da expressão é zero, ou seja, são as soluções da equação $6x^3 + 17x^2 + 11x + 2 = 0$. Para usar o Método de Lill, construímos uma linha poligonal, começando na origem e seguindo, alternadamente, trechos paralelos aos eixos coordenados. As medidas de cada trecho devem ser iguais, respectivamente, aos coeficientes do polinômio, como na figura 1. Chamaremos essa linha poligonal de *caminho de Lill de p* .

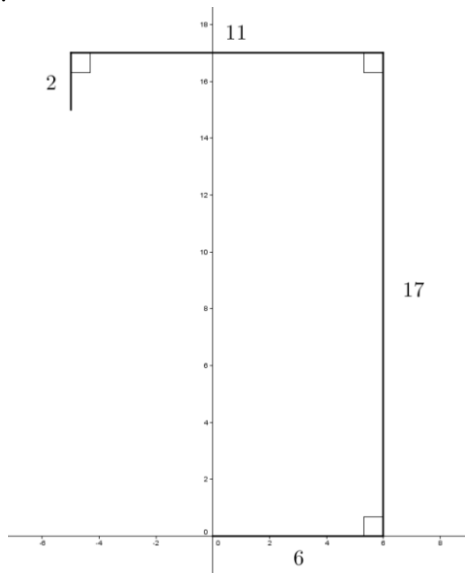


Figura 1

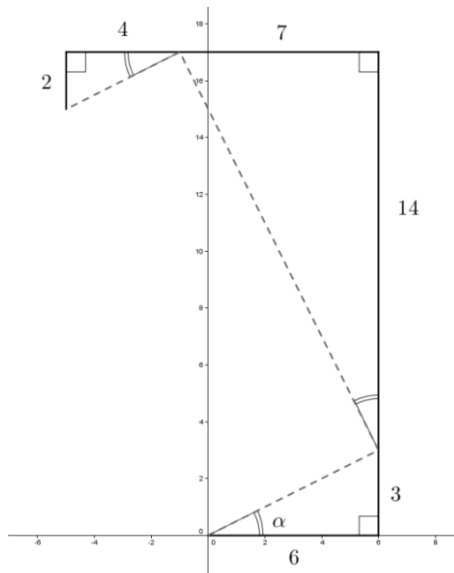
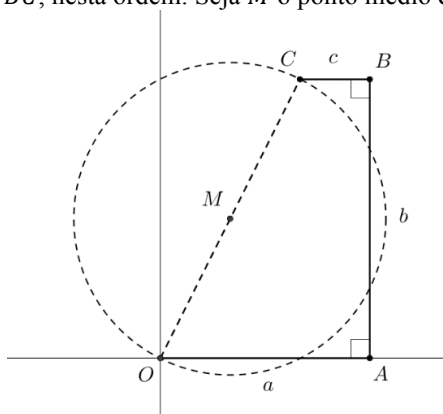


Figura 2

Observe agora na figura 2 a linha tracejada formada no interior do caminho de Lill. Veja que ela também parte da origem, forma o mesmo ângulo α com cada um dos trechos do caminho de Lill e termina no mesmo ponto que o caminho de Lill termina. Observe que há três triângulos retângulos semelhantes na figura. Segundo o Método de Lill, isso implica que o oposto da razão entre os catetos $-\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = -\frac{3}{6} = -\frac{7}{14} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ é raiz do polinômio p .

Agora é a sua vez!

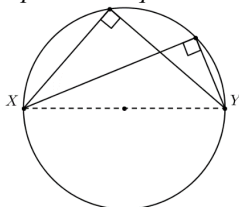
- Usando o Método de Lill, mostre que os números $-\frac{1}{3}$ e -2 também são raízes do polinômio $6x^3 + 17x^2 + 11x + 2$. Não esqueça de escrever na sua figura os comprimentos de todos os segmentos formados sobre o caminho de Lill.
- Dizemos que o caminho de Lill é fechado quando termina na origem. Seja $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio de grau 4 com coeficientes reais positivos e caminho de Lill fechado. Sabendo que -1 é raiz desse polinômio, mostre que o caminho de Lill forma um quadrado.
- Seja q um polinômio de grau 2 com coeficientes reais positivos dado por $ax^2 + bx + c$. O caminho de Lill de q é representado na figura a seguir pelos segmentos OA , AB e BC , nesta ordem. Seja M o ponto médio do segmento OC .



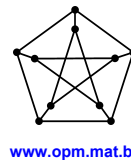
Determine a medida do segmento OC e a distância do ponto M até a reta AB em função de a , b e c .

