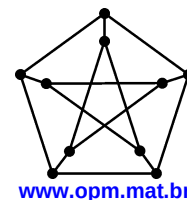


XL OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (13 de agosto de 2016)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)



Folha de Perguntas

- Instruções:**
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
 - Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
 - Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
 - Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
 - Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
 - Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

As medalhas dos Jogos Olímpicos Rio 2016 foram produzidas no Brasil, pela Casa da Moeda, e pesam 500 gramas cada, sendo, assim, as mais pesadas da história. As medalhas de ouro, prata e bronze têm as mesmas inscrições, sem diferenciação pelo metal ou pela modalidade esportiva: de um lado fica a imagem padrão da deusa Nike e, do outro, os louros e a marca dos Jogos Rio 2016. As de ouro contêm 494 g de prata e apenas 6 g de ouro em sua composição metálica. As medalhas de prata contêm 500 g de prata. Já as de bronze têm 475 g de cobre e 25 g de zinco.

- a) Considerando que 1 g de ouro vale R\$ 142,33 e que 1 g de prata vale R\$ 2,13, calcule o custo dos metais utilizados por medalha de ouro.
- b) As medalhas de ouro desse ano são 21,3 vezes mais pesadas do que as dos jogos olímpicos de Estocolmo em 1912. Porém, os jogos de 1912 foram os últimos em que as medalhas de ouro foram feitas inteiramente de ouro. Considerando a quantidade de metal e o valor atual do ouro, qual seria hoje o custo da medalha de ouro que foi entregue nos jogos de Estocolmo em 1912?
- c) A Taça Jules Rimet conquistada pelo Brasil ao vencer a Copa do Mundo de 1970 continha 3800 gramas de ouro. Que porcentagem do ouro da Taça Jules Rimet seria necessária para a produção das 306 medalhas de ouro que estão sendo entregues nos jogos Rio 2016?

PROBLEMA 2

Dizemos que uma grandeza *cresce exponencialmente* com relação a outra grandeza se a primeira é multiplicada por uma constante fixada quando a segunda é adicionada de uma constante fixada. Por exemplo, se a população de um país dobra a cada 20 anos, podemos dizer que tal população cresce exponencialmente com relação ao tempo.

Alguns usuários do aplicativo *Pokémon Go* estão reclamando sobre o tempo necessário para avançar nos níveis do jogo. De fato, usuários mais versados em Matemática estão afirmando que esse tempo cresce exponencialmente.

Um desses usuários estimou em um ano (!) o tempo médio necessário para atingir o nível 40 e em quatro anos (!!) o tempo médio necessário para atingir o nível 50. Como ele está afirmando que o crescimento é exponencial, podemos, então, dizer que a grandeza tempo é multiplicada por 4 quando a grandeza nível é adicionada de 10 unidades.

Supondo que esse usuário esteja certo:

- a) Estime o tempo médio, em meses, necessário para atingir o nível 30.
- b) Mostre que são necessários, em média, mais de 4 milênios para atingir o nível 100. (Fique tranquilo, os seus descendentes poderão cumprir tal missão!)
- c) Um desenvolvedor brasileiro criou um aplicativo concorrente: *Porquê não Vou*. Ele garante que para atingir o nível 40 é necessário, em média, apenas um mês e para atingir o nível 50 são necessários, em média, 9 meses. Considerando, novamente, que o tempo cresce exponencialmente com relação ao nível, qual é o nível que um usuário irá atingir, em média, após jogar durante 7 anos o *Porquê não Vou*?

PROBLEMA 3

Talvez você já tenha brincado de somar os dígitos de um número natural, depois somar os dígitos da soma de dígitos obtida e assim por diante até obter um único dígito. Por exemplo, começando com o número 31415926535897932384626433832795, obtemos:

$$31415926535897932384626433832795 \rightarrow 155 \rightarrow 11 \rightarrow 2$$

Observe que, apesar de o número ser enorme, não foram necessários muitos passos.

Neste problema, nós vamos ver que, com uma pequena alteração na brincadeira, podemos obter o único dígito final com no máximo 3 passos. De fato, para quase todos os números, conseguiremos obtê-lo em dois passos!

Considere a operação “*Inserir e Somar*”: inserimos sinais de mais (+) entre os dígitos do número (quantos desejarmos) e depois fazemos a soma para obter o novo número.