- Usando o caminho de Lill de q , mostre que se $b^2 - 4ac \geq 0$, então o polinômio possui raiz real.

Dica: dados dois pontos X e Y no plano, os pontos P no plano tais que $\angle XPY = 90^\circ$ estão sobre a circunferência de diâmetro XY .



XXXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Primeira Fase (8 de agosto de 2015)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)
Folha de Perguntas



- Instruções:**
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
 - Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
 - Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
 - Todas as respostas devem ser **justificadas** e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
 - Resoluções a tinta ou a lápis.
 - É permitido o uso de calculadora simples (não é permitida a de telefones/aparelhos com acesso à Internet).
 - Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em problemas de Física, muitas vezes desprezamos a resistência do ar em lançamentos. Isso pode causar discrepâncias grandes nos cálculos. Considere uma nuvem de chuva a 2000 metros do solo. Vamos calcular a velocidade de uma gota d'água ao atingir o solo sem e com a resistência do ar.

a) Se desprezarmos a resistência do ar, podemos calcular a velocidade pela equação

$$mgh = \frac{mv^2}{2},$$

em que m é a massa da gota, $g = 10 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade, $h = 2000 \text{ m}$ é a altura e v é a velocidade desejada. Nessas condições, calcule v .

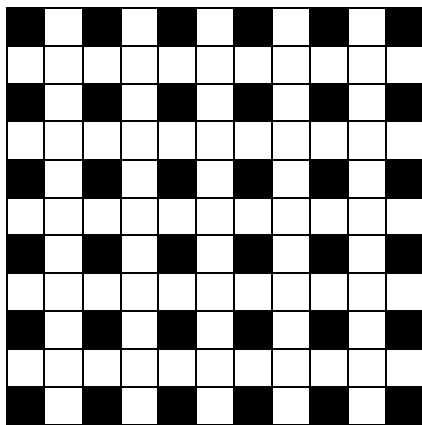
b) Se considerarmos a resistência do ar, a velocidade é calculada resolvendo a equação

$$\rho_{\text{água}} Vg = \frac{1}{2} \rho_{\text{ar}} ACu^2,$$

em que $g = 10 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade, $\rho_{\text{água}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ é a densidade da água, $\rho_{\text{ar}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ é a densidade do ar, $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ é o volume da gota d'água, $A = \pi R^2$ é a área seccional da gota, $R = 0,001 \text{ m}$ é o raio da gota d'água, $C = 0,08$ é o coeficiente aerodinâmico da gota, e u é a velocidade desejada. Calcule u .

PROBLEMA 2

Wesley S. quer preencher o tabuleiro 11×11 (figura à esquerda), no qual algumas de suas casas foram pintadas, com peças quadradas 2×2 e em formato de L (figuras à direita), sem sobreposição e sem que partes das peças fiquem fora do tabuleiro. A peça em formato de L pode ser girada para ser adequadamente colocada sobre o tabuleiro.



Sejam x a quantidade de peças quadradas e y a quantidade de peças em formato de L.

- Mostre que $4x + 3y = 121$.
- Considerando as quantidades de casinhas pintadas que cada peça pode cobrir, mostre que são necessárias pelo menos 36 peças para cobrir o tabuleiro.
- Mostre que são necessárias pelo menos 23 peças em formato de L para cobrir o tabuleiro. Nesse item você **não** precisa apresentar um preenchimento do tabuleiro usando exatamente 23 peças em formato de L.

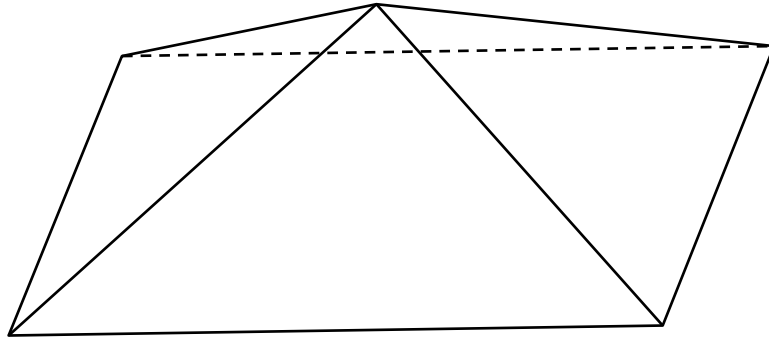
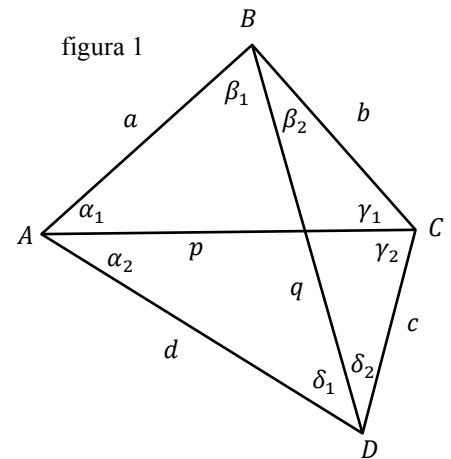
PROBLEMA 3

Um dos teoremas mais importantes sobre quadriláteros é a *Desigualdade de Ptolomeu*.
Em um quadrilátero convexo cujos lados têm medidas a, b, c e d (nessa ordem) e as diagonais têm medidas p e q , tem-se que $p \cdot q \leq a \cdot c + b \cdot d$.

Nessa questão iremos aprender uma demonstração desse teorema.

Considere a figura a seguir em que, por construção:

$\triangle ABC$ (figura 1) é semelhante a $\triangle EFG$; $\triangle ABD$ (da figura 1) é semelhante a $\triangle HGF$ e $\triangle CBD$ (da figura 1) é semelhante a $\triangle IEF$. Fazemos, ainda, $EG = p \cdot q$.



a) Determine as medidas de FH e FI .

b) Prove que $IEGH$ é um paralelogramo e conclua a demonstração do teorema.

Nesse item você pode desejar utilizar o fato de que $IEGH$ é um paralelogramo se, e somente se, $EI = GH$ e as retas EI e GH são paralelas.

c) Supondo que $p \cdot q = a \cdot c + b \cdot d$, calcule $\angle ABC + \angle CDA$, ou seja, a soma dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ do quadrilátero inicial.

PROBLEMA 4

Leonhard Euler, que viveu no século XVIII, foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Uma de suas fórmulas é:

$$a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1 a_2 + \cdots + a_0 a_1 \cdots a_n = \frac{a_0}{1 - \frac{a_1}{1 + a_1 - \frac{a_2}{1 + a_2 - \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1} - \frac{a_n}{1 + a_n}}}}}$$

a) Simplifique:

$$1 - \frac{a_1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_2 a_3 \cdots a_n}}$$

b) Mostre que a fórmula é válida para todo n natural.

c) É possível estender a fórmula para somas infinitas, desde que as somas tenham resultados finitos. Isto é,

$$a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1 a_2 + \cdots + a_0 a_1 \cdots a_n + \cdots = \frac{a_0}{1 - \frac{a_1}{1 + a_1 - \frac{a_2}{1 + a_2 - \frac{a_3}{1 + a_3 - \ddots}}}}$$

Observando que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

escreva o número e na forma:

$$\frac{a_0}{1 - \frac{a_1}{1 + a_1 - \frac{a_2}{1 + a_2 - \frac{a_3}{1 + a_3 - \ddots}}}}$$

PROBLEMA 5

Nessa questão mostraremos como obter um triângulo escaleno com lados de medida inteira tal que o cosseno de um de seus ângulos é igual a $\frac{1}{3}$.

a) Sendo α a medida do ângulo de um triângulo tal que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, determine $\sin \alpha$.

b) Sejam α , β e γ as medidas dos ângulos de um triângulo escaleno com lados de medidas inteiras. Suponha ainda que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Prove que $\sin \beta = r\sqrt{2}$ e $\sin \gamma = s\sqrt{2}$, em que r e s são números racionais.

Neste item você pode desejar usar a Lei dos Senos:

Sejam a , b e c as medidas dos lados de um triângulo e, respectivamente, α , β e γ os ângulos internos que se opõem a esses lados. Então

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

c) Obtenha uma solução para a equação $n^2 - m^2 = 72$, em que m e n são inteiros positivos e $\frac{m}{n} \neq \frac{1}{3}$.

d) Sejam α , β e γ as medidas dos ângulos de um triângulo. Suponha ainda que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ e $\cos \beta = \frac{m}{n}$, m e n obtidos no item anterior. Determine $\sin \gamma$.

Você pode desejar usar as fórmulas a seguir:

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin x \\ \sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x\end{aligned}$$

e) Conclua o problema, ou seja, apresente as medidas dos três lados de um triângulo escaleno tal que o cosseno de um de seus ângulos é igual a $\frac{1}{3}$.