Por exemplo, com o nosso número 31415926535897932384626433832795 chegamos ao único dígito final com apenas duas operações de *Inserir e Somar*:

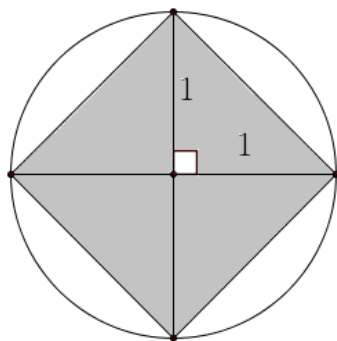
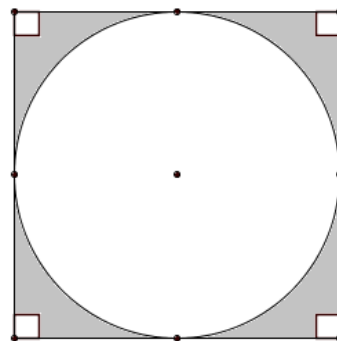
$$3141 + 592 + 65358 + 9793 + 23846 + 2643 + 3832 + 795 = 110000; 1 + 1 + 0000 = 2.$$

Pode-se demonstrar que não importa como apliquemos a operação de inserir e somar, o dígito final obtido será sempre o mesmo.

- a) Mostre como, com apenas duas operações de “inserir e somar”, podemos obter o único dígito final para o número 271828.
- b) Começando com o número 2000089, mostre uma maneira de obter um número de um único dígito usando algumas vezes a operação *Inserir e Somar*.
- c) Mostre que, não importa como apliquemos as operações de “inserir e somar”, necessitamos de pelo menos três operações para obter o único dígito final para o número 2000089.

PROBLEMA 4

O número π pode ser definido como a área de um círculo de raio 1. A partir dessa definição, podemos deduzir fatos sobre o π .

**Figura 1****Figura 2**

- Considere o círculo de raio 1 com o quadrado em seu interior (quadrado inscrito), representados na figura 1. Determine a área deste quadrado.
- Agora considere o quadrado em que o círculo de raio 1 está inscrito, como na figura 2. Determine a sua área.
- A partir dos itens anteriores, justifique por que podemos concluir que $2 < \pi < 4$. (“Eu já aprendi que π é aproximadamente 3,14”, mas você não pode usar isso neste problema.)

PROBLEMA 5

Um *nonograma* é um quebra-cabeça que pode ser jogado com papel e lápis. Um nonograma é apresentado como um quadriculado com uma sequência de números em cada linha (fileira horizontal) e em cada coluna (fileira vertical). Denominaremos uma linha ou coluna por *fila*. Um nonograma é resolvido pintando casinhas de um quadriculado de acordo com a seguinte regra:

Para cada fila, as quantidades de casinhas consecutivas pintadas em cada bloco correspondem aos números correspondentes à fila na ordem em que aparecem. Os blocos devem ser separados por uma ou mais casas não pintadas; nas extremidades das filas pode haver ou não casas não pintadas.

Um exemplo de nonograma, com a sua solução, é:

					1
		1	2	3	1
	3	2	1	1	1
5					
1 2					
1 2					
2					
1 2					

Nonograma

					1
		1	2	3	1
	3	2	1	1	1
5					
1 2					
1 2					
2					
1 2					

Solução do nonograma

Note que há três maneiras de pintar uma fila de 5 casinhas com a dica (1 2) (veja a segunda, a terceira e a quinta linhas da solução) e que (2 1) é uma dica diferente.

- Mostre as seis maneiras distintas de pintar uma fila de 5 casinhas com a dica (1 1).
- Uma dica é *bacana* quando, sozinha, permite determinar unicamente as casas pintadas da fila correspondente. Por exemplo, para filas de 5 casinhas, (5) é uma dica bacana pois ela indica que devemos pintar toda a fila e (1 2) não é bacana pois há três maneiras de pintar a fila. Além de (5) e (0), há outras quatro dicas bacanas. Escreva-as.
- Jade ia resolver um nonograma, mas seu cachorro, Totopázio, rasgou as dicas das colunas! Só sobrou um pedaço (ou todas?) das dicas da terceira e da quarta coluna. Ainda assim, Jade conseguiu resolver o nonograma.

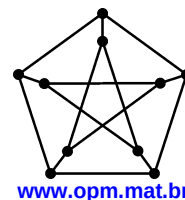
					1
		1	1		2
4					
5					
3					
2					
1 1					

Quais são as dicas das colunas?

XL OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (13 de agosto de 2016)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)



Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

As medalhas dos Jogos Olímpicos Rio 2016 foram produzidas no Brasil, pela Casa da Moeda, e pesam 500 gramas cada, sendo, assim, as mais pesadas da história. As medalhas de ouro, prata e bronze têm as mesmas inscrições, sem diferenciação pelo metal ou pela modalidade esportiva: de um lado fica a imagem padrão da deusa Nike e, do outro, os louros e a marca dos Jogos Rio 2016. As de ouro contêm 494 g de prata e apenas 6 g de ouro em sua composição metálica. As medalhas de prata contêm 500 g de prata. Já as de bronze têm 475 g de cobre e 25 g de zinco.

- a) Considerando que 1 g de ouro vale R\$ 142,33 e que 1 g de prata vale R\$ 2,13, calcule o custo dos metais utilizados por medalha de ouro.
- b) As medalhas de ouro desse ano são 21,3 vezes mais pesadas do que as dos jogos olímpicos de Estocolmo em 1912. Porém, os jogos de 1912 foram os últimos em que as medalhas de ouro foram feitas inteiramente de ouro. Considerando a quantidade de metal e o valor atual do ouro, qual seria hoje o custo da medalha de ouro que foi entregue nos jogos de Estocolmo em 1912?
- c) A Taça Jules Rimet conquistada pelo Brasil ao vencer a Copa do Mundo de 1970 continha 3800 gramas de ouro. Que porcentagem do ouro da Taça Jules Rimet seria necessária para a produção das 306 medalhas de ouro que estão sendo entregues nos jogos Rio 2016?

PROBLEMA 2

Talvez você já tenha brincado de somar os dígitos de um número natural, depois somar os dígitos da soma de dígitos obtida e assim por diante até obter um único dígito. Por exemplo, começando com o número 31415926535897932384626433832795, obtemos:

$$31415926535897932384626433832795 \rightarrow 155 \rightarrow 11 \rightarrow 2$$

Observe que, apesar de o número ser enorme, não foram necessários muitos passos.

Neste problema, nós vamos ver que, com uma pequena alteração na brincadeira, podemos obter o único dígito final com no máximo 3 passos. De fato, para quase todos os números, conseguiremos obtê-lo em dois passos!

Considere a operação “*Inserir e Somar*”: inserimos sinais de mais (+) entre os dígitos do número (quantos desejarmos) e depois fazemos a soma para obter o novo número.

Por exemplo, com o nosso número 31415926535897932384626433832795 chegamos ao único dígito final com apenas duas operações de *Inserir e Somar*:

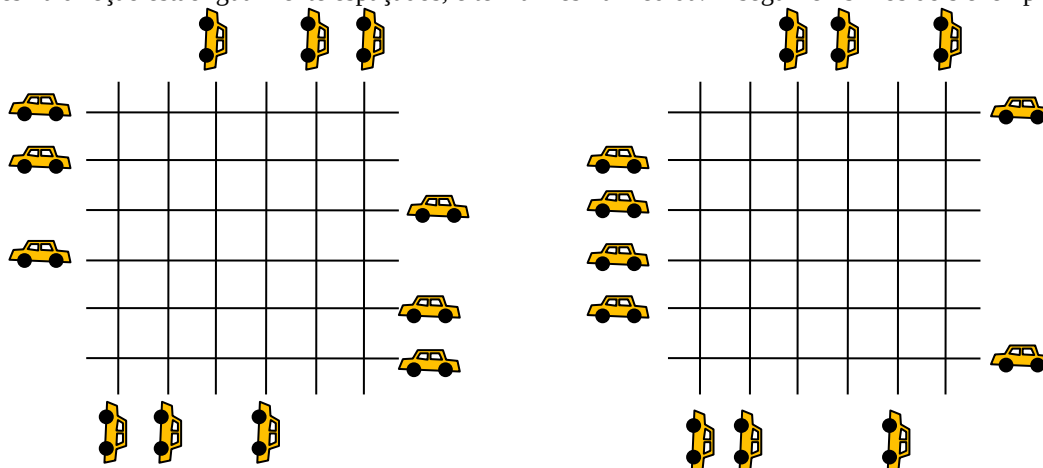
$$3141 + 592 + 65358 + 9793 + 23846 + 2643 + 3832 + 795 = 110000; 1 + 1 + 0000 = 2.$$

Pode-se demonstrar que não importa como apliquemos a operação de inserir e somar, o dígito final obtido será sempre o mesmo.

- a) Mostre como, com apenas duas operações de “inserir e somar”, podemos obter o único dígito final para o número 271828.
- b) Mostre que, não importa como apliquemos as operações de “inserir e somar”, necessitamos de pelo menos três operações para obter o único dígito final para o número 2000089.

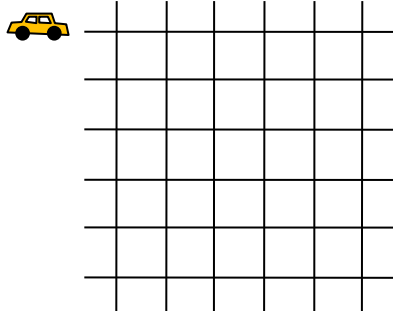
PROBLEMA 3

Uma quantidade $2n$ de carros deve ser colocada nas extremidades de $2n$ segmentos de retas, n deles verticais e n horizontais. Segmentos na mesma direção estão igualmente espaçados, e têm a mesma medida. A seguir exibimos dois exemplos para $n = 6$:



Após os carros serem dispostos, eles se movem simultaneamente com a mesma velocidade constante em direção à outra extremidade do segmento correspondente. Dizemos uma disposição de carros é *segura* quando dois carros **não** passam pelo mesmo ponto simultaneamente. Por exemplo, na figura acima, a disposição à esquerda é segura e a disposição à direita não é segura, pois, por exemplo, os carros na sexta coluna e na primeira linha passam pelo mesmo ponto simultaneamente.

a) Suponha que o carro da primeira linha seja colocado à esquerda. Determine onde os carros da primeira coluna, da última coluna e da última linha devem ser colocados para que a disposição seja segura.



b) É possível que exista uma disposição segura para $n = 7$?

c) Quantas são as disposições seguras para $n = 6$?

PROBLEMA 4

O número π pode ser definido como a área de um círculo de raio 1. A partir dessa definição, podemos deduzir fatos sobre o π . Neste problema vamos desenhar um dodecágono (polígono de 12 lados) regular no interior do círculo e verificar o que podemos concluir sobre o valor de π comparando as áreas.

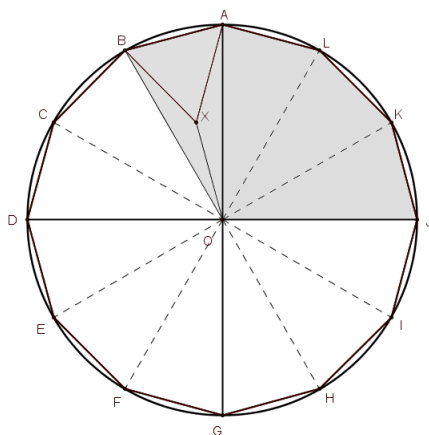


Figura 1

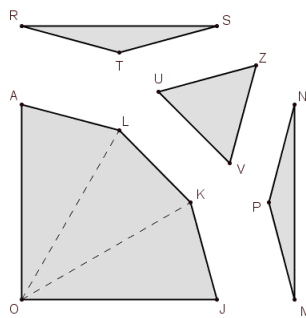


Figura 2

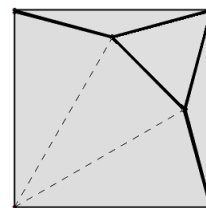


Figura 3

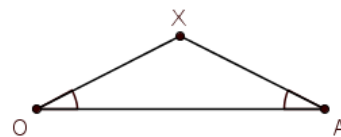
Na figura 1, o dodecágono regular $ABCDEFGHIJKL$ está inscrito no círculo de centro O e raio 1.

a) Calcule a medida do ângulo $\widehat{AOB}$.

No interior do dodecágono, sobre o lado AB construímos o triângulo equilátero (ou seja, cujos lados são todos iguais) ABX e a partir dele dividimos o triângulo ABO nos triângulos ABX , OBX e OXA .

b) Determine os ângulos do triângulo OXA e conclua que ele é isósceles.

Neste item você pode desejar utilizar que os lados OX e AX possuem o mesmo comprimento quando os ângulos opostos possuem a mesma medida, ou seja, quando $m(\widehat{O}) = m(\widehat{A})$ na figura ao lado.



Separe também o pentágono $OJKLA$. Neste item vamos provar que podemos montar um quadrado com o pentágono e os três triângulos ABX , OBX e OXA . Para isso considere a figura 2 em que os triângulos UVZ , RST e MNP são congruentes aos triângulos ABX , OBX e OXA , respectivamente.

c) Justifique por que $JK = MP$, $KL = UV$ e $VZ = PN$.

d) Calcule $m(\widehat{K})$, $m(\widehat{P})$ e $m(\widehat{V})$ e conclua que $m(\widehat{K}) + m(\widehat{P}) + m(\widehat{V}) = 360^\circ$.

e) A partir da ideia desenvolvida nos itens anteriores, justifique por que $\pi > 3$.

PROBLEMA 5

Um jogo de celular, o *Porquenão Vou*, consiste, essencialmente, em capturar monstrinhos fofinhos, os *Porquenãos*, e colecioná-los. O jogador assume o papel de treinador de monstrinhos, ganha pontos de experiência e sobe de nível. Há várias maneiras de ganhar pontos de experiência. Vamos ver como ganhar bastantes pontos de experiência capturando somente um tipo de *Porquenão*, o *Prupru*.



Prupru



Prupruoto

O jogador tem as seguintes opções para ganhar pontos de experiência com Pruprus:

- Capturar um Prupru pela primeira vez: 500 pontos
- Capturar outros Pruprus: 100 pontos por Prupru
- Evoluir um Prupru para um *Prupruoto*: 500 pontos por evolução

Para evoluir um Prupru para um Prupruoto, precisamos de 12 *doces*; ao realizar uma evolução, você recebe um doce de volta. Você ganha três doces por Prupru capturado; além disso, você pode trocar um Prupru que você pegou por um doce. Prupruotos não podem ser trocados por doces. (“Ah, mas no *Pokémon Go* pode” – lembre-se, este é o *Porquenão Vou*.)

Por exemplo, digamos que você começou a jogar e capturou 13 Pruprus. Com isso, você conseguiu $500 + 12 \cdot 100 = 1700$ pontos de experiência e $13 \cdot 3 = 39$ doces. Suponha que vamos evoluir x Pruprus para Prupruotos, obtendo $500x$ pontos de experiência, e que todos os outros $13 - x$ Pruprus vão ser trocados por doces. Com isso, gastamos $12x$ doces nas evoluções, recebemos x doces de volta dessas evoluções e mais $13 - x$ doces das trocas. Ficamos com $39 - 12x + x + (13 - x) = 52 - 12x$ doces no final. Essa quantidade deve ser positiva (isso mesmo, você não pode ficar com 0 doces!). Com isso, $52 - 12x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{51}{12} \Leftrightarrow x \leq \frac{17}{4}$.

Como x é inteiro, temos $x \leq 4$. Com isso, conseguimos no máximo $1700 + 4 \cdot 500 = 3700$ pontos de experiência com 13 Pruprus.

a) Suponha que você começou a jogar e capturou 100 Pruprus. Qual é a maior quantidade de pontos de experiência que você pode ganhar com esses *Porquenãos*?

b) Suponha que você começou a jogar e capturou $3y$ Pruprus. Mostre que podemos ganhar $800y - 100$ pontos de experiência com esses *Porquenãos*.

c) Para chegar no nível 10 do *Porquenão Vou* são necessários 45000 pontos de experiência. Quantos Pruprus você precisa pegar, no mínimo, para chegar no nível 10?

XL OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Primeira Fase (13 de agosto de 2016)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)



Folha de Perguntas

- Instruções:**
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
 - Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
 - Coloque nas *Folhas de Respostas* todos os dados pessoais solicitados.
 - Todas as respostas devem ser **justificadas**, e apresentadas somente nas *Folhas de Respostas*.
 - Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
 - Ao terminar, entregue apenas as *Folhas de Respostas* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Um modelo utilizado para medir crescimento sob condições limitantes e difusão de inovações é o *modelo de Gompertz*, que tem a forma

$$f(t) = a \cdot b^{(c^t)},$$

em que a , b e c são constantes reais positivas com $b < 1$ e $c < 1$. Por exemplo, a quantidade de pessoas que fazem compra pela Internet na Austrália no ano $1998 + t$, em milhões, é dada aproximadamente por

$$f(t) = 12,5 \cdot 0,01^{(0,8^t)}.$$

- a) Quantas pessoas fazem compras pela Internet na Austrália atualmente? Você pode querer utilizar $0,8^{18} \cong 0,02$ e $10^{0,02} \cong 1,05$.
b) A Austrália tem atualmente 25 milhões de habitantes. Em que ano o modelo prevê que 5% dessa população atual fez compras pela Internet lá? Adote $\log 2 \cong 0,3$.

PROBLEMA 2

Um jogo de celular, o *Porquenão Vou*, consiste, essencialmente, em capturar monstrinhos fofinhos, os *Porquenãos*, e colecioná-los. O jogador assume o papel de treinador de monstrinhos, ganha pontos de experiência e sobe de nível. Há várias maneiras de ganhar pontos de experiência. Vamos ver como ganhar bastantes pontos de experiência capturando somente um tipo de *Porquenão*, o *Prupru*.



Prupru



Prupruoto

O jogador tem as seguintes opções para ganhar pontos de experiência com Pruprus:

- Capturar um Prupru pela primeira vez: 500 pontos
- Capturar outros Pruprus: 100 pontos por Prupru
- Evoluir um Prupru para um *Prupruoto*: 500 pontos por evolução

Para evoluir um Prupru para um Prupruoto, precisamos de 12 *doces*; ao realizar uma evolução, você recebe um doce de volta. Você ganha três doces por Prupru capturado; além disso, você pode trocar um Prupru que você pegou por um doce. Prupruotos não podem ser trocados por doces. (“Ah, mas no *Pokémon Go* pode” – lembre-se, este é o *Porquenão Vou*.)

Por exemplo, digamos que você começou a jogar e capturou 13 Pruprus. Com isso, você conseguiu $500 + 12 \cdot 100 = 1700$ pontos de experiência e $13 \cdot 3 = 39$ doces. Suponha que vamos evoluir x Pruprus para Prupruotos, obtendo $500x$ pontos de experiência, e que todos os outros $13 - x$ Pruprus vão ser trocados por doces. Com isso, gastamos $12x$ doces nas evoluções, recebemos x doces de volta dessas evoluções e mais $13 - x$ doces das trocas. Ficamos com $39 - 12x + x + (13 - x) = 52 - 12x$ doces no final. Essa quantidade deve ser positiva (isso mesmo, você não pode ficar com 0 doces!). Com isso, $52 - 12x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{51}{12} \Leftrightarrow x \leq \frac{17}{4}$.

Como x é inteiro, temos $x \leq 4$. Com isso, conseguimos no máximo $1700 + 4 \cdot 500 = 3700$ pontos de experiência com 13 Pruprus.

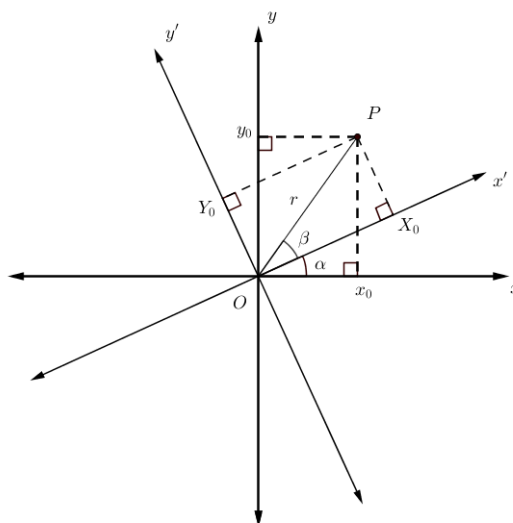
a) Suponha que você começou a jogar e capturou 100 Pruprus. Qual é a maior quantidade de pontos de experiência que você pode ganhar com esses *Porquenãos*?

b) Suponha que você começou a jogar e capturou $3y$ Pruprus. Mostre que podemos ganhar $800y - 100$ pontos de experiência com esses *Porquenãos*.

c) Para chegar no nível 10 do *Porquenão Vou* são necessários 45000 pontos de experiência. Quantos Pruprus você precisa pegar, no mínimo, para chegar no nível 10?

PROBLEMA 3

Na figura a seguir temos dois sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais Oxy e $Ox'y'$, respectivamente. A medida do ângulo entre os eixos $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Ox'}$ é igual a α radianos.



a) Suponha que $P = (X_0; Y_0)$ são as coordenadas de P no sistema cartesiano ortogonal $Ox'y'$, que o segmento OP possui medida r e forma ângulo β com o eixo x' . Prove que $X_0 = r \cos \beta$ e $Y_0 = r \sin \beta$ e que as coordenadas de $P = (x_0; y_0)$ no sistema cartesiano ortogonal Oxy são dadas por:

$$\begin{cases} x_0 = X_0 \cos \alpha - Y_0 \sin \alpha \\ y_0 = X_0 \sin \alpha + Y_0 \cos \alpha \end{cases}$$

(Neste item você pode desejar utilizar que $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ e $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$)

Os principais lugares geométricos que estudamos (retas, circunferências, parábolas, elipses e hipérboles) são denominados *cônicas* (depois pesquise em casa o porquê) e possuem equações da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, em que A, B, C, D, E, F são coeficientes reais (possivelmente nulos).

b) Ao rotacionarmos o sistema cartesiano ortogonal Oxy α radianos no sentido anti-horário, a equação de uma cônica no novo sistema ortogonal de eixos $Ox'y'$ passa a ser $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$. Utilizando as fórmulas obtidas no item a, mostre que $A' + C' = A + C$.

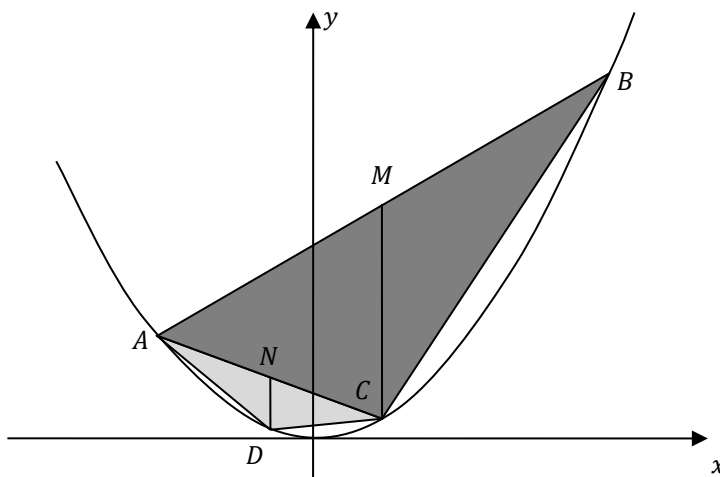
c) Considere a cônica $x^2 + 2xy + y^2 - 3x - y = 0$. Para determinar que tipo de cônica essa equação representa, podemos fazer uma rotação para eliminar o termo em xy . Isso é equivalente a encontrar α tal que $B' = 0$. Encontre um valor de α para essa cônica. Você pode desejar utilizar as seguintes fórmulas:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

PROBLEMA 4

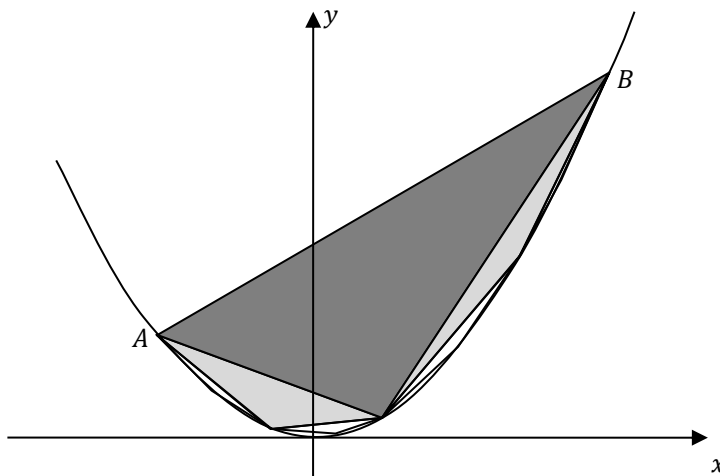
Considere o gráfico da função $f(x) = x^2$. Escolhemos dois pontos $A = (a, a^2)$ e $B = (b, b^2)$ sobre o gráfico. Nesse problema, calcularemos a área da região R delimitada pelo segmento AB e pelo gráfico da função, usando um método criado por Arquimedes no século III a.C.

Seja M o ponto médio de AB , C o ponto sobre o gráfico tal que MC é paralelo ao eixo y , N o ponto médio de AC e D o ponto sobre o gráfico tal que ND é paralelo ao eixo y .



- Calcule o comprimento de MC em função de a e b .
- Calcule o comprimento de ND em função de a e b .

- c) Calcule a razão entre a altura relativa a ND no triângulo AND e a altura relativa a MC no triângulo AMC . Em seguida, calcule a razão entre as áreas de ACD e ABC .
- d) A ideia principal de Arquimedes é dividir a região R em infinitos triângulos, como mostra a figura a seguir:



Começamos com o triângulo ABC , depois usamos os pontos médios de AC e BC para construir os dois triângulos cinza claro, depois usamos os pontos médios dos lados virados “para baixo” nesses dois triângulos para construir os quatro triângulos brancos (o da direita é “fininho” demais para ser visto), e assim por diante. Em cada passo, construímos o dobro da quantidade de triângulos construídos no passo anterior.

Prove que a área da região R é $\frac{(b-a)^3}{6}$.

Você pode querer utilizar as seguintes fórmulas:

- Se T é o ponto médio de RS , com $R = (x_R, y_R)$ e $S = (x_S, y_S)$, então $T = \frac{R+S}{2} = \left(\frac{x_R+x_S}{2}, \frac{y_R+y_S}{2}\right)$.
- A soma da progressão geométrica infinita de primeiro termo a_1 e razão q , com $|q| < 1$, é $S = \frac{a_1}{1-q}$.

PROBLEMA 5

Denominamos *partição ordenada* de um inteiro positivo n cada uma das maneiras de escrevê-lo como soma de inteiros positivos (uma das possibilidades é o próprio número). Em tais somas, consideramos a ordem em que os inteiros aparecem. Por exemplo, o número 4 possui 8 partições ordenadas: 4; 1 + 3; 3 + 1; 2 + 2; 1 + 1 + 2; 1 + 2 + 1; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1. Nesse problema calcularemos um somatório aplicando tal conceito.

a) Observe como podemos obter as 16 partições ordenadas do número 5 a partir das 8 do número 4, acrescentando 1 como última parcela ou aumentando em uma unidade essa parcela.

4 → 4 + 1 e 5	1 + 3 → 1 + 3 + 1 e 1 + 4
3 + 1 → 3 + 1 + 1 e 3 + 2	2 + 2 → 2 + 2 + 1 e 2 + 3
1 + 1 + 2 → 1 + 1 + 2 + 1 e 1 + 1 + 3	1 + 2 + 1 → 1 + 2 + 1 + 1 e 1 + 2 + 2
2 + 1 + 1 → 2 + 1 + 1 + 1 e 2 + 1 + 2	1 + 1 + 1 + 1 → 1 + 1 + 1 + 1 + 1 e 1 + 1 + 1 + 2

A partir dessa observação, prove que o número de partições ordenadas de n , n inteiro positivo, é 2^{n-1} .

Agora vamos mostrar que o número de partições ordenadas de n com todas as parcelas maiores do que 1 é igual a F_{n-1} , em que (Sequência de Fibonacci):

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ e, para } n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

b) Com a restrição indicada acima, temos apenas duas partições ordenadas do número 4: 4; 2 + 2. Temos ainda três partições ordenadas do número 5: 5; 2 + 3; 3 + 2. Considerando as partições ordenadas do número 6, temos que em duas delas a última parcela é igual a 2 (4 + 2; 2 + 2 + 2) e em três delas a última parcela é maior do que 2 (6; 2 + 4; 3 + 3). Levando em conta tal observação, mostre que o número de partições ordenadas de n com todas as parcelas maiores do que 1 é igual a F_{n-1} .

c) Demonstre que, dada uma solução inteira não negativa da equação $t_1 + 2t_2 + \dots + nt_n = n$, existem exatamente

$$\frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_n)!}{t_1! t_2! \dots t_n!}$$

partições ordenadas de n nas quais o número i aparece t_i vezes.

(Por exemplo, a solução $(0; 2; 1; 0; 0; 0)$ da equação $t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 + 6t_6 + 7t_7 = 7$ corresponde a $\frac{3!}{0!2!1!0!0!0!} = 3$ partições ordenadas de 7, a saber: 2 + 2 + 3; 2 + 3 + 2; 3 + 2 + 2.)

d) Note que podemos concluir que

$$\sum \frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_n)!}{t_1! t_2! \dots t_n!} = 2^{n-1},$$

em que a soma é sobre todas as soluções inteiras não negativas da equação $t_1 + 2t_2 + \dots + nt_n = n$. Isso porque os dois membros da equação contam a quantidade de partições ordenadas de n .

Vamos usar essa ideia para calcular outra soma. Explique por que a quantidade de partições ordenadas de $n + 1$ com pelo menos uma parcela igual a 1 é

$$S = \sum \frac{(1 + t_1 + t_2 + \dots + t_n)!}{(1 + t_1)! t_2! \dots t_n!}$$

em que o somatório percorre todas as soluções inteiras não negativas da equação $t_1 + 2t_2 + \dots + nt_n = n$.

e) Encontre uma fórmula para S .